Názov projektu: CIV – Centrum Internetového vzdelávania FMFI
Číslo projektu: SOP ĽZ 2005/1-046
ITMS: 11230100112

Kmitavý pohyb telesa zaveseného na pružine

(Aktivity súvisiace s kmitaním uskutočnené pomocou programu Coach 6)

Michal Kriško
FMFI UK

Určovanie koeficientu tuhosti pružiny

V praxi sa často stretávame s kmitaním telies na pružine, takisto s využitím pružín pri ich stláčaní alebo naťahovaní. Využívajú sa v rôznych mechanizmoch, pri tlmení nárazov a nerovností povrchu v dopravných prostriedkoch a pod. Nemožno zabudnúť na využitie pružiny v silomeroch. Pružina je zhotovená obyčajne z pružnej ocele a vyznačuje sa vlastnosťami. Pri deformáciach pri pevných látkach platí priama úmernosť medzi vznikajúcim normálovým napätím σ (vnútorným pnutím, resp. tlakom) a pomerným relatívnym predĺžením ε. Tento fakt opisuje pre lineárnu oblasť *Hookov* zákon. Podobný vzťah priamej úmernosti platí aj medzi pôsobiacou silou F na pružinu a jej predĺžením Δl (pri natiahnutí pružiny sa drôt pružiny v tvare špirály pri každom závite ohne o určitú hodnotu, nejedná sa preto o deformáciu ťahom):

$$F \sim \Delta l$$

Tento fakt, samozrejme, platí len pre obmedzené predĺženia pružiny Δl. Jeho jednoduché a pohodlné overenie možno uskutočniť pomocou silomeru. Pokiaľ pružinu naťahujeme príliš silno alebo dlho, môže dôjsť k trvalej deformácii pružiny. To, aká veľká sila musí pôsobiť na pružinu, aby došlo k jej trvalému zdeformovaniu, závisí od vlastností látky, z ktorej je pružina vyrobená. Experimentálne by sme mohli jednoducho navrhnúť, aká veľká sila je potrebná na natiahnutie pružiny o určitú, pevne stanovenú dĺžku. Konštanta úmernosti medzi konkrétnou silou a predĺžením pružiny by malo byť číslo vyjadrujúce, aká veľká sila musí pôsobiť, aby sme natiahli pružinu o jednotku dĺžky. Toto číslo nazvime tuhosť pružiny, označme k a platí preto:

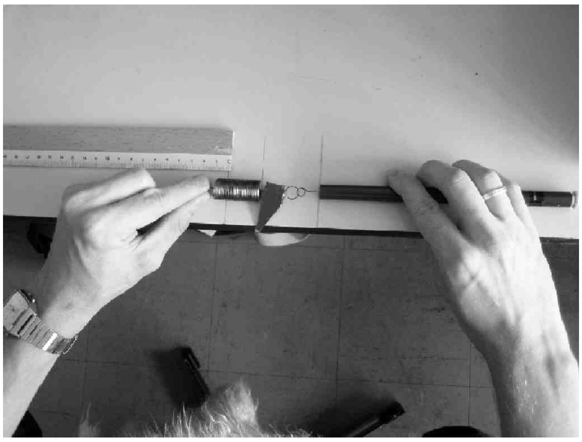
$$F = k\,\Delta l.$$

Konštantu úmernosti tuhosti k pružiny je možné experimentom zistiť viacerými spôsobmi. Pokúsime sa určiť ju pomocou nasledujúceho pokusu.

<u>Úloha 1</u>.: Pomocou silomeru určite tuhosť pružinky.
Pomôcky: školský silomer, pravítko, pružina s neznámym koeficientom tuhosti.
Návod:
Na stôl položíme silomer a pružinku, navzájom spolu uchytené. Označíme na podložke miesta, kde sa nachádzajú začiatky oboch pružín pred meraním. Náš silomer meria do 500

mN, má stupnicu s väčšími dielikmi po 50 mN, čomu zodpovedá 1 cm dĺžky na stupnici. (Obr.1.)

