Vektory

Rozdelenie fyzikálnych veličín

Fyzikálne veličiny:

1, **Skalárne** – určené veľkosťou (číslom)+fyzikálna jednotka: *T, t,m, V, l*

2, **Vektorové** - určené veľkosťou a smerom $\vec{a}, \vec{v}$

3, **Tenzorové**

Vektory

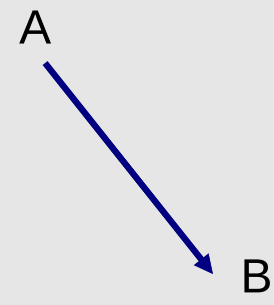
- Vektor možno **zobraziť** **orientovanou úsečkou**

Označenie

$\vec{a}$

a

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

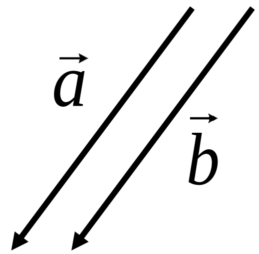


Rovnosť vektorov: $\vec{a} = \vec{b} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = |\vec{b}|$ **veľkosť**

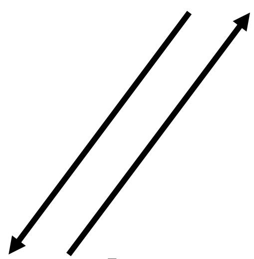
$\vec{a} \; || \; \vec{b}$ **smer**

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ **orientácia**

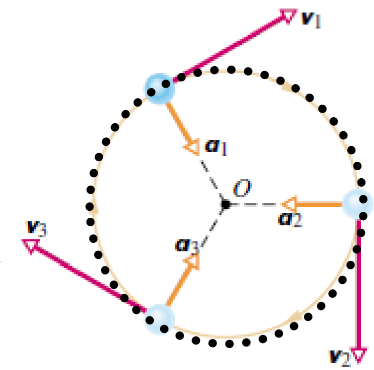
Vektorové rovnice sú obsahovo bohatšie ako skalárne rovnice



$\vec{a} = \vec{b}$



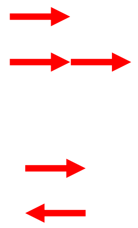
$a = b$



Operácie s vektormi

- Násobenie vektora reálnym číslom

$$\vec{b} = s \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot s \qquad \begin{cases} s > 0 & \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a} \\ s < 0 & \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a} \end{cases} \qquad \left|\vec{b}\right| = |s| \cdot |\vec{a}| \qquad \vec{G} = m\vec{g}$$

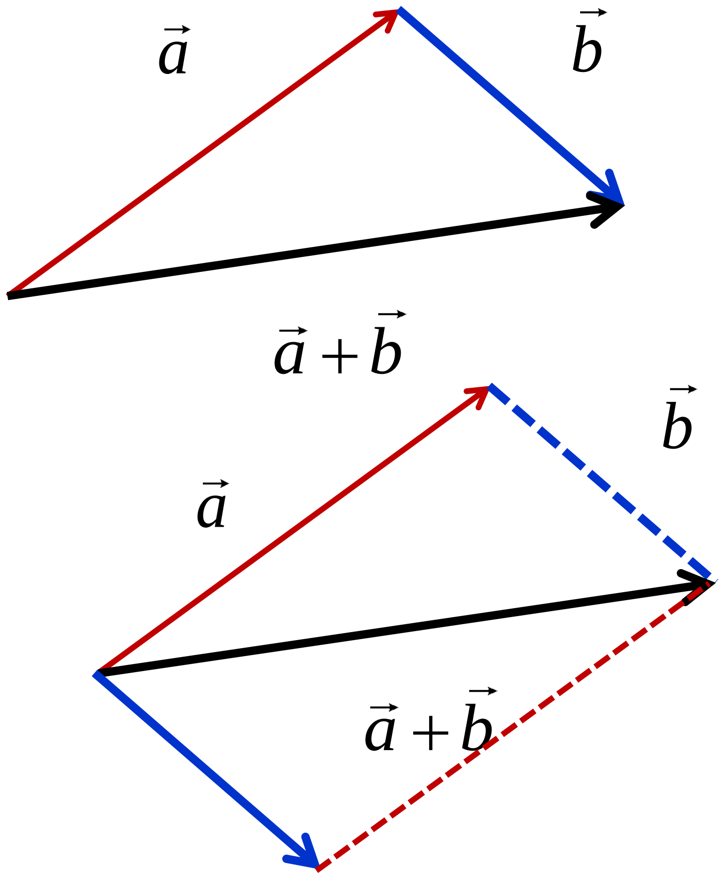


Jednotkový vektor : $\vec{\rho}$ $\quad \boxed{\vec{v} = v \cdot \vec{v}_0}$

- Sčítanie vektorov
- Odčítanie vektorov

- Násobenie dvoch vektorov

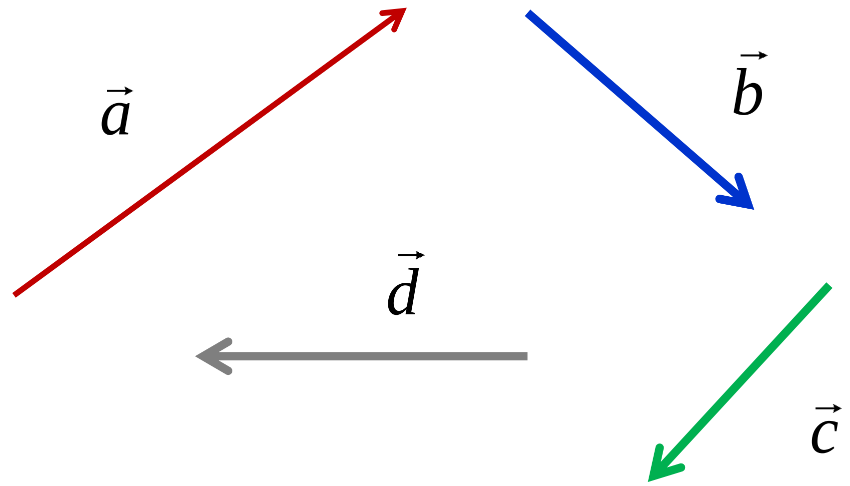
DELENIE DVOCH VEKTOROV NEEXISTUJE

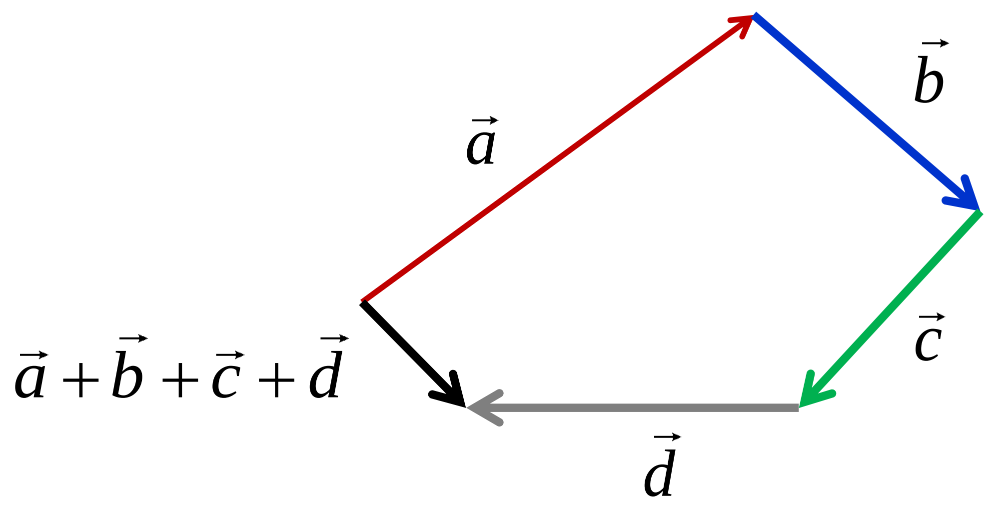


Obraz vektora:

c=a+b

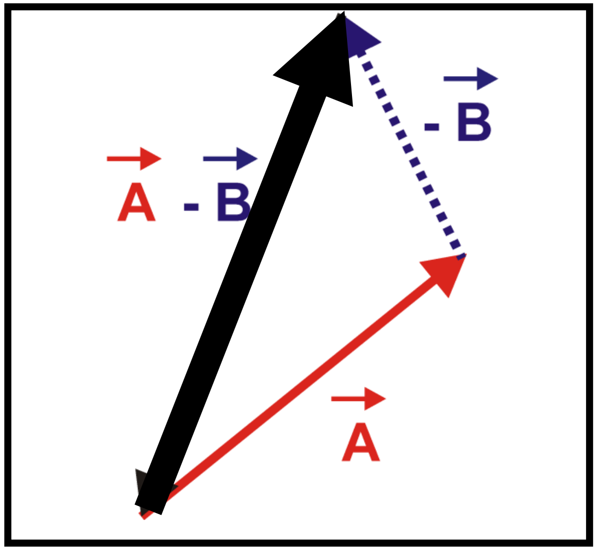
dostaneme tak, že ku koncovému bodu obrazu prvého vektora pripojíme v správnom smere obraz druhého vektora. Výsledný vektor je určený začiatočným bodom prvého vektora a koncovým bodom druhého vektora

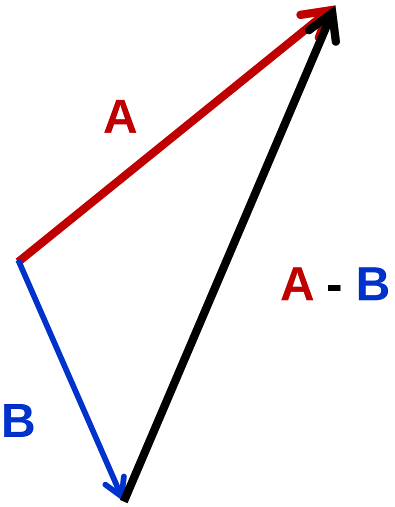

$\vec{a}$
$\vec{b}$
$\vec{d}$
$\vec{c}$


$\vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{c}$
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$
$\vec{d}$

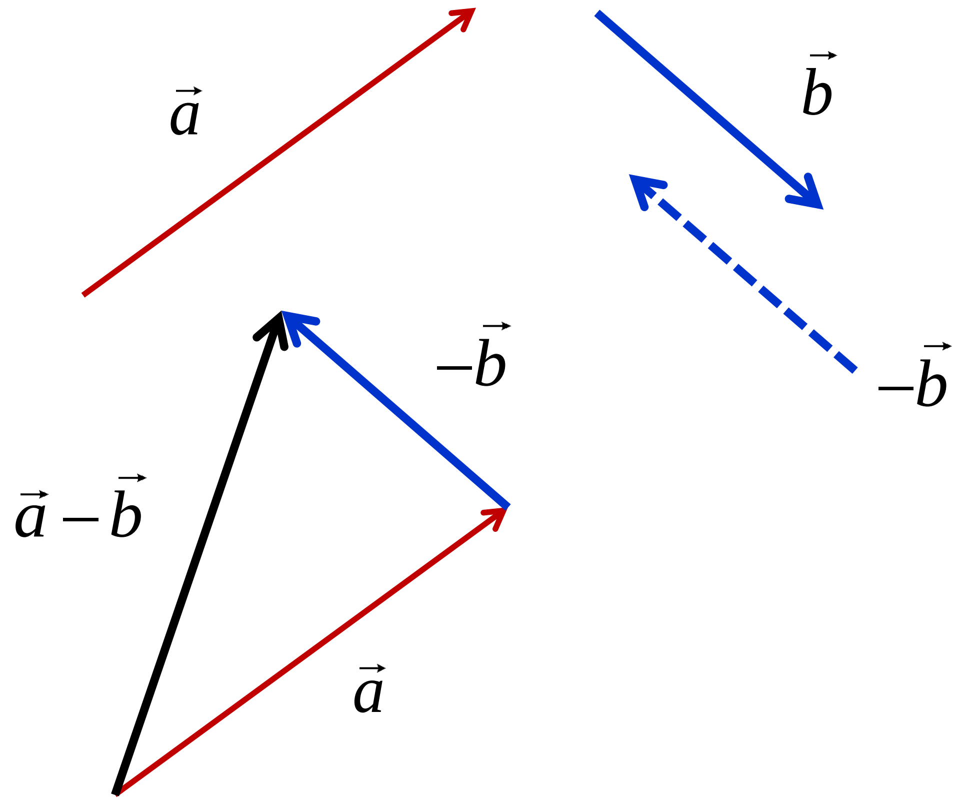
Odčítanie dvoch vektorov - graficky

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$$

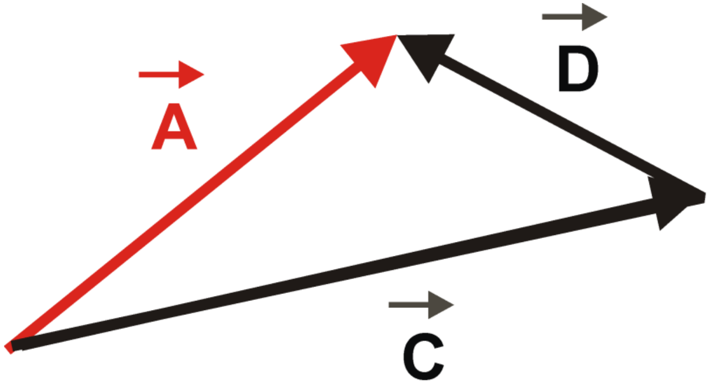




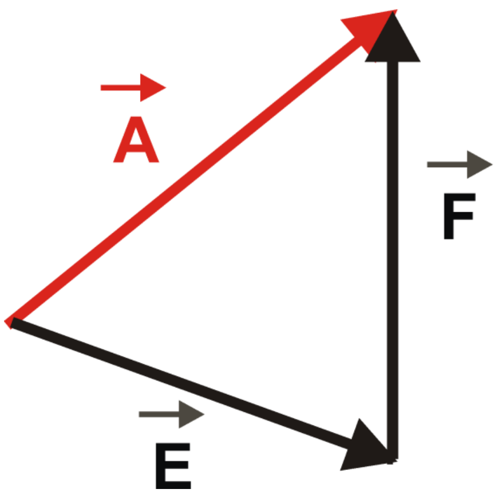
Obraz rozdielu je orientovaná úsečka vedená od koncového bodu menšiteľa **B** ku koncovému bodu menšenca **A**

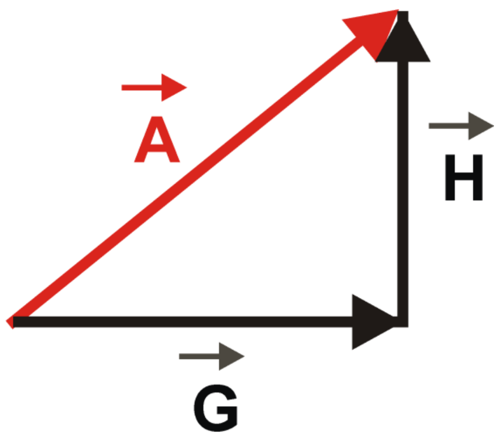

$\vec{a}$
$\vec{b}$
$-\vec{b}$
$-\vec{b}$
$\vec{a}-\vec{b}$
$\vec{a}$

Rozklad vektora
“opačná operácia“



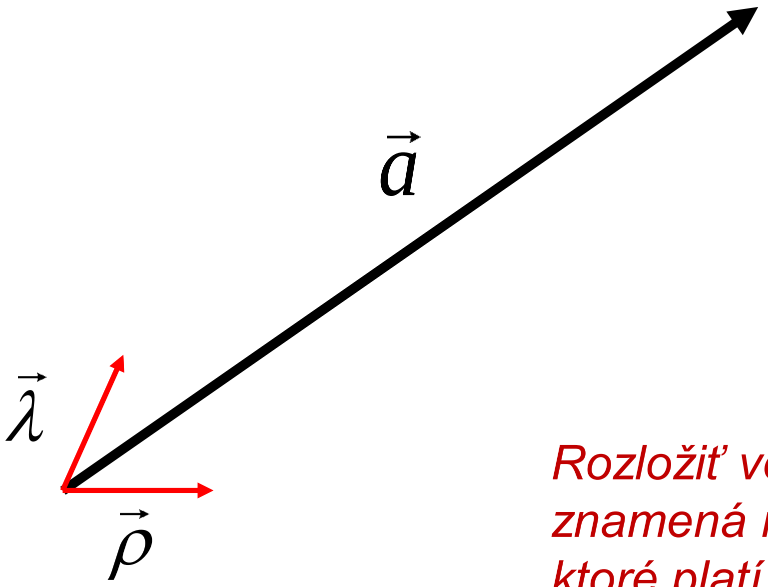
$$\vec{A} = \vec{C} + \vec{D} = \vec{E} + \vec{F} = \vec{G} + \vec{H}$$





