Obsah

Úvod **v**

Technické poznámky **vii**

1 Derivácie **3**
1.1 Derivácia funkcie, jej fyzikálny a geometrický význam. 3
1.2 Pravidlá na výpočet derivácií. 5
1.3 Využitie derivácii v matematike a fyzike. 8
1.3.1 Diferenciál funkcie, jeho význam a použitie. 8
1.3.2 Hľadanie extrémov funkcií. 9
1.3.3 Kvalitatívna analýza pohybov 12
1.3.4 Využitie derivácii v kinematike (výpočet rýchlosti a zrýchlení) 12
1.3.5 Derivácia vektorov 15
1.4 Cvičenia 19

2 Integrály **21**
2.1 Výpočet a metódy integrovania. 22
2.1.1 Integrovanie úpravami 23
2.1.2 Integrovanie per partes 23
2.1.3 Integrovanie substitúciou 24
2.2 Využitie určitých integrálov vo fyzike a matematike 24
2.3 Cvičenia 30

3 Matice **33**
3.1 Vlastnosti matíc a determinanty 33
3.2 Využitie matíc 34
3.3 Cvičenia 39

4 Nekonečné rady **41**
4.1 Mocninné rady 41
4.2 Fourierove rady 45
4.3 Cvičenia 48

5 Diferenciálne rovnice-základný jazyk fyziky 49
5.1 Diferenciálne rovnice prvého rádu 50
5.1.1 Najjednoduchšie typy 50
5.1.2 Diferenciálne rovnice so separovanými alebo separovateľnými premennými 52
5.2 Lineárne diferenciálne rovnice 59
5.2.1 Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu 60
5.2.2 Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov 63
5.2.3 Lineárne nehomogénne DR. s konštantnými koeficientami 71
5.2.4 Metódy hľadania partikulárnych riešení 72
5.3 Špeciálne typy diferenciálnych rovníc 95
5.3.1 Diferenciálne rovnice typu m$\ddot{x}$=F(t) 95
5.3.2 Diferenciálne rovnice typu m$\ddot{x}$=F(x) 96
5.4 Ako riešiť DR, ktoré sa nedajú riešit explicitne ? 105
5.4.1 Kvalitatívna metóda 105
5.4.2 Riešenie DR rozvojom do radov 106
5.4.3 Numerická metóda 110
5.5 Aplikácie diferenciálnych rovníc. 113
5.5.1 Využitie DR na hľadanie tvarov kriviek. 113
5.5.2 Úlohy o cykloidách 116
5.5.3 Model šírenia reklamy 119
5.5.4 Model šírenia epidémie 120
5.5.5 Chemické reakcie. 123
5.5.6 Model dravec a obeť. 124
5.6 Cvičenia 125

6 Súradnicové systémy 129
6.1 Polárna súradnicová sústava. 130
6.2 Sférická súradnicová sústava 133
6.3 Cylindrická súradnicová sústava 134
6.4 Cvičenia 135

7 Krivkové a viacrozmerné integrály 137
7.1 Krivkové integrály 138
7.2 Viacrozmerné integrály 143
7.3 Cvičenia 154

8 Základy vektorovej analýzy 157
8.1 Charakteristiky skalárnych a vektorových polí. 160
8.1.1 Ekviskalárne plochy (čiary) a gradienty skalárnych polí . 160
8.1.2 Divergencia vektorových polí 167
8.1.3 Rotácia vektorových polí 174

8.1.4 Divergencie a rotácie v sférických a cylindrických sústavách. 182
8.2 Cvičenia 185

9 Vlnová rovnica 187
9.1 Odvodenie vlnovej rovnice 187
9.2 Použitie vlnovej rovnice 188
9.2.1 Vlna v strune 188
9.2.2 Zvuková vlna 189
9.2.3 Vlna v pružnej tyči 191
9.3 Metóda separácie premenných. 192
9.4 Cvičenie 195

Úvod

V prvých ročníkoch štúdia fyziky na FMFI UK vzniká zvláštna situácia, kedy prednášky z fyziky predbiehajú svojimi potrebami matematický aparát prednášok z matematiky. Záujmu o zvládnutie matematických metód totiž často bráni značne sformalizovaný a lakonický jazyk väčšiny matematických učebníc a monografií. Ich štýl: definícia, veta, dôkaz vytvára u nešpecialistov (nehovoriac o poslucháčoch prvého ročníka) bariéru neprístupnosti a nezrozumiteľnosti. Cieľom publikácie je odstrániť, alebo aspoň zmierniť tento problém a pomôcť študentom osvojiť si matematematický aparát nevyhnutný na zvládnutie základného kurzu fyziky. Nekládli sme si za cieľ suplovať matematiku a dôkladne vybudovať jej aparát, ale snažili sme sa ukázať recepty, ako postupovať a riešiť klasické problémy z fyziky. V snahe nekomplikovať výklad sme volili menej presný, ale o to jednoduchší jazyk. Matematické vety sa nedokazujú, ale ich použitie sa interpretuje na riešení problémov s fyzikálnou tématikou. Príklady sú väčšinou vybrané z mechaniky, ktorá sa preberá ako prvá a študentom je najbližšia. Skriptá obsahujú okolo 100 riešených úloh, pričom na konci kapitol nájde čitateľ úlohy na precvičenie. Publikácia je vhodná nielen pre študentov vysokých škôl, ale aj absolventov fakulty, ktorí si potrebujú encyklopedickou formou zopakovať niektoré matematické metódy. Môže byť vhodnou pomôckou pre učiteľov stredných škôl pri práci s talentovanou mládežou.

Práca je rozdelená do deviatich kapitol a svojim rozsahom pokrýva sylaby prednášky z predmetu Matematické metódy vo fyzike. Vznikla na základe pedagogických skúseností získaných po prvom roku prednášania tohto predmetu. **Prvé dve kapitoly** sú venované deriváciam a integrálom. Predpokladá sa istá znalosť týchto pojmov zo strednej školy a preto je dôraz kladený najmä na fyzikálne aplikácie. **V tretej kapitole** "Matice" sa oboznámime so spôsobom riešenia systémov lineárnych rovníc ako aj výpočtom momentu zotrvačnosti vzhľadom na ľubovoľne orientované osi otáčania. V **štvrtej kapitole** sa stretneme s nekonečnými radmi (fourierovými a potenčnými), ktoré umožňujú rozkladať funkcie a tým uľahčujú teoretickú analýzu mnohých fyzikálnych javov. Najobsiahlejšia časť skrípt-**piata kapitola** je venovaná problematike diferenciálnych rovníc, ktoré môžeme považovať za jazyk fyziky. Zameriavame sa predovšetkým na lineárne rovnice, pretože väčšina fyzikálnych zákonov má charakter lineárnych rovníc. Schopnosť riešiť takéto rovnice by mala patriť medzi

základnú výbavu začínajúceho fyzika. V tejto kapitole nájdeme aj návody ako postupovať v prípadoch, keď rovnice nevieme riešiť explicitne. Pre zaujímavosť a lepšiu motiváciu sa v tejto kapitole nachádzajú aj matematické matematické modely (model šírenia epidémie, reklamy, ekologický model dravec-líška, resp. chemickými reakciami). **Šiesta kapitola** je venovaná súradnicovým systémom. Čitateľ sa tu zoznámi so spôsobom hľadania bázových vektorov, plošných a objemových elementov a ich aplikáciami pri riešení fyzikálnych úloh.V **siedmej kapitole** - "Krivkové a viacrozmerné integrály" sa zoznámime s výpočtom ťažísk, momentov zotrvačnosti, potenciálnej energie a práce. Ide o bežné veličiny, s ktorými sa v mechanike pracuje v prvom semestri. **Kapitola osem**-"Základy vektorovej analýzy" je venovaná parciálnym deriváciam a najmä pochopeniu pojmov gradient, rotácia a divergencia. Pri výklade je použitá hydrodynamická analógia, ktorá umožňuje istú názornosť a lepšie pochopenie spomínaných abstraktných pojmov. V kapitole je odvodená Gaussova a Stokesova veta a sú tu uvedené ich aplikácie. Zároveň sa zoznámime s problematikou konzervatívnych polí a naučíme sa ich rozlišovať od polí nekonzervatívnych. **Deviata kapitola** je venovaná vlnovej rovnici, s ktorou sa študenti stretávajú už v základnom kurze "Mechanika a molekulová fyzika". Čitateľ sa zoznámi s Fourierovou metódou riešienia parciálnych diferenciálnych rovníc.

Veríme, že skriptá nebudú len vhodným študijným materiálom na úspešné absolvovanie skúšky z predmetu matematické metódy z fyziky, ale najmä pomôžu študentom prvého ročníka pedagogického aj vedeckého štúdia osvojiť si matematický aparát nevyhnutný na zvládnutie základného kurzu fyziky.