Obr.1.: *Pružina silomeru aj pokusná pružinka nie sú namáhané silou. Sú vyznačené začiatočné polohy pružiniek.*

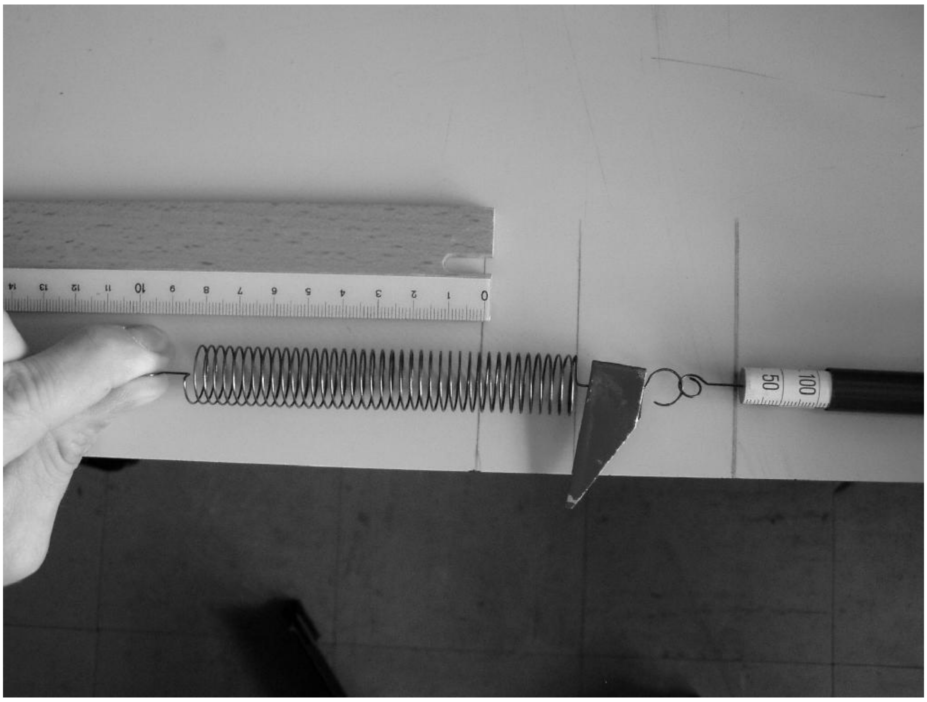


Pri pôsobení rôznych síl na pružinku silomeru a pružinu, ktorej tuhosť chceme zistiť, sa natiahnú obidve pružinky, každá, samozrejme, o inú dĺžku Δl. Využijeme zákon akčnej a reakčnej sile. Pri ťahu pôsobí sila F, ktorú priamo môžeme namerať silomerom. Výhodou pri meraní bolo, že dielik na silomery zodpovedajúci 0,5N meral 1 cm. Veľmi pohodlne tak môžeme odmerať predĺženia pružín pri rozličných pôsobiacich silách. Namerané hodnoty sú uvedené v tabuľke:

Tab.: *Namerané hodnoty síl F pôsobiacich na pružinky a predĺžení* Δl_1 *a* Δl_2.

F / N	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Δl_1 / cm	1	2	3	4	5	6
k_1 / Nm^{-1}	50	50	50	50	50	50
Δl_2 / cm	4,5	7	12	14,5	18	21,5
k_2 / Nm^{-1}	11,1	14	15	13	13,8	13,9

Z nameraných výsledkov vidno, že konštanta $k = F / \Delta l$ je pre rôzne natiahnutia pružinky stála. Na základe merania sme vypočítali tuhosti oboch pružín. Pružina silomeru má tuhosť k_1=50 Nm^{-1}, pokusná pružinka má približnú tuhosť k_2=13,5 Nm^{-1}. Na Obr.2 je znázornený princíp merania.



