

### Príklady zo štatistickej fyziky.

1. Uvažujte systém štyroch spinov. Sledujte časový vývoj počtu spinov v stave hore, strednú hodnotu tejto veličiny a jej stredný kvadrát
2. Ako bude vyzerat' výsledok predchádzajúceho príkladu pre všeobecný prípad súboru  $N$  spinových systémov.
3. Nájdite strednú hodnotu, strednú kvadratickú odchýľku, hustotu pravdepodobnosti a distribučnú funkciu pre náhodnú premennú rovnomerne rozdelenú na intervale  $< 0, L >$
4. Strely dopadajú rovnomerne náhodne do terča tvaru kruhu s polomerom  $R$ . Nájdite strednú hodnotu, strednú kvadratickú odchýľku, hustotu pravdepodobnosti a distribučnú funkciu pre vzdialenosť dopadu strely od stredu terča.
5. Uvažujte jednorozmerný prípad: častice sú strieľané oproti sebe po úsečke  $< 0, L >$  tak, že ak jedna častica je vystrelená z bodu 0 rýchlosťou  $v$  potom v náhodnom okamihu počas jej letu po úsečke je z bodu  $L$  vystrelená oproti nej častica rýchlosťou  $2v$ . Častice sa zrazia v bode so súradnicou  $x$ . Veličina  $x$  je náhodná veličina. Určte strednú hodnotu, strednú kvadratickú odchýľku, hustotu pravdepodobnosti a distribučnú funkciu tejto veličiny
6. Vypočítajte pravdepodobnosť prežitia v ruskej rulete pri použití 6 komorového zásobníka a, po  $N$  pokusoch  
b, pravdepodobnosť zastrelenia po  $N$  pokusoch. Hra sa neodporúča v školských zariadeniach.
7. Bateria pozostáva z  $N$  článkov s elektromotorickým napätím  $\varepsilon$ . Po dlhšom používaní sa vplyvom opotrebovania niektoré články vybili. Predpokladajte, že článok má pôvodné elektromotorické napätie  $\varepsilon$  s pravdepodobnosťou  $p$ . Určte stredný výkon baterky (Články sú v baterke usporiadané sériovo a buď fungujú, alebo nefungujú)
8. Desiat' malých športových lietadiel lieta naslepo v okolí letiska úplne náhodne v dovolenom priestore, ktorého veľkosť je  $20\text{km} \times 20\text{km} \times 1,5\text{km}$  rýchlosťou  $150 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Odhadnite rádovo, aká je pre zvolené lietadlo pravdepodobnosť, že počas jednej hodiny letu sa dostane do nebezpečnej zrážkovej situácie. Nebezpečná zrážková situácia je definovaná pomocou pojmu nebezpečná zóna, za ktorú sa považuje myslená guľa s polomerom  $6m$  okolo lietadla. Za nebezpečnú zrážkovú situáciu sa považuje situácia, keď nebezpečné zóny dvoch lietadiel majú nenulový prienik. Námet: spomeňte si na strednú voľnú dráhu molekúl v plyne.
9. Uvažujte ideálny plyn s  $N$  molekulami, ktoré sa nachádzajú v rovnovážnom stave v sude s objemom  $V_0$ . Označme symbolom  $n$  počet molekúl, ktoré sa nachádzajú v ľubovoľnej časti sudu s objemom  $V$ . Pravdepodobnosť, že molekula sa nachádza v tejto časti objemu je  $p = \frac{V}{V_0}$ .
  - a, Určte stredný počet molekúl  $\langle n \rangle$  v objeme  $V$ . ako funkciu  $N, V, V_0$
  - b, Určte strednú kvadratickú odchýľku  $\sigma$  a  $\frac{\sigma}{\langle n \rangle}$
  - c, Určte hlukuáciu hustoty plynu v objeme  $V$
  - d, Aké sú odpovede na otázky a – d v prípade:  $V_0 \gg V, V \rightarrow V_0$