Touto cestou by sme sa radi poďakovali prof. Pišútovi a doc. Koubkovi za vytvorenie priaznivých pracovných podmienok, bez ktorých by táto publikácia nevznikla. Zároveň ďakujeme Dr. Košinárovej, za spripomienkovanie práce a nové námety. Jej bohaté, niekoľkoročné pedagogické skúsenosti s vyučovaním rovnomenného predmetu boli pre mňa poučné a inšpirujúce. Chceme poďakovať aj študentom Stanislavovi Komorovskému a Petrovi Pažákovi za posúdenie týchto skrípt z pozície adresáta-študenta, ktorým je text určený. Ich kritické pripomienky a postrehy určite prispeli k väčšej zrozumiteľnosti niektorých kapitol.

Autori

Technické poznámky

- Hviezdička v cvičeniach nevyjadruje obtiažnosť úlohy, ale typ úlohy. Príklady s fyzikálnou tematikou sú označované hviezdičkami, príklady čisto matematického charakteru sú bez hviezdičky.
- Každé riešenie príkladu končí znakom kosoštvorca, a preto nasledujúci text sa už priamo netýka riešenia daného príkladu.
- Aby vynikla podstata preberanej látky, na niektorých miestach porušujeme rozmernosť jednotiek. V mysli si treba príslušné jednotky doplniť, napr. výraz pre silu

  $$F(t) = 2t^2 - t^3$$

  treba chápať tak, že ak dosadíme do vzťahu jednotky SI, potom výsledná sila bude v základných jednotkách $[kgms^{-2}] = [N]$. Korektne zapísaný výraz by mal podobu:

  $$F(t) = 2\,\mathrm{N.s^{-2}}\,t^2 - 1\,\mathrm{N.s^{-3}}\,t^3$$

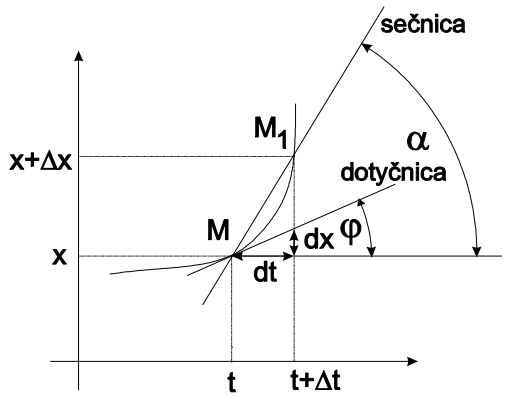
chapter:1,page:1

Kapitola 1

Derivácie

1.1 Derivácia funkcie, jej fyzikálny a geometrický význam.

Základy diferenciálneho počtu položili koncom 17. storočia anglický matematik a fyzik I. Newton a nemecký filozof a matematik Leibnitz. Vychádzali pritom z úlohy o dotyčniciach. Kým Leibnitzove idey mali skôr geometrický a filozofický charakter, u Newtona vystupuje do popredia pohyb prebiehajúci v čase. Newtonova metóda je pre fyzikov bližšia a preto si ju objasníme na nasledovnom príklade: Predpokladajme, že teleso sa pohybuje po priamke. Závislosť jeho polohy $x(t)$ od času t je znázornená na obr. I.1



obr. I.1

Zvoľme si dva časové okamihy t , $t + \Delta t$ a vypočítajme jeho priemernú rýchlosť $\overline{v}$:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{1.1}$$

ktorá zodpovedá smernici sečnice MM_1(obr. I.1). Keď časový interval zmenšujeme nad všetky medze $\Delta t \to 0$, sečnica sa začne približovať k dotyčnici

$tg\alpha \to tg\varphi$[1], čím dostávame presnejšie určenie rýchlosti v bode M tzv. okamžitú rýchlosť.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Okamžitá rýchlosť je teda derivácia dráhy podľa času, t.j. limita, ku ktorej smeruje priemerná rýchlosť pri nekonečnom zmenšovaní časového intervalu. Geometricky zodpovedá smernici dotyčnice v danom bode. Predchádzajúce úvahy možno aplikovať aj na iné fyzikálne veličiny, pričom premenná nemusí byť len čas[2]. Napríklad:

- Ak chceme zvýšiť teplotu telesa s hmotnosťou m o $\Delta\tau$ stupňov, musíme mu dodať určité teplo ΔQ, ktoré je vo všeobecnom prípade nelineárnou funkciou teploty $Q(\tau)$.:

  $$\Delta Q = Q(\tau + \Delta\tau) - Q(\tau)$$

  Pomer

  $$\overline{c} = \frac{\Delta Q}{\Delta\tau} = \frac{Q(\tau + \Delta\tau) - Q(\tau)}{\Delta\tau}$$

  je tzv. priemerná tepelná kapacita v teplotnom intervale $\langle \tau, \tau + \Delta\tau \rangle$ a rýchlosť, akou sa mení teplota telesa τ dodávaním tepelnej energie ΔQ určuje mernú tepelnú kapacitu:

  $$c = \lim_{\Delta\tau \to 0} \overline{c} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{Q(\tau + \Delta t) - Q(\tau)}{\Delta\tau} = \frac{dQ}{d\tau}$$

- Ak skúmame v nehomogénnom telese veľmi malý objem ΔV, s hmotnosťou Δm, priemerná hustota príslušného objemového elementu je podľa definície $\overline{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$, pričom hustota v danom bode telesa je daná

  $$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \overline{\rho} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{m(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - m(\vec{r})}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

Derivácia je teda základným pojmom, s ktorým sa budeme vo fyzike často stretávať. Našťastie ju dokážeme mnohokrát veľmi jednoducho vypočítať priamo z definície:

[1] Všimnite si geometrický význam $tg\alpha$, $tg\varphi$. Prvý výraz zodpovedá smernici sečnice, druhý smernici dotyčnice.

[2] Býva zvykom časové derivácie označovať bodkou napr. $\dot{y}(t)$ a derivácie od premennej x čiarkou $y'(x)$.

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ Nájdite (priamo z definície) rýchlosť telesa, ktoré sa pohybuje s rovnomerným zrýchlením a, s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Teleso za čas t prejde dráhu, ktorá sa rovná $s = \frac{1}{2}at^2$.

Riešenie: Podľa definície rýchlosti:

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} a \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} a \left[2t + \Delta t\right] = at \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

1.2 Pravidlá na výpočet derivácií.

Bolo by veľmi nepraktické vždy počítať deriváciu funkcie priamo z limity. Z tohto dôvodu sa v ďalšom výklade pokúsime nájsť všeobecné pravidlá, ktoré nám proces derivovania značne urýchlia:

Predpokladajme, že $u(x)$ a $v(x)$ sú funkcie, ktoré majú v určitom intervale (a,b) derivácie $u'(x)$, $v'(x)$. Hľadajme derivácie funkcií, ktoré sú ich súčtom, súčinom alebo podielom[3]:

- derivácia súčtu a rozdielu funkcií $F(x) = u(x) \pm v(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(u \pm v) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)\right] - \left[u(x) \pm v(x)\right]}{\Delta x} = \\ &= \frac{d}{dx}u \pm \frac{d}{dx}v = u'(x) + v'(x) \end{aligned}$$

- derivácia súčinu $F(x) = u(x)\,v(x)$. Vyjadrime[4]

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) &= u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) = \\ &= \left[u(x) + u'(x)\cdot\Delta x\right]\left[v(x) + v'(x)\cdot\Delta x\right] = \qquad (1.2) \\ &= u(x)\,v(x) + u'(x)\,v(x)\,\Delta x + u(x)\,v'(x)\cdot\Delta x \\ &+ u'(x)\cdot v'(x)\cdot\Delta x^2 \qquad (1.3) \\ F' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \qquad (1.4) \end{aligned}$$

[3]Pri odvádzaní budeme využivať diferenciály a preto menej trpezlivý čitateľ môže dôkazy preskočiť.