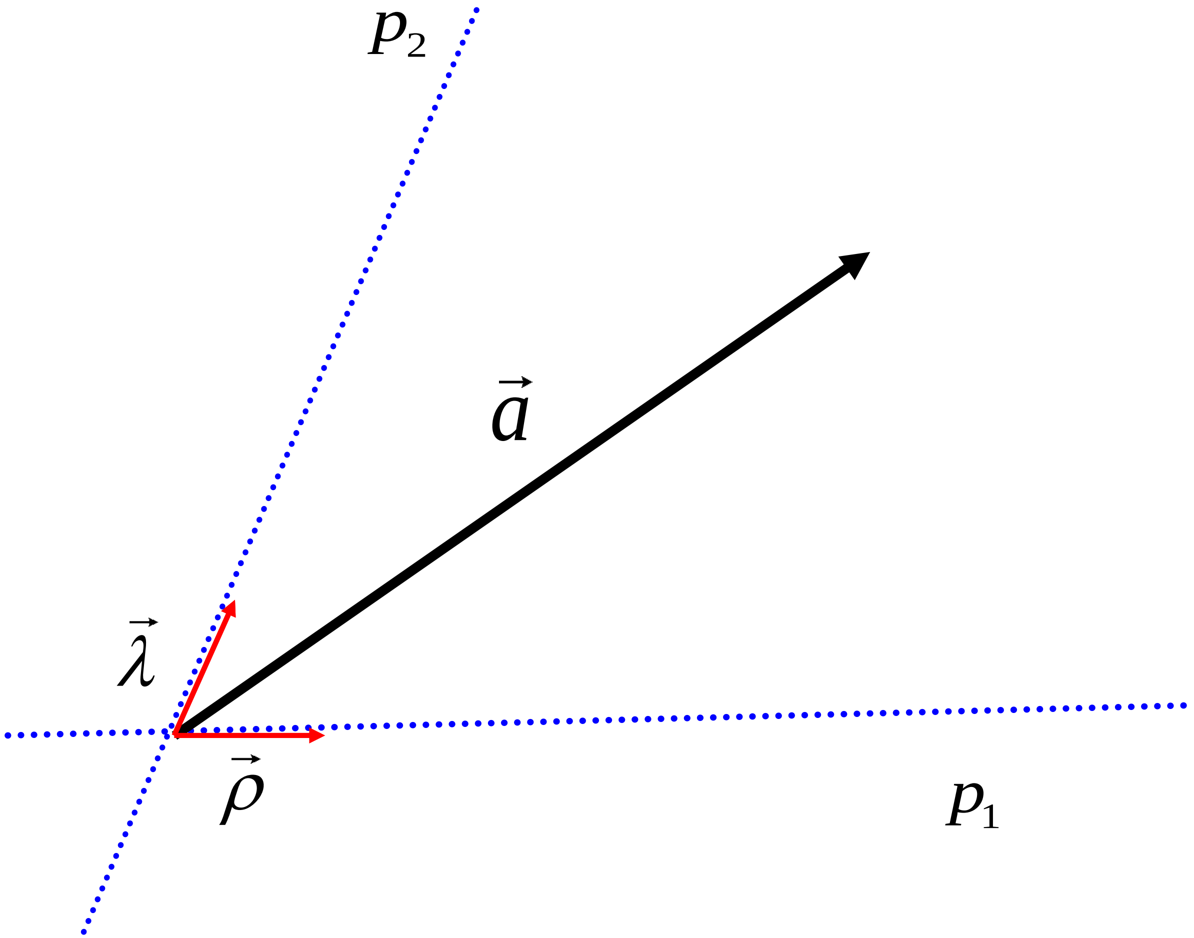
Rozklad vektora na zložky

Úloha: *Rozložte vektor na zložky, ktorých smery sú určené jednotkovými vektormi* $\vec{\lambda}, \vec{\rho}$

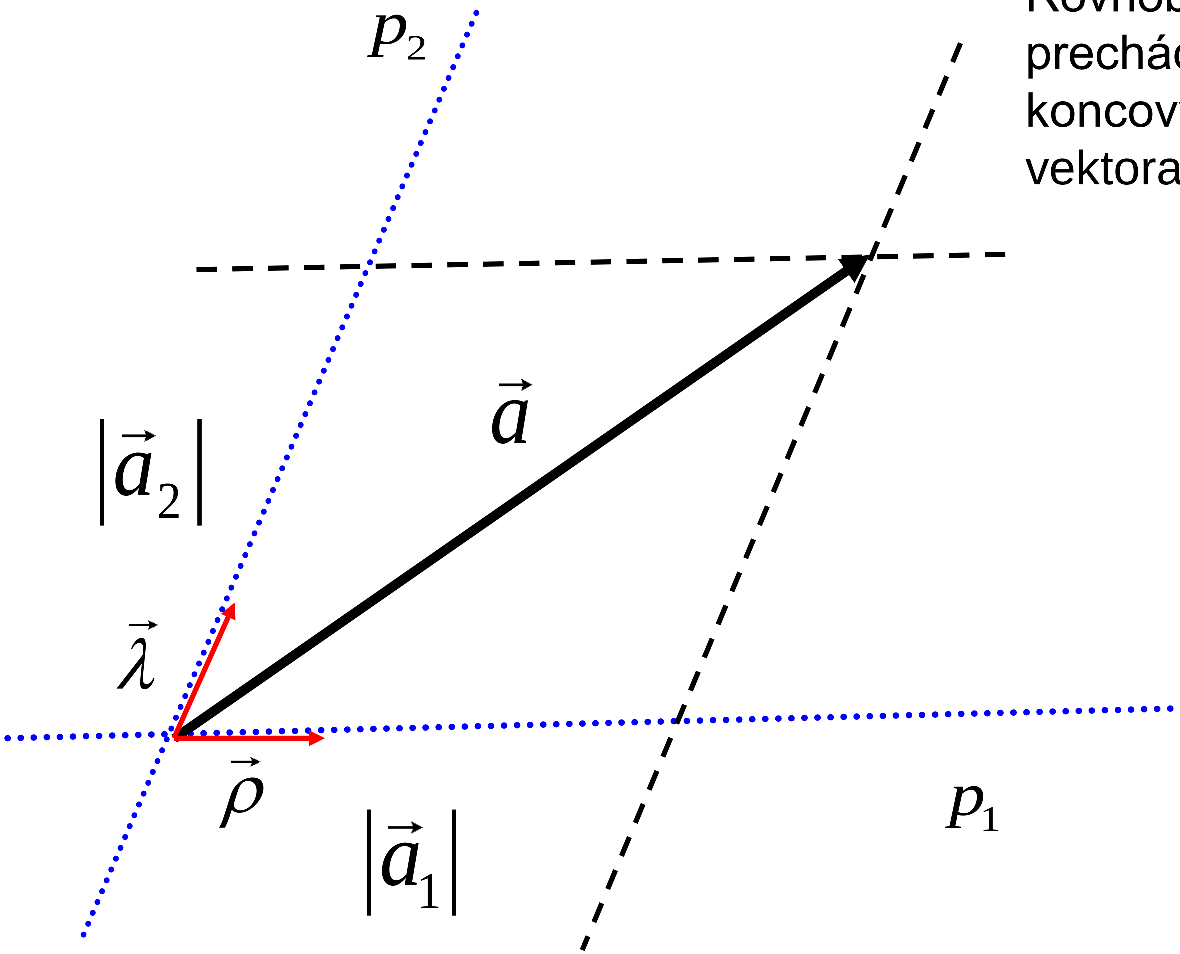


*Rozložiť vektor **a** na zložky **a1**, **a2** znamená nájsť také vektory, pre ktoré platí:* **a1+a2=a**