10. Uvažujte systém  $N$  neinteragujúcich spinov. Systém slúži ako ruleta v hazardnej hre. Hráči majú uhádnuť počet spinov orientovaných hore v náhodne zvolenom okamihu. Pri uhádnutí správneho počtu hráč vyhrá sumu úmernú jeho vkladu. Ako treba nastaviť faktory úmernosti na jednotlivé druhy stávk, aby v strednom herňa ani nezarobila ani neprerobila ?
11. Odvodte závislosť stredného kvadrátu vzdialenosti opitého námorníka od krčmy na počte vykonaných rovnako dlhých krokov náhodného smeru.
  - a, ak námorník kráča po priamke
  - b, ak námorník kráča v rovine
12. Dvaja opitý námorníci vyrazia naraz z krčmy, robia kroky náhodného smeru dĺžky  $\lambda$ . Určte stredný kvadrát ich vzdialenosti po  $k$  krokoch.
13. Meriame vzdialenosť 50 m tak, že ukladáme postupne za sebou 50 krá drevený meter. Táto operácia je zaťažená chybami, pretože nemôžeme garantovať, že vzdialenosť medzi susednými značkami na zemi je skutočne 1m. Zistili sme, že táto vzdialenosť s rovnakou pravdepodobnosťou leží medzi 99,8 a 100,2 cm. Určte chybu merania, ktorou je zaťažovaný údaj 50m
14. Opitý námorník vykonáva s pravdepodobnosťou  $p$  krok s dĺžkou  $\lambda$  dopredu a s pravdepodobnosťou  $q = 1 - p$  dozadu. Predpokladajte, že vykonal  $N$  nezávislých krokov
  - a, určte pravdepodobnosť s akou vykonal  $n$  krokov dopredu
  - b, určte pravdepodobnosť, s akou sa dostal do vzdialenosti  $m\lambda$
15. Veličina vzniká ako súčet dvoch náhodných veličín  $x, y$  rovnomerne rozdelených na intervale  $\langle 0, a \rangle$ . Určte hustotu pravdepodobnosti, distribučnú funkciu, strednú hodnotu a strednú kvadratickú odchýľku veličiny  $z$ .
16. Z Maxwellovho zákona pre rozdelenie rýchlostí nájdite vzťah pre najpravdepodobnejšiu rýchlosť, strednú rýchlosť a strednú kvadratickú rýchlosť
17. Z Maxwellovho rozdelenia rýchlostí určte strednú hodnotu absolútnej hodnoty priemetu rýchlostí do fixnej roviny.
18. V akom vzťahu je stredný kvadrát relatívnej rýchlosti dvoch molekúl plynu vo vzťahu k strednému kvadrátu rýchlostí jednej molekuly.
19. Nájdite vzťah pre stredný počet nárazov za čas  $t$  molekúl hmotnosti  $m$  ideálneho plynu pri teplote  $T$  a tlaku  $p$  na plochu  $S$  steny nádoby.
20. Plyn uniká cez otvor o ploche  $S$ , kde je pod tlakom  $p$  za teploty  $T$  do vákua (stále odčerpávanie). Za aký čas klesne tlak plynu v nádobe na polovicu, ak hmotnosť molekúl je  $m$ .
21. Predpokladajme, že tlak plynu  $U^{238}F_6^{19}$  sa efúziou cez plochu  $S$  z danej nádoby danej teploty  $T$  znížil na polovicu za hodinu. Ako sa zmení zloženie zmesi, pozostávajúcej z 99,3% plynu  $U^{238}F_6^{19}$  a 0,7% plynu  $U^{235}F_6^{19}$ ?
22. Odvodte vzťah pre rozdelenie hustoty ideálneho plynu v izotermickej atmosfére za predpokladu, že  $g = \text{konšt.}$  Na základe tohto výsledku odhadnite celkový počet molekúl v atmosfére.
23. Určte rozdelenie hustoty ideálneho plynu v centrifúge tvaru valca o polomere  $R$ , ktorá sa otáča uhlovou rýchlosťou  $\omega$

24. V nádobe tvaru valca s polomerom  $R$  a výškou  $h$  je plyn s tlakom  $p$  a teplotou  $T$ . Nádoba sa začala pohybovať v gravitačnom poli vo zvislom smere so zrýchlením  $a = 2ms^{-2}$ . Určte
- rozloženie hustoty plynu v nádobe
  - najväčšiu a najmenšiu hodnoty hustoty v nádobe
  - určte strednú hodnotu súradnice molekúl plynu v smere pohybu.
- Úlohu riešte v dvoch rôznych prípadoch: nádoba sa pohybuje v smere  $\vec{g}$  a v smere opačnom ku  $\vec{g}$ .

25. Molekuly plynu sa nachádzajú vo všeobecnom konzervatívnom poli s potenciálnou energiou  $E_p$ , pričom pre silu platí:  $\vec{F} = -\nabla E_p$ . Vychádzajúc z podmienky termodynamickej rovnováhy odvodte Boltzmanove rozdelenie

$$n(x, y, z) = n(x_0, y_0, z_0) \exp \left[ -\frac{[E_p(x, y, z) - E_p(x_0, y_0, z_0)]}{kT} \right]$$

Uvedomte si, že ide o zovšeobecnenie postupov použitých v úlohách 22,23,24.

26. Odvodte vzťah pre rozdelenie hustoty ideálneho plynu v izotermickej atmosfére. Uvažujte so zmenou  $g$  ako funkciou výšky.
27. Predpokladajte, že v nádobe s objemom  $V$  a pri teplote  $T$  je uzavretý plyn. Z Maxwellovho rozdelenia rýchlostí jeho molekúl vypočítajte tlak na steny nádoby. Výsledok porovnajte so stavovou rovnicou.
28. Uvažujme systém s  $N$  časticami, ktoré sa môžu nachádzať len v dvoch rôznych stavoch s energiami  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ . Systém je v kontakte s rezervuárom pri teplote  $T$ . Určte:
- stredný počet častíc v stave s energiou  $\varepsilon$ .
  - strednú energiu systému.
  - energetickú fluktuáciu
  - Odpovedzte na otázky  $a - c$  v prípade, keď  $T \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow \infty$ . Výsledky fyzikálne interpretujte.
29. Odhadnite viskozitu vzduchu za normálnych podmienok
30. Odvodte vzťah pre veľkosť tepelnej vodivosti vzduchu za normálnych podmienok a odhadnite jej veľkosť. Všimnite si, že v tomto vzťahu nevystupujú hustota molekúl, koeficient tepelnej vodivosti teda nezávisí od tlaku plynu. Prečo teda termosky vyrábame ako dvojité sklenené nádoby, medzi ktorými je vyčerpaný vzduch.
31. V kocke s hranou  $L = 1m$  sa nachádza vzduch za normálnych podmienok. Určte:
- frekvenciu s akou na seba vzájomne narážajú molekuly plynu
  - frekvenciu, s akou narážajú molekuly plynu na steny nádoby