[4]Pri výpočte je vhodné prepísať definičný vzťah okamžitej rýchlosti zmeny funkcie F do tvaru: $F(x+\Delta x) = F(x) + \dot{F}(x)\cdot\Delta x$. Tento výraz predpokladá, že $\Delta x \to 0$.

$$\begin{aligned} F' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u'(x)\,v(x)\,\Delta x + u(x)\,v'(x)\cdot\Delta x + u'(x)\cdot v'(x)\cdot\Delta x^2}{\Delta x} = \\ &= u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pravidlo (1.5) pre deriváciu súčinu dvoch funkcií sa dá rozšíriť na ľubovoľný počet funkcií:

$$\begin{aligned} y' &= [uvw]' = [(uv)\,w]' = (uv)'\,w + (uv)\,w' = \left(u'v + uv'\right)w + uvw' = \\ &= u'vw + uv'w + uvw' \end{aligned} \tag{1.6}$$

$\boxed{\text{Príklad 2}}$ Nájdite deriváciu $y = x^n$ kde n je prirodzené číslo

Riešenie: Podľa (1.6) derivácia súčinu niekoľkých funkcií sa rovná súčtu súčinov, v ktorých postupne nahradzujeme každú funkciu jej deriváciou:

$$\begin{aligned} y &= x^n = xxx.....x \\ y' &= x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Vyžitím tohto výsledku a princípu superpozície dokážeme derivovať ľubovoľné polynómy a teda aj všetky funkcie[5]. ♢

- derivácia zloženej funkcie $F(x) = f(g(x))$ Opäť vypočítajme najskôr:

  $$F(x + \Delta x) = f(g(x + \Delta x)) = f\left(g(x) + g'(x)\,\Delta x\right)$$

  V ďalšom kroku pre lepšiu názornosť považujme $g(x)$ za premennú T , pričom pre $\Delta T = g'(x)\,\Delta x$

  $$F(x + \Delta x) = f(T + \Delta T) = f(T) + f'(x)\,\Delta T = f(g(x)) + f'(g(x))\,g'(x)\,\Delta x$$

  $$\begin{aligned} F' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x)) + f'(g(x))\,g'(x)\,\Delta x - f(g(x))}{\Delta x} = \qquad (1.8) \\ &= f'(g(x))\,g'(x) \qquad (1.9) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Príklad 3}}$ Odvoďte vzťah pre deriváciu podielu dvoch funkcií $F(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

[5] Pozri kapitolu mocninné rady: takmer všetky funkcie sa dajú vyjadriť v tvare nekonečného polynómu.

Riešenie: Použijeme rovnice (1.5), (1.9):

$$\begin{aligned} F^{'}(x) &= \left[u(x)v^{-1}(x)\right]^{'} = u^{'}(x)v^{-1}(x) + u(x)\left[-1 * v^{-2}(x)v^{'}(x)\right] = \\ &= \frac{u^{'}(x)v(x) - u(x)v^{'}(x)}{v^2(x)} \end{aligned}$$

♢

Pravidla o derivácii zložených funkcií možno využiť aj pri hľadaní derivácií inverzných funkcií:

$\boxed{\text{Príklad 4}}$ Nájdite pomocou inverzných funkcií deriváciu $y = \sqrt[n]{x}$, $x > 0$ kde n je prirodzené číslo a funkcie $y = \arcsin x$, kde $x \in \langle -1, 1\rangle$; $y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Riešenie: Inverzná funkcia k $y = \sqrt[n]{x}$ je $x = y^n$, pre ktorú podľa (1.7) platí[6]:

$$\begin{aligned} x^{'} &= ny^{n-1}y^{'} \\ y^{'} &= \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

Analogicky budeme postupovať aj v druhom prípade. Najskôr nájdime inverznú funkciu k $y = \arcsin x$ a zderivujme jej pravú a ľavú stranu podľa premennej x:

$$\begin{aligned} x &= \sin y \\ 1 &= \cos y \cdot y^{'}(x) \\ y^{'}(x) &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Veľmi častou deriváciou je tzv. logaritmická. Jej použitie si ilustrujme na nasledovnom príklade: ♢

$\boxed{\text{Príklad 5}}$ Nájdime deriváciu funkcie $y = x^x$.

Riešenie: Funkciu y zlogaritmujeme a následne zderivujeme:

$$\begin{aligned} \ln(y) &= x \ln x \\ \frac{1}{y}y^{'}(x) &= \ln x + 1 \\ y^{'}(x) &= (\ln x + 1)\, y = (\ln x + 1)\, x^x \end{aligned}$$

[6] Uvedomme si, že derivujeme obe strany rovnice podľa premenej x. Funkcia y závisí od x $y(x)$ a preto jej derivácia je $y^{'}$

Mohli sme postupovať aj iným spôsobom. Keďže platí:

$$x^x = e^{x \ln x}$$

potom použitím pravidla o derivovaní zložených funkcií:

$$\left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}\left(\ln x + \frac{x}{x}\right) = x^x \left(\ln x + 1\right) \qquad \diamondsuit$$

1.3 Využitie derivácii v matematike a fyzike.

V nasledujúcej časti si ukážeme použitie derivácii pri riešení bežných príkladov z fyziky:

1.3.1 Diferenciál funkcie, jeho význam a použitie.

Derivácia funkcie $y = f(x)$ je určená ako $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, tzn. že výraz $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ sa od seba líši tým menej, čím viac sa Δx blíži k nule. Môžeme teda písať:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \omega(\Delta x) \tag{1.10}$$

kde $\omega(\Delta x)$ je takou funkciou Δx, že $\lim_{\Delta x \to 0} \omega(\Delta x) = 0$. Zo vzťahu (1.10) potom platí:

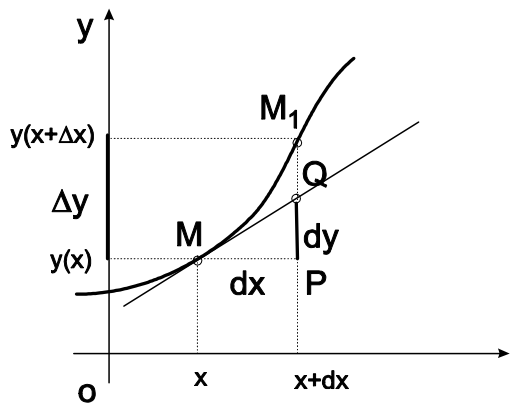
$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \omega(\Delta x)\,\Delta x \tag{1.11}$$

Prírastok Δy sa dá vyjadriť ako súčet dvoch členov. Oba sčítance sú pre $\Delta x \to 0$ nekonečne malými, druhý člen je však vyššieho rádu malosti. To znamená, že prvý sčítanec ovplyvňuje prírastok funkcie oveľa výraznejšie ako druhý. Hlavná časť prírastku sa nazýva *diferenciál funkcie* a zapisuje sa dy (na odlíšenie od prírastku Δy):

$$dy = f'(x)\,\Delta x \tag{1.12}$$

Prírastok Δx väčšinou označujeme dx[7] a preto $dy = f'(x)\,dx$. Geometrický význam najlepšie pochopíme z obr.I.2. Majme dva body $M[x, y]$ a $M_1[x + dx, y + \Delta y]$ a dotyčnicu k bodu M. Ak namiesto prírastku funkcie Δy vezmeme diferenciál dy, geometricky to znamená, že v okolí bodu M nahradíme graf funkcie dotyčnicou v bode M. Rozdiel medzi Δy a dy je daný úsečkou $QM_1 = \omega\Delta x = \omega dx$. Súčasne vidíme, že tento rozdiel bude tým menší, čím menšie dx si zvolíme.

[7] Stačí si uvedomiť, že pre špeciálnu funkciu $y = x$ platí $dy = dx = 1\Delta x$ a teda $\Delta x = dx$.



obr. I.2

Príklad 6 Meraním sme zistili dĺžku strany štvorca $x = 3cm$ Hodnota je zaťažená chybou $\Delta x' = 0,05cm$. Určte chybu, ktorej sa dopustíme pri výpočte obsahu plochy!

Riešenie: Pre obsah plochy platí: $S = x^2$. Nepresnosťou merania skutočná hodnota x môže byť z intervalu $x \in \langle x - \Delta x', x + \Delta x' \rangle$. Z tohto dôvodu výsledok je zaťažený chybou: $\Delta S = (x + \Delta x')^2 - (x - \Delta x')^2 = 4x\Delta x'$. Mohli sme postupovať oveľa jednoduchšie a rozptyl plochy odhadnúť diferenciálom: $dS \approx \Delta S \Longrightarrow dS = 2x\Delta x = 4x\Delta x'$. ♢

Diferenciály možno úspešne použiť nielen pri odhadoch chýb, ale aj pri odhadoch hodnôt funkcií v konkrétnych bodoch:.

Príklad 7 Odhadnite $y(x) = \sqrt{101}$

Riešenie: Prírastok funkcie $y(x) = \sqrt{x}$ pri zmene argumentu o Δx vypočítame podľa vzťahu (1.12). Za Δx zvoľme $\Delta x = 1$ Prírastok funkcie Δy vyšetrujme v okolí bodu $x = 100$:

$$\Delta y \sim dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\Delta x = \frac{1}{20}$$

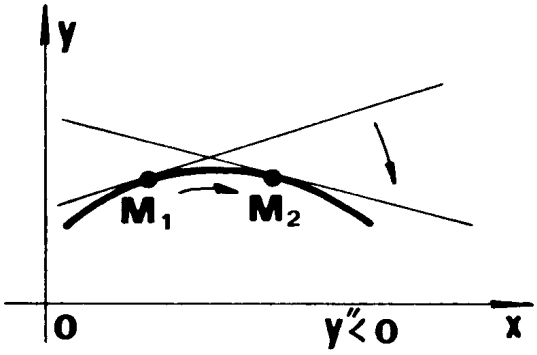
$$y = y(100) + \Delta y = \sqrt{100} + \frac{1}{20} = 10,05$$

♢

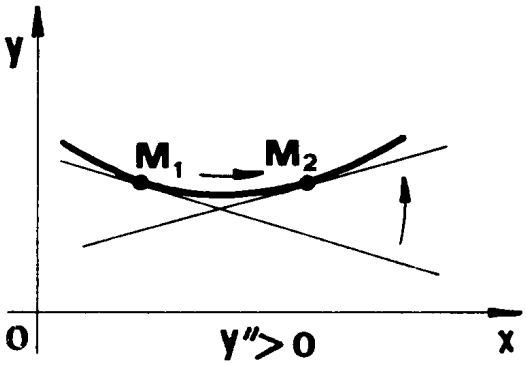
1.3.2 Hľadanie extrémov funkcií.