Rozklad vektora na zložky



Rozklad vektora na zložky

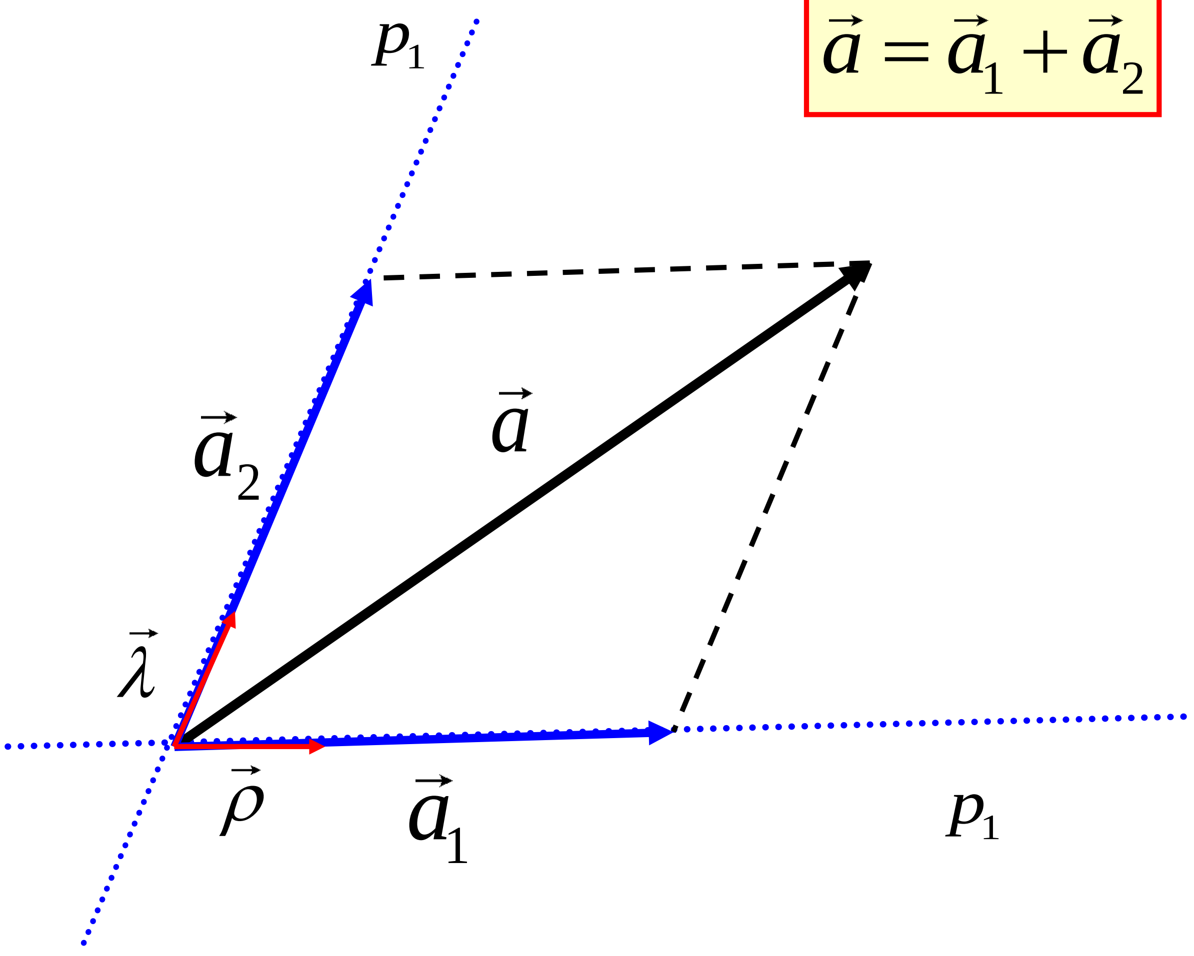


Rovnobežky prechádzajúce koncovým bodom vektora **a**

Dĺžky úsečiek zodpovedajú absolútnym hodnotám zložiek

Rozklad vektora na zložky

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2}$$



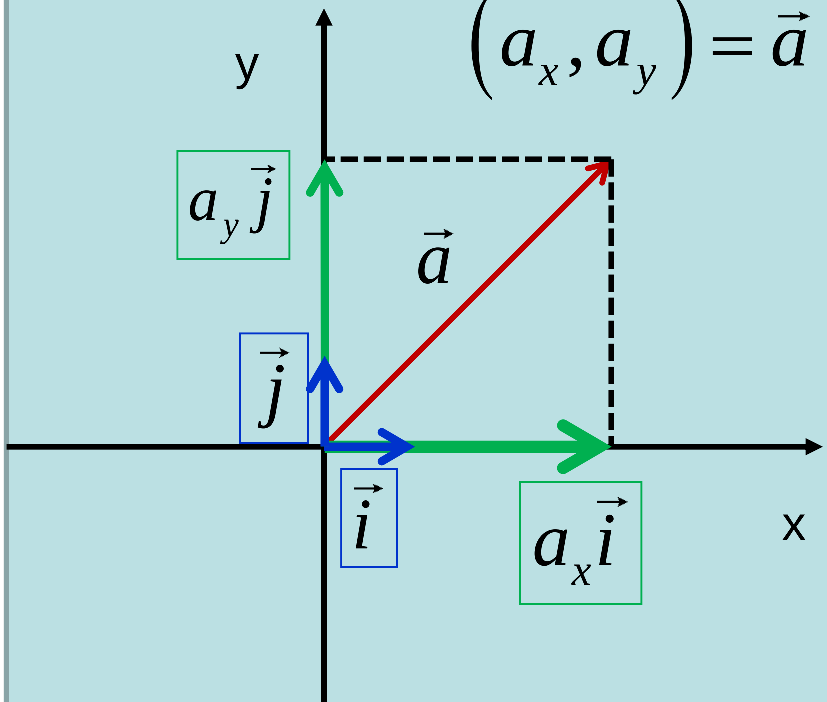
Jednotkové vektory – jediný význam, určujú smer

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ Určujú kladné smery súradnicových osí x, y, z

Každý vektor sa dá vyjadriť pomocou týchto kolmých jednotkových vektorov

Algebraická metóda

$$\left(a_x, a_y\right) = \vec{a}$$



Súradnice vektora **a**

$$\vec{a} = \boxed{a_x \vec{i}} + \boxed{a_y \vec{j}} = \left(\boxed{a_x}, \boxed{a_y} \right)$$