Obr.2.: *Pri pôsobení určitej sily na pružinky môžeme odmerať predĺženia pružín.*

Určenie tuhosti pružiny k má napr. význam pri úlohách o kmitaní. Nechajme na pružine kmitať teleso s hmotnosťou m. Potom na základe odvodenej rovnice pre výslednú silu

$$F= -ky = ma$$

a vzťahu pre zrýchlenie pri kmitaní

$$a= -\omega_0^2\, y$$

môžeme poslednú rovnicu vynásobiť hmotnosťou m, čím dostávame nasledovnú rovnicu:

$$ma = -m\omega_0^2\, y$$

a teda

$$F= -ky = -m\omega_0^2\, y.$$

Preto

$$\omega_0^2 = k / m.$$

To je dôležitý vzťah prepájajúci frekvenciu vlastného kmitania s tuhosťou pružiny. Čiže ak napr. poznáme tuhosť pružiny a hmotnosť závažia, ktoré necháme voľne kmitať, vieme ľahko vypočítať frekvenciu resp. periódu kmitania.

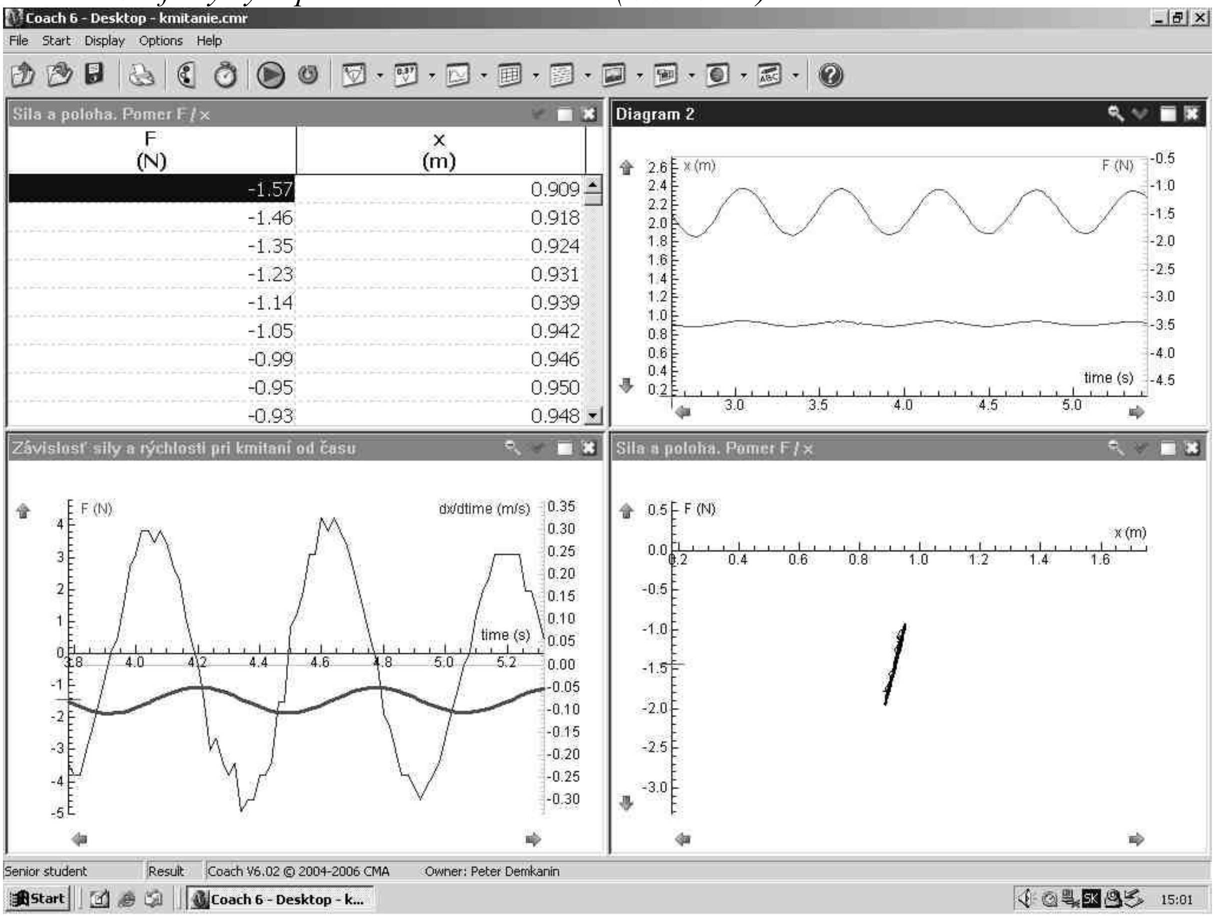
Skúmanie časovej závislosti polohy a rýchlosti kmitajúcehp telesa a výslednej sily
Zisťovanie frekvencie kmitania