Vo fyzike mnohokrát vyšetrujeme priebeh fyzikálnych veličín $y(x)$ a zisťujeme, kedy nadobúdajú svoje lokálne extrémy. Hovoríme, že veličina $y(x)$ má v bode

x_0 *lokálne maximum*, ak do dosiahnutia bodu x_0 najskôr rástla a potom klesala. *Lokálne minimum* možno definovať analogicky. Keďže v bode extrému prechádza rastúca časť funkcie na klesajúcu alebo naopak, nutnou podmienkou existencie extrému je $y'(x) = 0$[8]. Vyplýva to nakoniec aj z obrázku I.3, kde v extréme je smernica dotyčnice rovnobežná s x ovou osou.



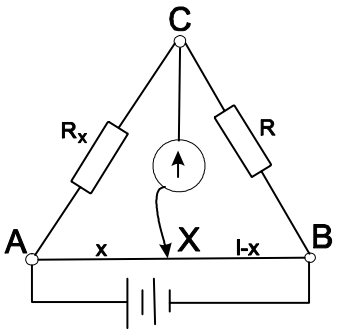
obr. I.3a



obr. I.3b

Tvrdenie však nemožno obrátiť. Ak platí, že $y'(x_0) = 0$, nemusí mať funkcia v tomto bode extrém. Napríklad funkcia $y = x^3$ nemá v bode $x = 0$ extrém, hoci $y'(0) = 0$. Z nulovosti derivácie však nevieme ešte posúdiť, či je v danom bode lokálne maximum alebo minimum. Na ich rozlíšenie sa používa trik, ktorý je zrejmý priamo z obrázku I.3[9]: Ak $y''(x_0) > 0$ funkcia má minimum, ak $y''(x_0) < 0$ funkcia má v danom bode maximum.

Príklad 8 Určte, ako musíme merať odpor rezistora metódou Wheatstonovho mostíka, aby relatívna chyba merania bola minimálna (obr.I.4).



obr. I.4

Riešenie: Pri meraní odporu sa poloha jazdca volí tak, aby mostík bol vyvážený a cez galvanometer neprechádzal žiaden prúd. Z rovností napätí $U_{AC} = U_{AX}$,

[8] Táto podmienka však nie je postačujúca. Napríklad pre funkciu $y = |x|$ neexistuje derivácia v bode $x = 0$, hoci ide o extrém (lokálne minimum).

[9] V prvom prípade je y' klesajúca funkcia a $y''(x) < 0$. V druhom prípade je to naopak.

$U_{CB} = U_{XB}$ odvodíme vzťah pre neznámy odpor R_x :

$$R_x = \frac{x}{l-x} R \tag{1.13}$$

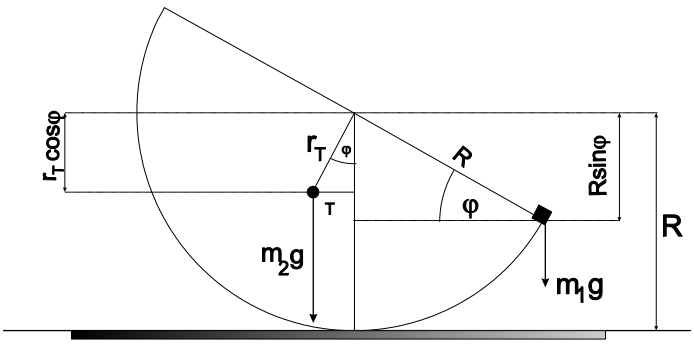
Pre relatívnu odchýlku platí[10]:

$$\frac{dR_x}{R_x} = \frac{l}{x\,(l-x)} dx \tag{1.14}$$

Posledný výraz je minimálny, ak $x\,(l-x)$ je maximálne t.j. $x = \frac{l}{2}$. Odpor teda meriame najpresnejšie vtedy, keď sa jazdec pri vyváženom mostíku nachádza približne v strede, čomu zodpovedá $R_x \approx R$ (1.13). Z tohto dôvodu sa v praxi najskôr menej presnými metódami odhadne neznámy odpor R_x. Potom sa použije mostík, do ktorého zaradíme odpor $R \approx R_x$ ♢

$\boxed{\text{Príklad 9}}$ Nájdite rovnovážnu polohu polgule s hmotnosťou m_2, na okraji ktorej je položené závažie s hmotnosťou m_1!

Riešenie: Teleso zaujme takú polohu, pri ktorej jeho potenciálna energia W bude minimálna. Nech poloha ťažiska T od stredu poľgule je r_T. Vyjadrime $W(\varphi)$ ako funkciu uhla φ a nájdime jej extrém:



obr. I.5

$$W = m_2 g\,(R - r_T \cos\varphi) + m_1 g\,(R - R\sin\varphi)$$

$$\frac{dW}{d\varphi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad m_2 g r_T \sin\varphi - m_1 g R \cos\varphi = 0$$

$$\Longrightarrow tg\varphi = \frac{m_1 R}{m_2 r_T}$$

$$\left.\frac{d^2W}{d\varphi^2}\right|_{\varphi = arctg\left(\frac{m_1 R}{m_2 r_T}\right)} > 0$$

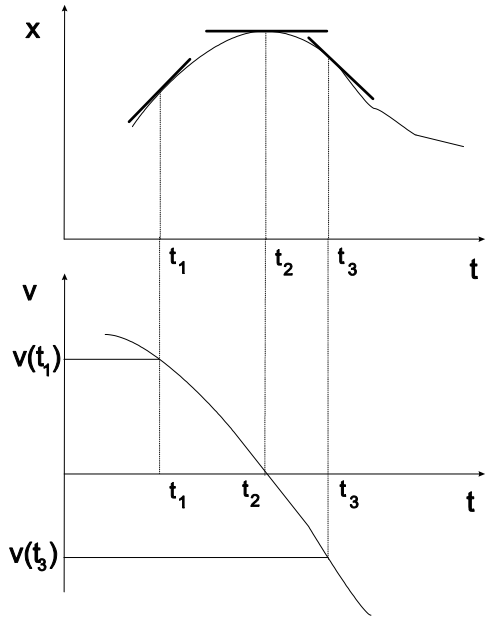
[10] Výchylku odporu R_x dôsledkom chyby merania polohy jazdca sme nahradili diferenciálom $dR_x = \frac{dR_x}{dx} dx = \frac{l-x+x}{(l-x)^2} R dx$

Poslednou rovnicou sme sa presvedčili, že v bode $\varphi = arctg\left(\frac{m_1 R}{m_2 r_T}\right)$ je naozaj minimum. ♢

1.3.3 Kvalitatívna analýza pohybov

Pri kvalitatívnej analýze pohybov využívame geometrický význam derivácie. Číselnú hodnotu derivácie v danom bode určuje smernica dotyčnice s $x-ovou$ osou.

Príklad 10 Na obrázku I.6 je znázornená závislosť polohy telesa v čase t. Urobte kvalitatívnu analýzu a načrtnite priebeh rýchlosti.