Zložky vektora **a**

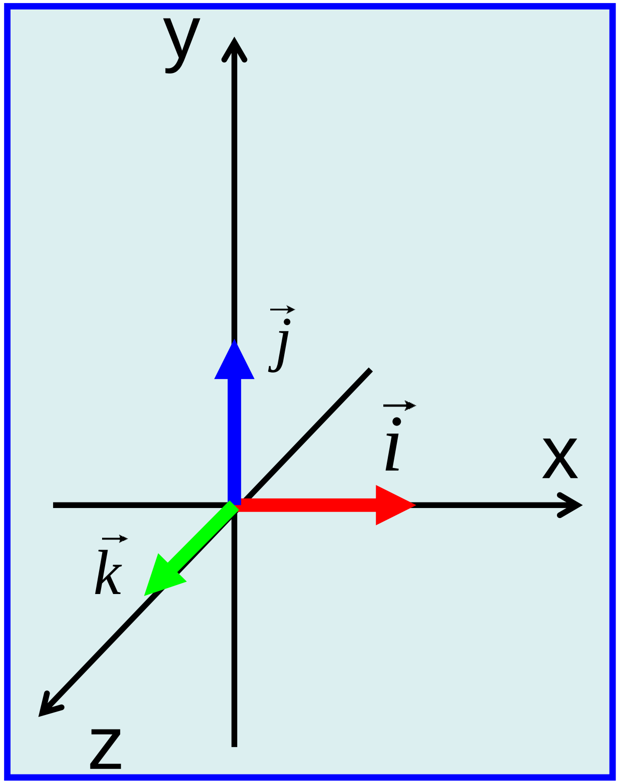
Pravouhlé priemety

$$a_x = a \cos \varphi$$

$$a_y = a \sin \varphi$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Kartézska súradnícová sústava



Bázové vektory

$\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$

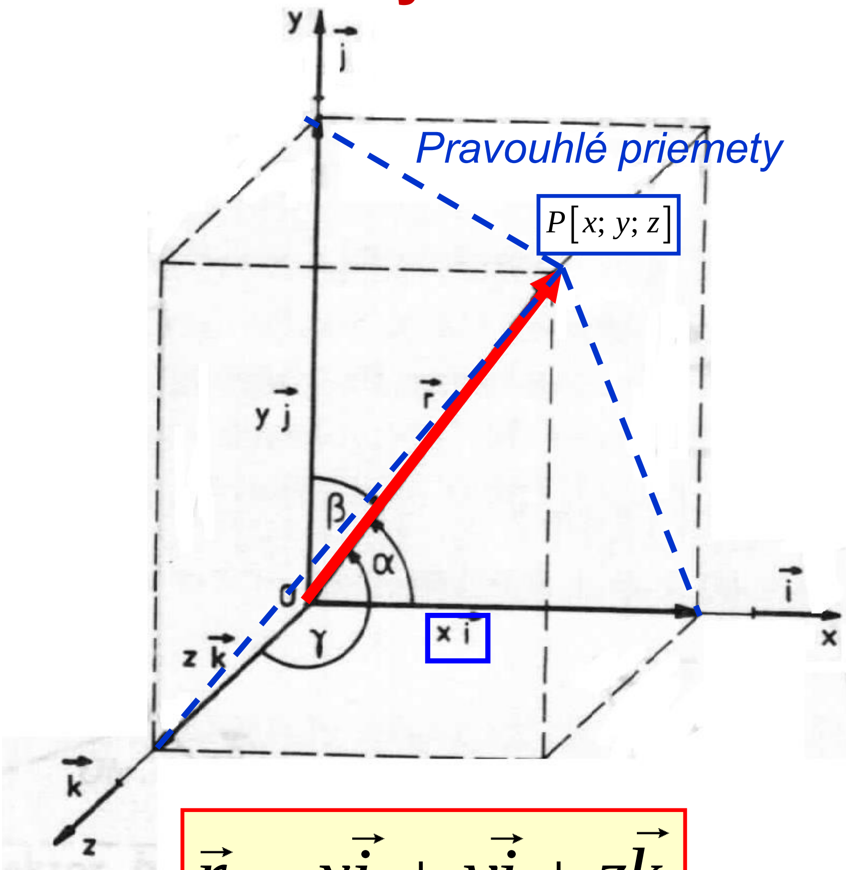
jednotkové vektory určujúce kladné smery osí x, y, z.

Orientácia súradnicových osí je volená tak, aby tvorili pravotočivú sústavu (palec, ukazovák prostredník pravej ruky)

Kartézska súradnícová sústava je tvorená pravotočivou sústavou súradníc, určenou navzájom kolmými jednotkovými vektormi.

Rozklad vektora na zložky

Polohový vektor



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pomocou bázových vektorov vieme napísať akýkoľvek vektor ako LK

$$(x;\ y;\ z)$$

Súradnice vektora

Priemety (zložky) vektora

$$x\vec{i}\,,\quad y\vec{j}\,,\quad z\vec{k}$$

Vo všeobecnom prípade sa každý vektor dá rozložiť na tri nekomplanárne zložky (ktoré neležia v jednej rovine).

Algebraická metóda sčítavania a odčítavania vektorov

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = \left(b_x; b_y; b_z\right)$$

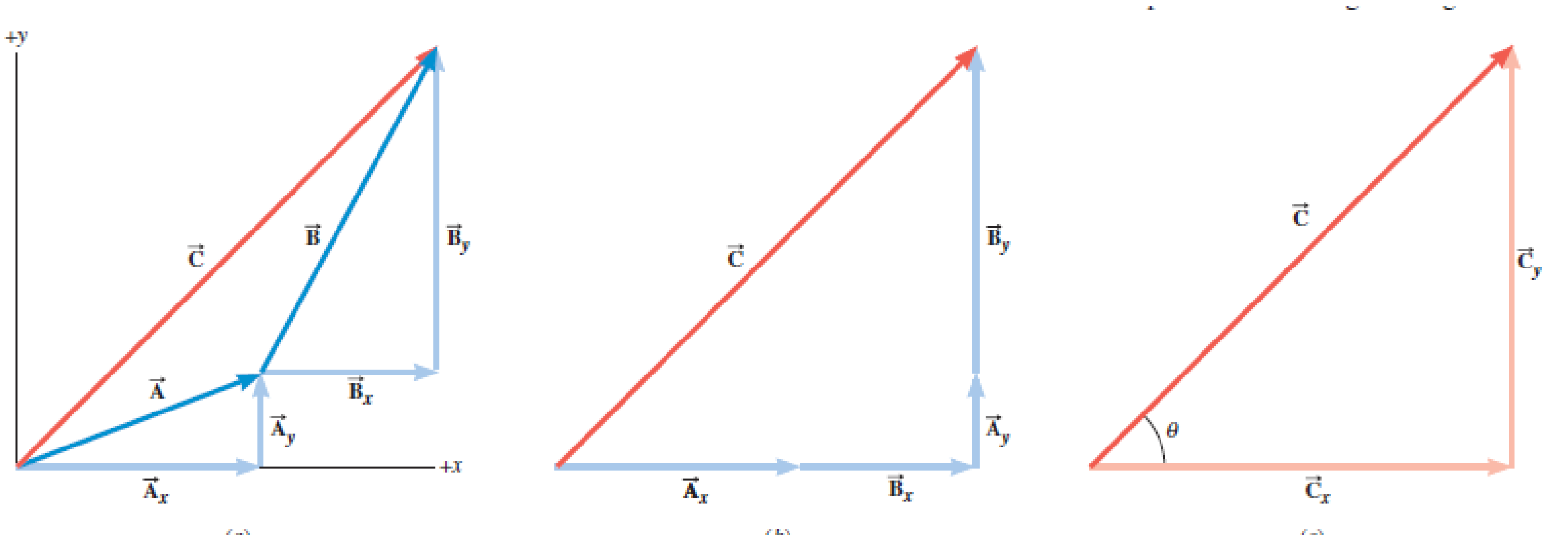
Sčítavanie, odčítavanie vektorov.