<u>Úloha 2.</u>: Zistite frekvenciu alebo periódu kmitov pružiny so závažím známej hmotnosti
a) meraním stopkami a výpočtom periódy (napríklad odmerajte časový interval vykonania 10 kmitov a určite periódu)
b) meraním pomocou počítača (použili sme program Coach 6).
c) priamym výpočtom frekvencie

Obr. 3.: *Aparatúra pri meraní frekvencie kmitov.*

Opíšeme stručne meranie frekvencie kmitania pomocou počítačového programu Coach 6. Aparatúra je zobrazená na obr. 3. Okrem frekvencie sme skúmali aj závislosť pôsobiacej sily F a polohy od času. Závažie (100g) vykonáva vlastné tlmené kmity. Zospodu závažia je pripevnený kus polystyrénu určený na lepšie snímanie polohy (senzor polohy je umiestnený na dlážke, pružina je zavesená na senzore sily). Na obr. 4. je zobrazený výstup merania pri kmitavom pohybe našej pružinky so 100 g závažím pri použití programu Coach 6. V hornom ľavom okne je tabuľka hodnôt výslednej pôsobiacej sily a polohy x od polohového senzora. Hodnoty meraných veličín nie sú úplne presné, nakoľko senzory nemusia byť presne nakalibrované. V programe je možné názorne ukázať, že pôsobiaca sila závisí priamo úmerne od aktuálnej výchylky kmitajúceho telesa v každom momente kmitania (viď pravú dolnú časť obr.4.). V grafickom diagrame vpravo hore je zobrazený priebeh pôsobiacej sily od času a taktiež ako sa menila poloha závažia v čase. Z grafu je jasne viditeľné, že obidve veličiny sa menili úmerne funkcii sint. Na základe tohoto poznatku ľahko odčítame periódu kmitania. Perióda kmitania T vychádza podľa grafu okolo 0,6 s (f = 1,7 Hz). Uvedieme len pre zaujímavosť, že v uvedenom programe je možné graficky zobraziť aj priebeh časovej derivácie polohy - rýchlosť pohybu od času. V ľavom spodnom okne obr.4 sme zobrazili rýchlosť pohybu, tiež je tu znázornená sila. Bez problému nahliadneme (pri vhodnom posune osi), aký je vzťah medzi hodnotami sily a rýchlosti. V krajných polohách je rýchlosť nulová, pôsobiaca sila je však maximálna. A naopak pre rovnovážnu polohu. Taký istý vzťah platí aj pre okamžitú výchylku (polohu x) a rýchlosť v.

Obr. 4: *Grafický výstup merania na obrazovke (COACH 6)*



Teraz prejdime k samotnému výpočtu frekvencie f vlastného kmitania. Keďže

$$\omega^2 = k / m,$$

$$\text{a} \quad \omega = 2\pi f,$$

frekvenciu vypočítame

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Po dosadení známej hodnoty tuhosti pružiny k = 1,35 $\mathrm{Nm^{-1}}$ a hmotnosti závažia 100g = 0,1 kg, vychádza frekvencia $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{13{,}5 N\mathrm{m}\text{ -1}}{0{,}1 kg}}$ = 1,85 Hz.

Len pre porovnanie: frekvencia kmitania určená z grafu závislosti sily od času vyšla 1,66 Hz. Nakoľko skutočné kmitanie bolo ovplyvňované trením pružinky (tepelné straty), odporom vzduchu pri pohybe polystyrénovej dostičky a nakoľko sme pri výpočte nezarátali aj hmonosť polystyrénu, je odklon teórie od experimentu minimálny. (M. Kriško)