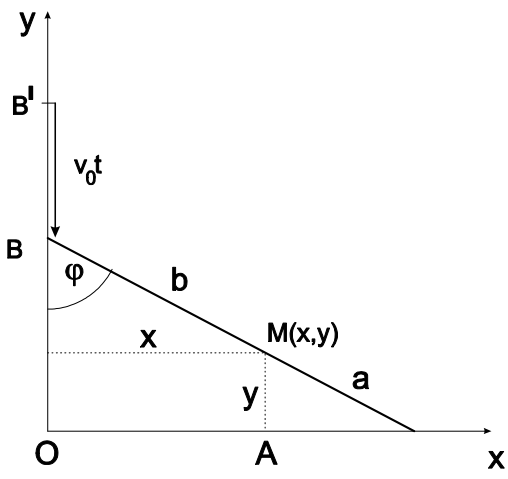


obr. I.6

Riešenie: V čase $t < t_2$ je derivácia kladná $\frac{dx}{dt} > 0$, teleso má kladnú rýchlosť a ide dopredu. V čase $t = t_2$ zastane, pretože $\frac{dx}{dt} = 0$. Rýchlosť telesa v neskorších časoch bola záporná: $\frac{dx}{dt} < 0$ a teleso sa pohybovalo dozadu (napr. cúvalo). ♢

1.3.4 Využitie derivácii v kinematike (výpočet rýchlosti a zrýchlení)

Príklad 11 Konce pravítka na obr.I.7 sa kĺžu po kolmých priamkach OX a OY, pričom bod B sa pohybuje konštantnou rýchlosťou v_0. Nájdite rovnicu trajektórie ľubovolného bodu M pravítka a jeho rýchlosť, ak viete, že pravítko v čase t splývalo s osou y.



obr. I.7

Riešenie: Vyberme na pravítku ľubovolný bod $M\,[x, y]$ a nájdime jeho rýchlosť. Z obrázka I.7 vyplýva:

$$x = b \sin\varphi, \quad y = a \cos\varphi$$

Ide o parametrické vyjadrenie elipsy, o čom sa ľahko presvedčíme vydelením rovníc a a b, ich umocnením a následným sčítaním:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Pre veľkosť rýchlosti a jej zložky platí:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = -a\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} \tag{1.15}$$

$$v = \sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \tag{1.16}$$

Uhlové zrýchlenie $\frac{d\varphi}{dt}$ určíme z počiatočných podmienok. V čase $t = 0$ splývalo celé pravítko s osou y. Po uplynutí času t bod B prešiel dráhu v_0t:

$$(a + b) - (a + b)\cos\varphi = v_0t \tag{1.17}$$

Zderivovaním:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0}{(a + b|}\frac{1}{\sin\varphi} \tag{1.18}$$

a následným dosadení do (1.16) určíme hľadanú rýchlosť:

$$v = \frac{v_0}{a + b}\sqrt{a^2 + b^2\cot g^2\varphi}$$

$\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 12}}$ Nájdite silu, aká musí pôsobiť na teleso, aby sa pohybovalo po elipse konštantnou uhlovou rýchlosťou ω.

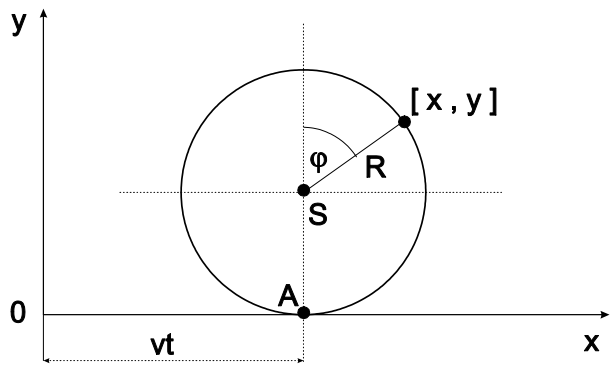
Riešenie: Podľa Newtonovho zákona na teleso musí pôsobiť sila $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$, ktorú určíme zo zrýchlenia:

$$x = a\cos\omega t \qquad \dot{x} = -\omega a\sin\omega t \qquad \ddot{x} = -\omega^2 a\cos\omega t$$
$$y = b\sin\omega t \qquad \dot{y} = \omega b\cos\omega t \qquad \ddot{y} = -\omega^2 b\sin\omega t$$
$$\overrightarrow{F} = m\left(-\omega^2 a\cos\omega t, -\omega^2 b\sin\omega t\right) = -m\omega^2\overrightarrow{r}$$

Výsledná sila smeruje do stredu elipsy, pohyb je centrálny. $\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 13}}$ Obruč sa valí po vodorovnej podložke uhlovou rýchlosťou ω. Dokážte, že bod A je okamžitou osou otáčania obruče (t.j. jeho rýchlosť je nulová a vektor rýchlosti ľubovoľného bodu obruče je kolmý na polohový vektor vzťahovaný k bodu A).

Riešenie: Ťažisko telesa sa pohybuje rýchlosťou $v = \omega R$. Určme polohu a rýchlosť jednotlivých bodov na obruči (obr. I.8).



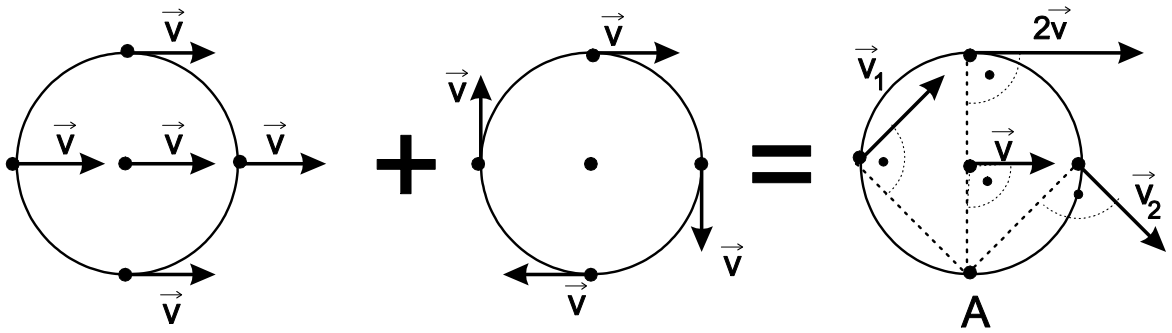
obr. I.8

$$x = vt + R\sin\varphi \qquad y = R\cos\varphi + R$$
$$\dot{x} = \omega R + \omega R\cos\varphi \qquad \dot{y} = -\omega R\sin\varphi$$

Polohový vektor $\vec{r}$ a rýchlosť vzhľadom k bodu $A\,[vt, 0]$ je:

$$\vec{r} = [R\sin\varphi, R\cos\varphi + R] \qquad \vec{v} = [\omega R + \omega R\cos\varphi, -\omega R\sin\varphi]$$

Ich skalárny súčin je $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ a preto oba vektory sú na seba kolmé. Navyše rýchlosť bodu A je nulová a podľa definície je os, prechádzajúca bodom A okamžitou. Celá situácia sa dá znázorniť graficky (obr. I.9). Teleso vykonáva dva pohyby: translačný a rotačný, ktorý treba zložiť:



obr. I.9

◇

1.3.5 Derivácia vektorov

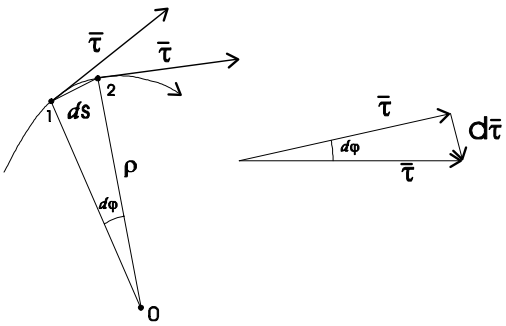
Pravidlá pre derivovanie skalárnych funkcií možno úspešne použiť aj pri derivovaní vektorov:

Oskulačná kružnica V kinematike sa často stretávame so situáciou, keď vektor zrýchlenia rozkladáme na tangenciálnu a normálovú časť. Vektor rýchlosti má v každom bode trajektórie smer dotyčnice :

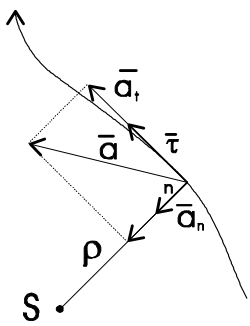
$$\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{\tau} \tag{1.19}$$

kde $\overrightarrow{\tau}$ je jednotkový vektor v smere dotyčnice k trajektórii. Zderivovaním (1.19) určíme zrýchlenie:

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\overrightarrow{\tau}) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau} + v\frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$$



obr. I.10a



obr. I.10b

Zrýchlenie $\overrightarrow{a}$ sme rozložili na normálovú $\overrightarrow{a_n}$ a tangenciálovú zložku $\overrightarrow{a_\tau}$. Zaveďme pozdĺž trajektórie nový parameter "dĺžka trajektórie" s, definovaný vzťahom: $\frac{ds}{dt} = v$ a vo výraze pre tangenciálne zrýchlenie nahraďme derivovanie podľa času t derivovaním podľa parametra s:

$$\overrightarrow{a_n} = v\frac{d}{dt}\overrightarrow{\tau} = v\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = v^2\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} \tag{1.20}$$

Výraz $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}$ nezávisí od časového priebehu pohybu, ale iba od geometrického tvaru trajektórie. Smer vektora $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}$ je kolmý na smer vektora $\overrightarrow{\tau}$, o čom sa môžeme ľahko presvedčiť[11]:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\tau}\cdot\overrightarrow{\tau} &= 1 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\tau}\cdot\overrightarrow{\tau}) = 2\frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt}\cdot\overrightarrow{\tau} = 0 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt}\perp\overrightarrow{\tau} \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\perp\overrightarrow{\tau}\end{aligned}$$

Aproximovaním časti trajektórie oskulačnou kružnicou s polomerom krivosti ρ, pre diferenciálnu charakteristiku dostaneme: $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = -\frac{d\varphi}{\rho d\varphi}\overrightarrow{n}$[12] kde $\overrightarrow{n}$ je normálový vektor orientovaný do stredu oskulačnej kružnice. Dosadením do (1.20)

$$\overrightarrow{a_n} = v^2\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = -\frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n} \tag{1.21}$$

$\boxed{\text{Príklad 14}}$ Nájdime polomer krivosti paraboly $y = px^2$ v bode $(0,0)$.