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_x \pm b_x\right)\vec{i} + \left(a_y \pm b_y\right)\vec{j} + \left(a_z \pm b_z\right)\vec{k}$$

$$= (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

Násobenie vektorov skalárom s.

$$s\vec{b} = s\left(b_x\right)\vec{i} + s\left(b_y\right)\vec{j} + s\left(b_z\right)\vec{k} = (sb_x, sb_y, sb_z)$$



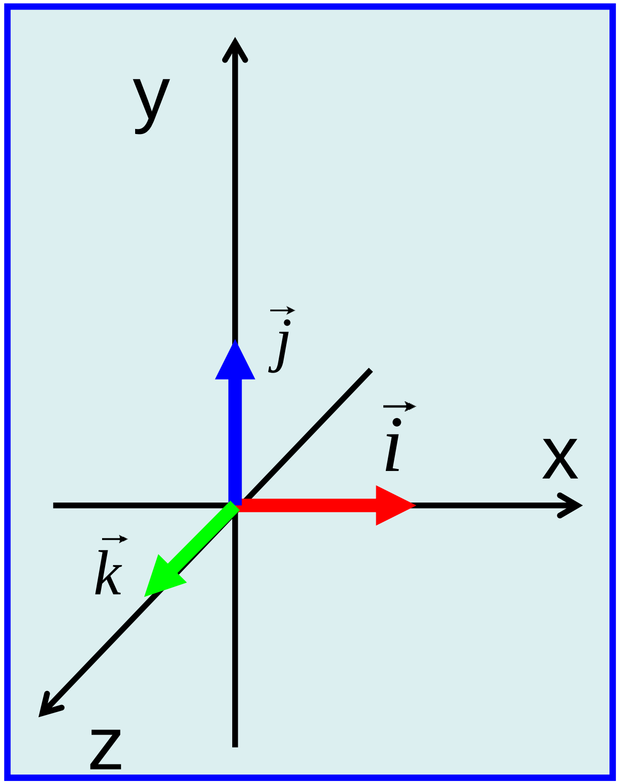
Ide v podstate o sčítavanie po zložkách

Skalárny súčin - vlastnosti

$$c = \vec{a} \bullet \vec{b}$$

- 1, skalár
- 2, s veľkosťou $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$

$$\boxed{\varphi \in \langle 0, \pi \rangle}$$



Skalárny súčin

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

$$\vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{j} \bullet \vec{i} = 0$$

$$\vec{i} \bullet \vec{k} = \vec{k} \bullet \vec{i} = 0$$

$$\vec{j} \bullet \vec{k} = \vec{k} \bullet \vec{j} = 0$$

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = \vec{j} \bullet \vec{j} = \vec{k} \bullet \vec{k} = 1$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \bullet \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right)$$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Využitie skalárneho súčinu

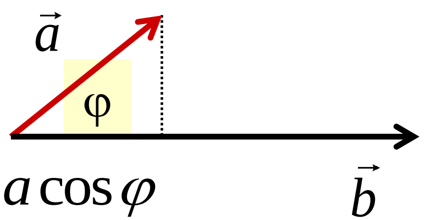
- Uhol medzi vektormi

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{a\,b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{a\,b}$$

Ak sú vektory na seba kolmé, potom ich skalárny súčin je nulový

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}}$$

- Priemet vektora do smeru iného vektora



$$a\cos\varphi = a\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{a\,b}$$

$$a_b = \vec{a} \bullet \frac{\vec{b}}{b}$$

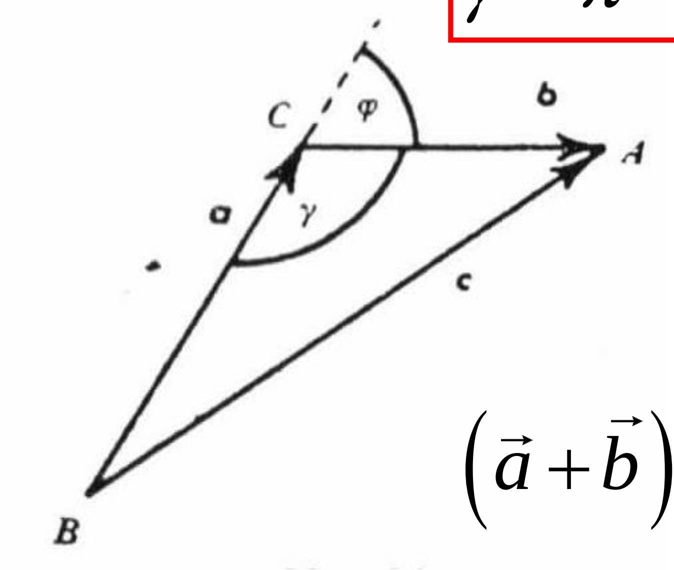
Veľkosť vektora:

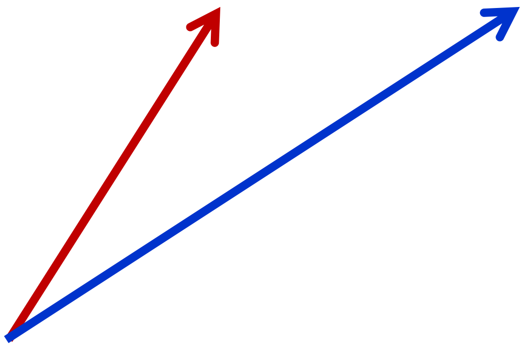
$$a^2 = \vec{a} \bullet \vec{a}$$

Príklad

- Odvoďte kosínusovú vetu pre všeobecný trojuholník vektorovou metódou

$$\boxed{\gamma = \pi - \varphi}$$



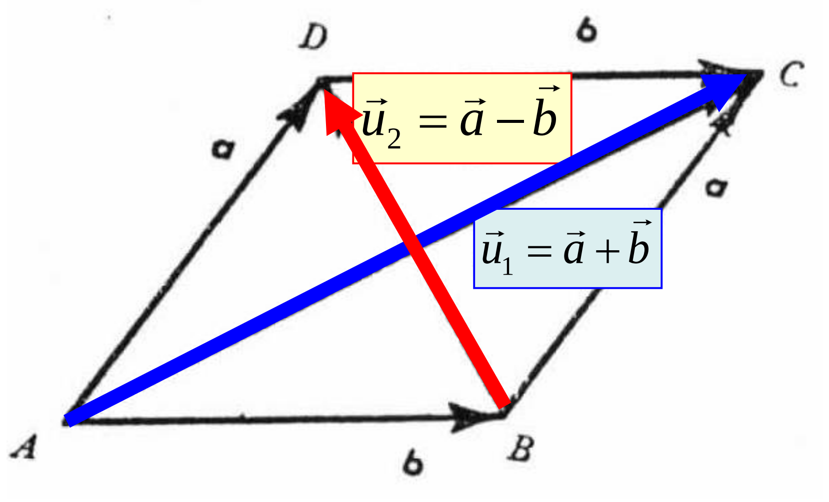


$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = c^2 \qquad \gamma = \pi - \varphi$$

$$\boxed{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma = c^2}$$

Príklad

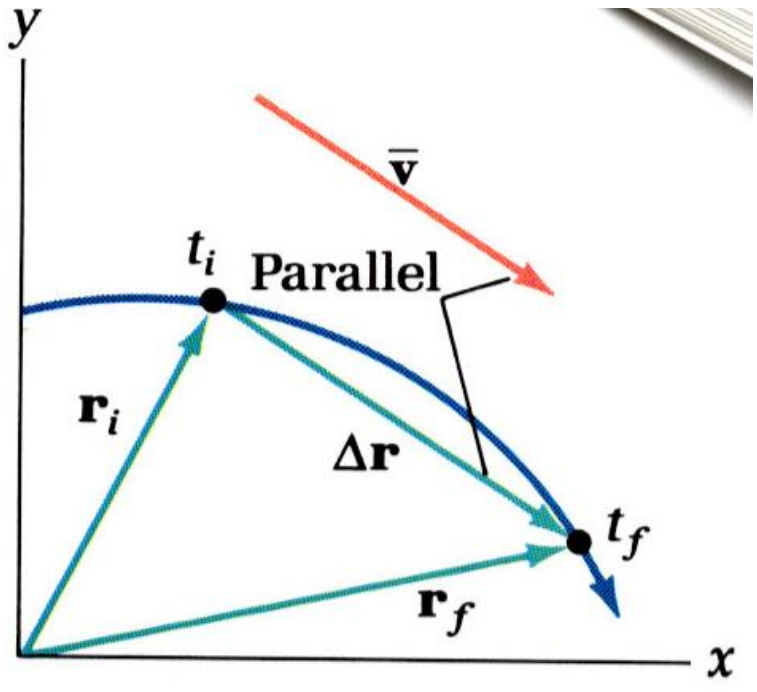
- Dokážte, že uhlopriečky rovnostraného rovnobežníka sú navzájom kolmé



$$\vec{u}_1 = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{a} - \vec{b}$$