Riešenie: Vzhľadom na skutočnosť, že polomer krivosti je daný geometrickým tvarom trajektórie a nie charakterom pohybu po tejto krivke, vytvorme si nasledovný fyzikálny model: Predpokladajme, že teleso sa v smere osi x pohybuje rýchlosťou "$v = 1ms^{-1}$" $\Longrightarrow x = t$ a preto $y = px^2 = pt^2$. Pre rýchlosť a zrýchlenie platí[13]:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{x}\ \vec{i} + \dot{y}\ \vec{j} = 1\,\vec{i} + 2pt\,\vec{j} \\ \vec{a} &= \frac{d}{dt}\vec{v} = 2p\,\vec{j}\end{aligned}$$

Dotyčnicový a normálový vektor v ľubovoľnom mieste trajektórie nájdeme z derivácie $\frac{dy}{dx}$. Tá totiž určuje tangens uhla, ktorý zviera dotyčnica s x ovou osou.

[11] Smer vektora $\frac{d}{dt}\overrightarrow{\tau}$ je totožný so smerom vektora $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}$ (1.20).

[12] Veľkosť vektora $|d\overrightarrow{\tau}| = 1d\varphi$

[13] pri ďalších úpravách nebudeme písať jednotky, iba si uvedomíme, že ak za t dosadíme sekundy, potom poloha telesa bude v metroch.

Pre dotyčnicové $\vec{\tau}$a normálové vektory $\vec{n}$ k dráhe $y = px^2$ potom platí:

$$\vec{\tau} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2\varphi + 1}}\,\vec{i} + \sqrt{\frac{\tan^2\varphi}{\tan^2\varphi + 1}}\,\vec{j} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(2pt)^2 + 1}}\,(1, 2pt)$$

$$\vec{n} = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(2pt)^2 + 1}}\,(-2pt, 1)$$

Veľkosť normálového zrýchlenia:

$$a_n = \vec{n}\cdot\vec{a} = \sqrt{\frac{1}{(2pt)^2 + 1}}\,(-2pt, 1)\cdot(0, 2p\,) = \frac{2p}{\sqrt{(2pt)^2 + 1}} =$$

$$= \frac{(2pt)^2 + 1}{\left[(2pt)^2 + 1\right]^{3/2}}2p = \frac{v^2}{\left[(2pt)^2 + 1\right]^{3/2}}2p \tag{1.22}$$

Porovnaním výrazov (1.21, 1.22) pre polomer krivosti v ľubovoľnom čase t dostávame:

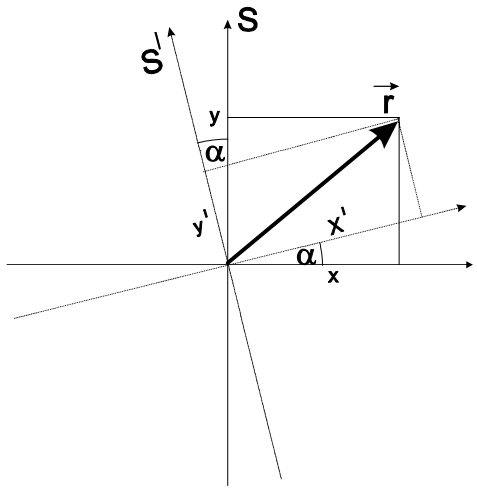
$$\rho = \frac{\left[(2pt)^2 + 1\right]^{3/2}}{2p}$$

Pre konkrétny čas $t = 0s$:

$$\rho = \frac{1}{2p}$$

$\diamondsuit$

Neinerciálne vzťažné sústavy Uvažujme o hmotnom bode s hmotnosťou m, ktorého poloha vzhľadom na súradnicovú sústavu S je daná polohovým vektorom $\vec{r}$. Majme súradnicovú sústavu S', ktorá sa otáča uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ okolo sústavy S. Nájdime silu, pôsobiacu na tento objekt z hľadiska pozorovateľa v súradnicovom systéme S'.



obr. I.11

Polohový vektor $\vec{r}$ zapíšme v báze čiarkovanej sústavy, ale zderivujme ho z hľadiska pozorovateľa v súradnicovej sústave S.[14] Takto získame vzťah medzi vektormi $\vec{v}$ a $\vec{v'}$[15]

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} \\
\vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{x'}\,\vec{i'} + x'\,\dot{\vec{i'}} + \dot{y'}\,\vec{j'} + y'\,\dot{\vec{j'}} = \dot{x'}\,\vec{i'} + \dot{y'}\,\vec{j'} + x'\,\dot{\vec{i'}} + y'\,\dot{\vec{j'}} = \\
&= \vec{v'} + x'\left(\vec{\omega} \times \vec{i'}\right) + y'\left(\vec{\omega} \times \vec{j'}\right) = \vec{v'} + \vec{\omega} \times \left(x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'}\right) = \\
&= \vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Rovnakým spôsobom postupujeme ďalej, pričom využijeme rovnicu (1.23) [16]:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \dot{v'_x}\,\vec{i'} + v'_x\,\dot{\vec{i'}} + \dot{v'_y}\,\vec{j'} + v'_y\,\dot{\vec{j'}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \left(\vec{v'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}\right) = \\
&= \vec{a'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r'}\right)
\end{aligned}$$

[14] Pri výpočtoch derivácií musíme rozlišovať, v ktorej súradnicovej sústave deriváciu robíme. Z hľadiska sústavy S bázové vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$ sa s časom nemenia (stoja): $\frac{d}{dt}\vec{i} = \frac{d}{dt}\vec{j} = \vec{0}$, pričom $\vec{i'}$, $\vec{j'}$ sa v tejto sústave točia $\frac{d}{dt}\vec{i'} \neq \vec{0}$ $\frac{d}{dt}\vec{j'} \neq \vec{0}$. Z hľadiska S' je to samozrejme opačne.

[15] Pri úpravách využijeme, že pre deriváciu ľubovoľného jednotkového vektora $\vec{e}$ (teda aj bázových vektorov $\vec{i'}$, $\vec{j'}$) otáčajúceho sa uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ platí:

$$\frac{d}{dt}\vec{e} = \vec{\omega} \times \vec{e}$$

Stačí si uvedomiť, že za čas dt opíše jednotkový vektor oblúk s dĺžkou $1d\varphi$: $d\vec{e} = d\varphi\left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \vec{e}\right) \Longrightarrow \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}$

[16] Nezabúdajme, že vektor $\vec{r}$ je rovnaký v oboch sústavách len je vyjadrený v iných bázach: $\vec{r} = \vec{r}\,'$

Sila pôsobiaca na teleso v čiarkovanej súradnicovej sústave:

$$\overrightarrow{F'} = m\overrightarrow{a'} = m\overrightarrow{a} - 2m\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v'} - m\,\dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r'} - m\overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right) \qquad (1.24)$$

Podľa vzťahu 1.24, teleso v rotujúcej sústave "cíti" okrem sily $m\overrightarrow{a}$ aj ďašie sily, ktoré nemajú pôvod vo vzájomnej interakcii. Ide o Coriolisovu silu $\overrightarrow{F}_c = -2m\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v'}$, Eulerovu $-m\,\dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r'}$ a dostredivú $-m\overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right)$. Vplyv Coriolisovej sily sa prejavuje na Zemi množstvom efektov: Na severnej pologuli sa jej vplyvom viacej vymývajú pravé brehy riek a dochádza k väčšiemu opotrebovávaniu pravých koľajníc na tratiach, po ktorých idú vlaky iba jedným smerom. Dochádza tiež k stáčaniu pasátových vetrov, ktoré vanú od severu a špirálovitému stáčaniu vzdušných prúdov v cyklónoch. Z matematického vyjadrenia Coriolisovej sily, je zrejmé, že uvedené efekty sú na severnej a južnej pologuli opačné.

1.4 Cvičenia

$\boxed{1.1.}$ Pomocou derivácie inverznej funkcie nájdite derivácie nasledovných funkcií: $y = \log_a x$, $y = arctgx$, $y = arc\cos x$

Riešenie: $(x\ln a)^{-1}$, $(1+x^2)^{-1}$, $-(1-x^2)^{-0,5}$

$\boxed{1.2.}$ Derivujte $(x^2+1)^{\sqrt{x-1}}$, $x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$, $a^x x^a$, $x^{\sin x}$, $x^2\log_3 x$, $\sqrt[x]{x}$

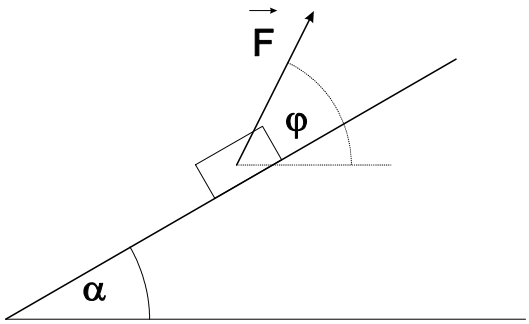
Riešenie: $(x^2+1)^{\sqrt{x-1}}\left[\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2\sqrt{x-1}} + \frac{2x\sqrt{x-1}}{x^2+1}\right]$,

$\arctan x$, $a^x x^a\left(\frac{a}{x} + \ln a\right)$, $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$, $x\left(2\log_3 x + \frac{1}{\ln 3}\right)$, $\sqrt[x]{x}\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\boxed{1.3.}$ Je daná funkcia $f(x) = e^{\left[\frac{x}{10}(1-x)\right]}$. Vypočítajte jej približnú hodnotu v bode $x = 1,05$.

Riešenie: $f(1,05) \approx 0,995$

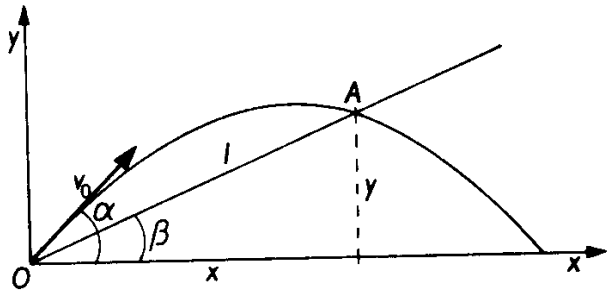
$\boxed{1.4^*.}$ Na naklonenej rovine s elevačným uhlom α je kváder s hmotnosťou m. Určte, pod akým uhlom φ musí pôsobiť sila F na kváder, aby bola pri rovnomernom pohybe telesa nahor minimálna. Koeficient trenia je μ.



obr. I.12

Riešenie: $tg\varphi = \frac{\mu + tg\alpha}{1 - \mu tg\alpha}$

$\boxed{1.5^*}$ Z bodu O na šikmej rovine je vrhnuté teleso rýchlosťou v_0. Nájdite uhol, pod ktorým musí byť teleso vrhnuté, aby vzdialenosť l bola maximálna. Predpokladajte homogénne gravitačné pole.



obr. I.13

Riešenie: $tg\alpha = tg\beta + \frac{1}{\cos\beta}$

$\boxed{1.6^*}$ Určte dĺžku jednozvratnej páky tak, aby sme na zdvihnutie telesa s tiažou G_1 umiestneného vo vzdialenosti a museli vyanaložiť minimálnu silu. Lineárna hustota materiálu páky je γ.

Riešenie: $F = \sqrt{2ag\gamma G_1}$

Kapitola 2

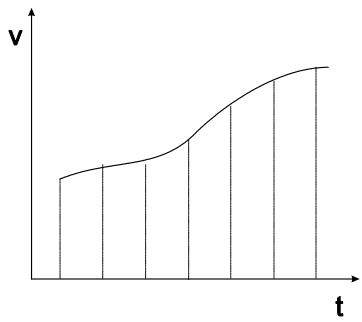
Integrály

Väčšina úloh vo fyzike je založená na hľadaní závislosti nejakých veličín od iných, veľmi často od času. Napríklad: dráha telesa $x(t)$, vyrovnávanie teplôt telies $T(t)$, napätie a prúd v elektrickom obvode $U(t)$, $I(t)$, rádioaktívny rozpad $N(t)$.

Väčšina fyzikálnych zákonov nehovorí priamo o týchto časových priebehoch ale o tom, ako rýchlo sa daná veličina mení::

- rýchlosť zmeny teploty je úmerná rozdielu teplôt $\frac{dT}{dt} = -\varkappa \frac{dT}{dx}$
- rýchlosť zmeny napätia na kondenzátore je úmerná prúdu tečúcemu cez kondenzátor $\frac{du}{dt} = \frac{1}{C} i$
- rýchlosť zmeny prúdu v cievke je úmerná napätiu na cievke $-L\frac{di}{dt} = U_i$
- rýchlosť zmeny počtu rádioaktívnych jadier je úmerný tomuto počtu $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$
- rýchlosť zmeny rýchlosti telesa (zrýchlenie) je úmerná sile pôsobiacej na teleso $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F$

Vo všetkých týchto zákonoch vystupuje okamžitá rýchlosť danej veličiny (t.j. jej derivácia), z ktorej ju treba vypočítať. Podobne ako k sčítavaniu existuje odčítavanie, k násobeniu delenie, k umocneňovaniu odmocnenie, opačnou operáciou k derivovaniu je integrovanie. Integrovanie je operácia, ktorou dokážeme zo známej rýchlosti procesu zrekonštruovať samotný proces. Spôsob, akým to možno dosiahnuť, ukážeme na fyzikálnom príklade: Predpokladajme, že poznáme rýchlosť zmeny dráhy x v čase t.j. rýchlosť $v = \frac{dx}{dt}$ (obr. II.1) a našim cieľom je určiť priebeh $x(t)$.



obr.II.1

Celý dej si rozdelíme na malé intervaly Δt_i, na ktorých považujeme rýchlosť za konštntnú. V týchto intervaloch teleso prejde dráhu $\Delta x_i = v_i \Delta t$. Keď potrebujeme vypočítať, kde sa teleso nachádza v čase t, musíme jednotlivé dráhy sčítať $x = \sum\limits_i v_i \Delta t$. Ak budeme zmenšovať čas $\Delta t \to 0$, suma týchto dráh sa bude viac približovať k ploche pod krivkou $v\,(t)$. Hodnota integrálu zodpovedá teda ploche pod danou krivkou[1].

2.1 Výpočet a metódy integrovania.

Zo vzorcov pre derivovanie elementárnych funkcií vyplývajú tieto základné vzťahy pre neurčité integrály:

$$\begin{array}{ll}
\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ pre } n \neq -1, n \in R,\ x > 0 & \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \text{ pre } x \neq 0 \\
\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \text{ pre } x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi & \int e^x dx = e^x + c \\
\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + c \text{ pre } x \neq k\pi & \int dx = x + c \\
\int \cos x dx = \sin x + c & \int \sin x dx = -\cos x + c \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c & \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \ \text{ pre } \ 0<\text{a} \neq 1 \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c & \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \ \text{ pre } \ -1 < x < 1 & \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c \\
\int 0\, dx = c & \int \frac{dx}{1-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + c
\end{array} \tag{2.1}$$

Správnosť uvedených vzorcov si možno overiť deriváciou. Rovnako sa možno presvedčiť o platnosti ďalších vzťahoch vyplývajúcich z pravidiel pre derivácie súčtu a pravidla pre derivovanie súčinu konštanty a funkcie:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + ...f_n(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx + ... \int f_n(x)\, dx$$
$$\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

[1]Integrály, ktoré nemajú danú hranicu integrovania sa nazývajú neurčité, integrály s konkrétnymi hranicami sú určité.

Integrovanie je v podstate hľadanie vhodnej funkcie, ktorej deriváciou je integrovaná funkcia. Bohužial neexistuje všeobecná metóda integrovania, ktorá by dokázala vyjadriť integrály pomocou elementárnych funkcií. Existujú však štandardné metódy, ktoré stručne uvedieme:

2.1.1 Integrovanie úpravami

V mnohých prípadoch môžeme vhodnými úpravami previesť integrovanú funkciu do takého tvaru, že integrovanie možno vykonať podľa základných vzorcov integrálov (2.1).

- $\int \frac{x+x^3}{x^4}dx = \int \left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}\right)dx = \int \left(x^{-3}+x^{-1}\right)dx = \frac{x^{-2}}{-2}+\ln|x|+c$
- $\int \frac{\cos 2x}{2\cos^2 x-1}dx = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\cos^2 x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}dx = \int dx = x+c$

Často však takéto jednoduché úpravy nestačia, vtedy sa používaju zložitejšie metódy: per partes alebo substitučná metóda.