Pohyb vo viacerých rozmeroch



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}_i &= x_i\vec{i} + y_i\vec{j}\\ \vec{r}_f &= x_f\vec{i} + y_f\vec{j}\end{aligned}}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

$$\Delta\vec{r} = \left[x_f - x_i\right]\vec{i} + \left[y_f - y_i\right]\vec{j} =$$

$$= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}$$

Priemerná rýchlosť

$$\boxed{\langle\vec{v}\rangle} = \frac{\boxed{\Delta\vec{r}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

Okamžitá rýchlosť

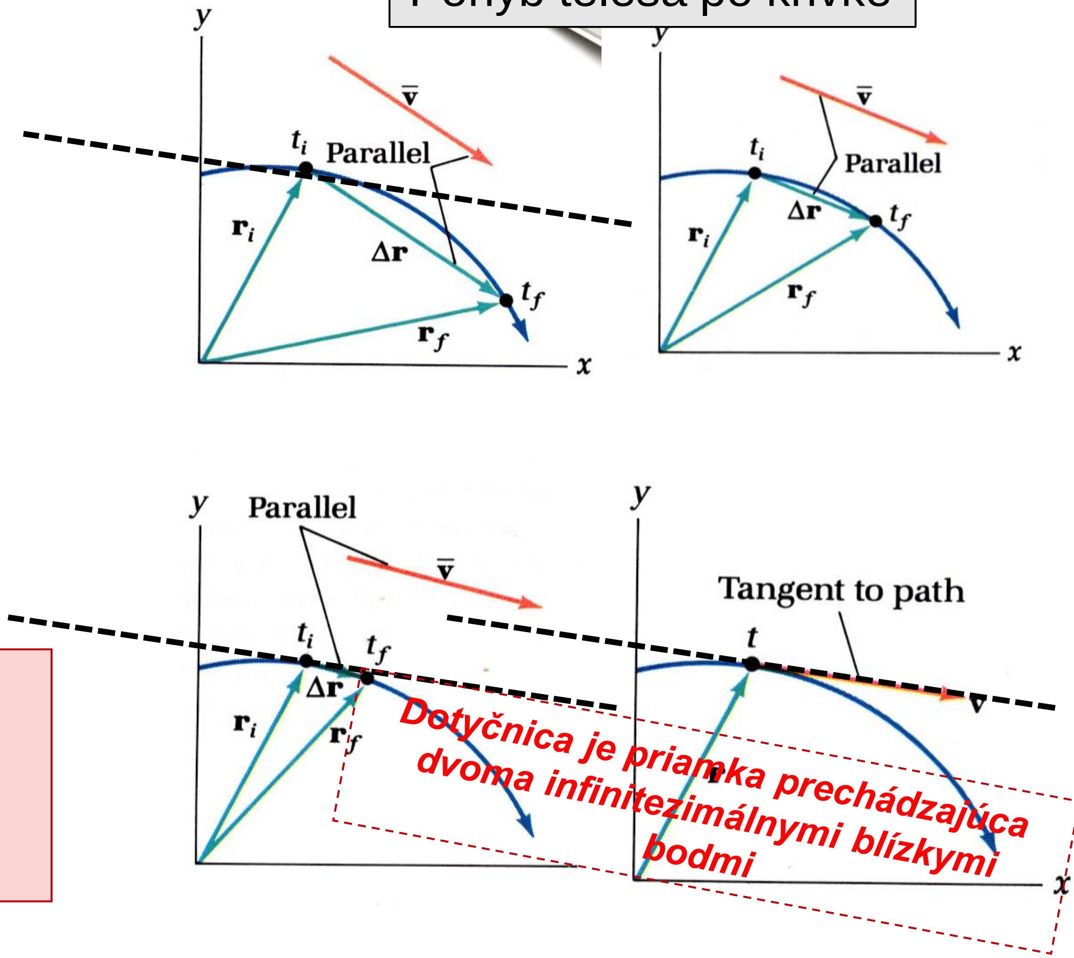
SMER VEKTORA

$$\boxed{\vec{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boxed{\Delta \vec{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Δr sa **postupne skláňa** ku smeru dotyčnice k trajektórie v bode $\mathbf{r}_i$ t.j. priemerná rýchlosť sa blíži k rýchlosti okamžitej.

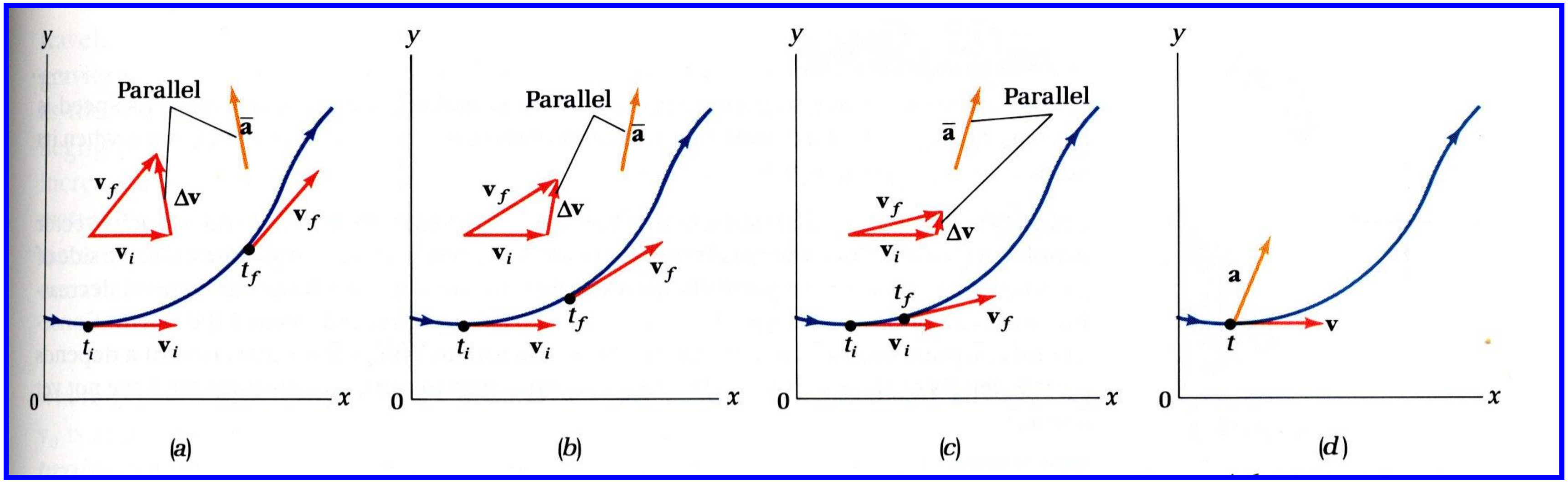
Pohyb telesa po krivke



Okamžitá rýchlosť má smer rovnobežný s trajektóriou, t.j. je dotyčnicou k trajektórie.

$$\boxed{\vec{a}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boxed{\Delta\vec{v}}}{\Delta t}$$

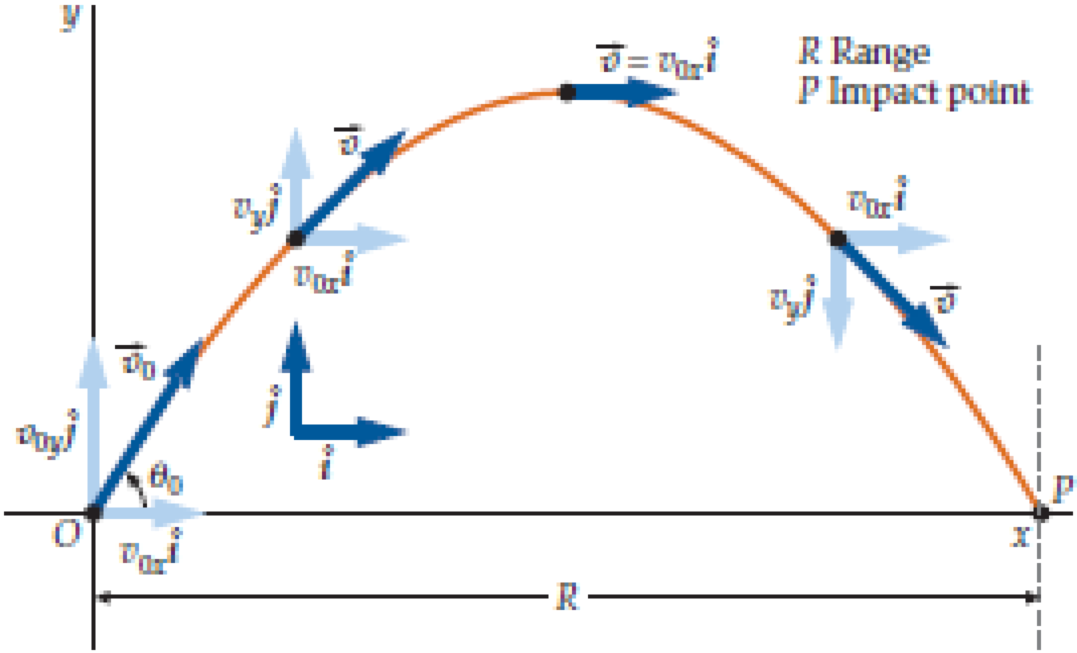
Nenulové zrýchlenie signalizuje, že sa mení veľkosť alebo smer vektora rýchlosti



Zrýchlenie telesa <u>nie je</u> vo všeobecnosti dotyčnicou k trajektórii. Zrýchlenie je paralelné k Δv.

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

Šikmý vrh

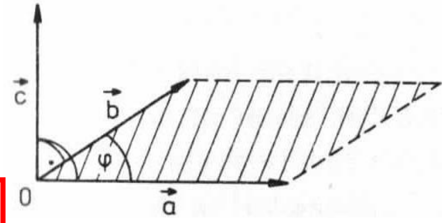


Vektor rýchlosti má vždy smer dotyčnice na trajektóriu

Vektorový súčin - vlastnosti

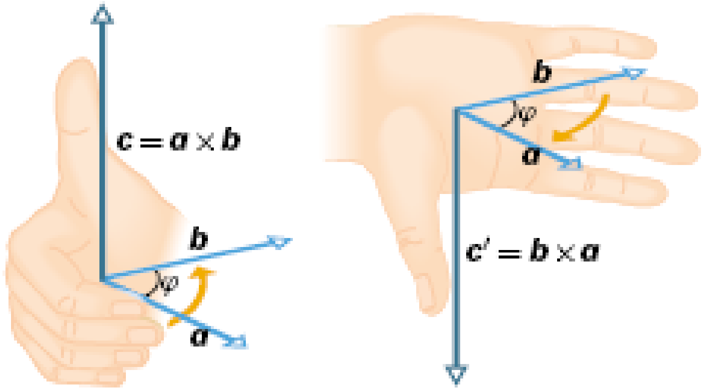
1, má **veľkosť** číselne sa rovnajúcu plošnému obsahu rovnobežníka zostrojeného nad vektormi **a** a **b,** t.j.

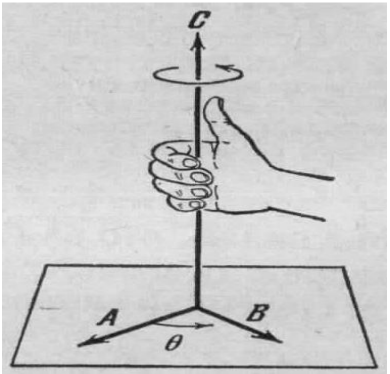
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$$



2, je kolmý na rovinu tohto rovnobežníka

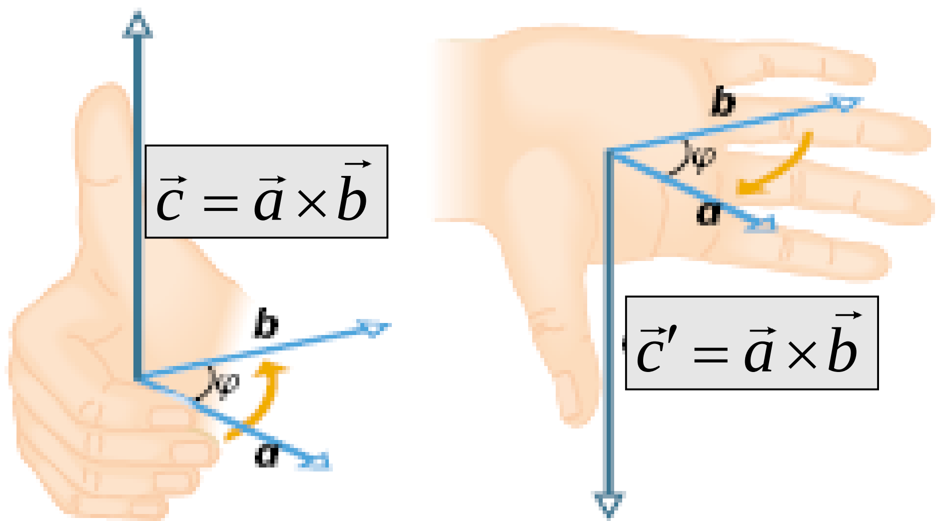
3, je orientovaný podľa pravidla pravej ruky



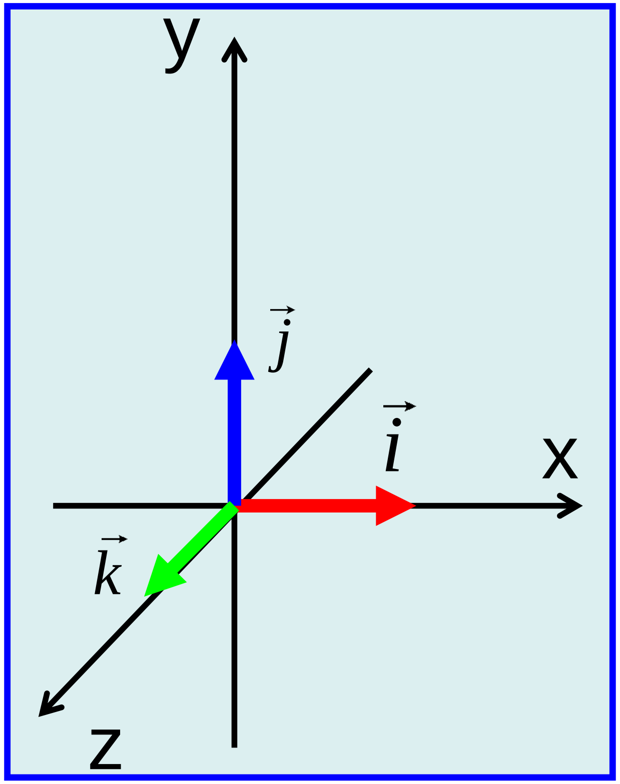


Vektorový súčin

NEplatí komutatívnosť



$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}}$$

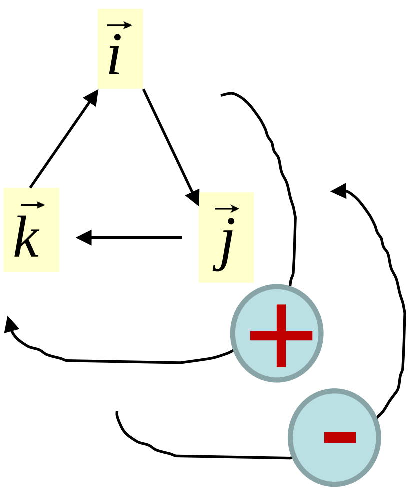


$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$$

$$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} \qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$$

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$



$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$$

$$=\vec{i}\left(a_yb_z-a_zb_y\right)-\vec{j}\left(a_xb_z-a_zb_x\right)+\vec{k}\left(a_xb_y-a_yb_x\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$