2.1.2 Integrovanie per partes

Po zderivovaní pravej a ľavej strany pravidla pre derivovanie súčinu dostaneme:

$$\begin{aligned}\int (uv)'\,dx &= \int u'vdx + \int uv'dx\\ uv &= \int u'vdx + \int uv'dx\end{aligned}$$

alebo po preusporiadaní členov:

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx \tag{2.2}$$

Vzorec (2.2) umožňuje integrovať funkciu po častiach a nazýva sa metódou *per partes*. Používame ju v takých prípadoch, keď podintegrálna funkcia sa dá rozložiť na dva činitele (u a v') tak, že súčinom derivácie jedného činiteľa a integrálu druhého činiteľa vznikne funkcia, ktorej integrál je známy, alebo aspoň jednoduchší. Metóda sa často musí použiť niekoľkokrát za sebou:

- $\int x^2e^xdx = \begin{bmatrix} u=x^2 & u'=2x \\ v'=e^x & v=e^x \end{bmatrix} = x^2e^x - 2\int xe^xdx = \begin{bmatrix} u=x & u'=1 \\ v'=e^x & v=e^x \end{bmatrix} = x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^xdx\right] = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$
- $\int \ln x dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & u'=x^{-1} \\ v'=1 & v=x \end{bmatrix} = x\ln x - \int x^{-1}xdx = x\ln x - x + c$

- $\int \cos x\, e^x dx = \begin{bmatrix} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = e^x & v = e^x \end{bmatrix} = e^x \cos x - \int (-1)\, e^x \sin x dx = \begin{bmatrix} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = e^x & v = e^x \end{bmatrix} = e^x \cos x + \left[e^x \sin x - \int e^x \cos x dx\right]$ Porovnaním pravej a ľavej strany: $\int \cos x\, e^x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \cos x + e^x \sin x\right) + c$

- $\int \cos^2 x dx = \begin{bmatrix} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{bmatrix} = \cos x \sin x - \int (-1) \sin^2 x dx = \cos x \sin x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) dx = \cos x \sin x + x - \int \cos^2 x dx$ Porovnaním pravej a ľavej strany: $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left(\cos x \sin x + x\right) + c$

2.1.3 Integrovanie substitúciou

Ak máme vypočítať integrál typu $\int f\left[\varphi\left(x\right)\right] \varphi'\left(x\right) dx$, ktorý nepatrí k základným integrálom, tak sa môžeme pokúsiť zaviesť substitúciu $\varphi\left(x\right) = z$, $\varphi'\left(x\right) dx = dz$ a prepísať ho do tvaru $\int f\left[\varphi\left(x\right)\right] \varphi'\left(x\right) dx = \int f\left(z\right) dz$. Častokrát tento integrál je už riešiteľný. Uvedená metóda sa nazýva *substitučná*.

- $\int \cos\left(3x + 2\right) dx = \begin{bmatrix} t = 3x + 2 \\ dt = 3dx \end{bmatrix} = \int \cos t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \sin\left(3x + 2\right) + c$

- $\int \sin x \cos x dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int t dt = \frac{\sin^2 x}{2} + c$

- $\int \frac{\ln x}{x} dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = x^{-1} dx \end{bmatrix} = \int t dt = \frac{\ln^2 x}{2} + c$

- $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx = \begin{bmatrix} t = arctg x \\ dt = \left(1 + x^2\right)^{-1} dx \end{bmatrix} = \int t^2 dt = \frac{1}{3} arctg^3 x + c$

- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \begin{bmatrix} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dx \end{bmatrix} = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2} \int \left(1 + \cos 2t\right)\, dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \sin t \cos t\right) + c = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$

2.2 Využitie určitých integrálov vo fyzike a matematike

Obsah rovinných obrazcov

Z geometrického významu integrálov je zrejmé, že jeho hodnota zodpovedá ploche pod danou krivkou. Ak obrazec je ohraničený grafom funkcie $f\left(x\right)$, osou

x a funkciou $x = a$, $x = b$, potom jeho obsah S :

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Absolútna hodnota v tomto vzťahu vystupuje zámerne, pretože integrály vyjadrujúce obsah tých častí obrazca, ktoré sú pod osou x majú záporné znamienka.

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ Vypočítajte obsah obrazca ohraničeného krivkou $y = \sin x$ v intervale $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

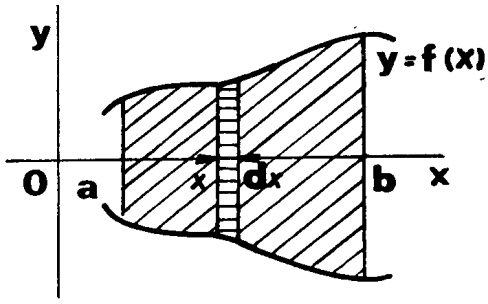
Riešenie:

$$S = \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 4$$

$\diamondsuit$

Objem rotačných telies.

Nech teleso vzniklo rotáciou plochy ohraničenej osou x, krivkou $y = f(x)$, ktorá nepretína os x a časťou priamok $x = a$, $x = b$ (obr. II.2)



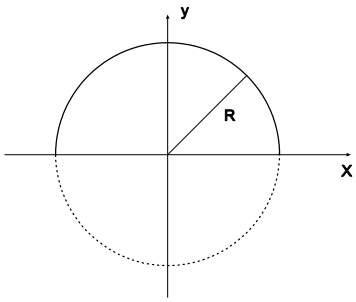
obr. II.2

Plošný obsah rezu kolmého na os x je $\pi y^2 = \pi [f(x)]^2$ a veľkosť objemového elementu s hrúbkou dx je $dV = \pi [f(x)]^2\, dx$. Objem telesa bude teda:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx \tag{2.3}$$

$\boxed{\text{Príklad 2}}$ Vypočítajte objem gule s polomerom R

Riešenie: Guľa vznikla rotáciou polkruhu (obr. II.3): $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.



obr. II.3

Podľa vzťahu (2.3)

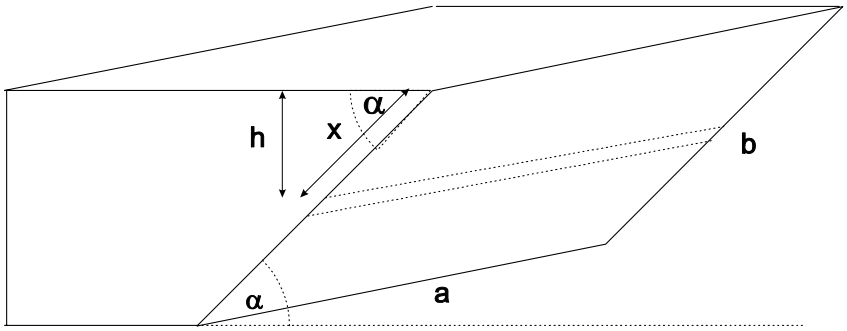
$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

♢

Hydrostatika

Príklad 3 Vypočítajte, akou tlakovou silou pôsobí kvapalina s hustotou ρ na šikmú stenu nádoby. Stena zviera s horizontálnou rovinou uhol α a jej rozmery sú a, b (obr. II.4).

Riešenie: Na plošný element $dS = a\,dx$ v hĺbke h pod hladinou vody pôsobí sila $dF = h\rho g dS = x \sin\alpha \rho g a dx$.



obr. II.4

Pôsobisko tejto sily je v strede plošného elementu. Celková sila sa určí súčtom týchto príspevkov:

$$F = \int_{0}^{b} x \sin\alpha \rho g a dx = \frac{1}{2}\rho g b S \sin\alpha$$

♢

Príklad 4 Hustota vody narastá s hĺbkou $\rho(h) = \rho_0 + \alpha h$, $\alpha > 0$. Do akej hĺbky H sa ponorí drevená kocka s hustotou ρ_0 a so stenou a ?

Riešenie: Drevená kocka sa ponorí do takej hĺbky H, v ktorej sa tiažová sila $G = \rho_0 a^3 g$ vyrovná so vztlakovou silou F_{vz}. Vztlaková sila je daná tiažou "kvapalinového" telesa

$$F_{vz} = \int_0^H \rho a^2 g dh = \int_0^H (\rho_0 + \alpha h)\, a^2 g dh = \left(\rho_0 H + \alpha \frac{H^2}{2}\right) a^2 g$$

a teda:

$$\begin{aligned} \rho_0 a^3 g &= \left(\rho_0 H + \alpha \frac{H^2}{2}\right) a^2 g \\ \frac{\alpha}{2} H^2 + \rho_0 H - \rho_0 a &= 0 \\ H &= \frac{\rho_0}{\alpha}\left[\sqrt{1 + 2\frac{\alpha}{\rho_0} a} - 1\right] \end{aligned}$$

♢

Kinematika

$\boxed{\text{Príklad 5}}$ Rýchlosť hmotného bodu je daná vzťahom $v = 3t - \frac{1}{t^2}$, kde rýchlosť je určená v ms^{-1} a čas v s. Určte dráhu, ktorú prejde hmotný bod v časovom intervale $t \in \langle 2s, 5s \rangle$

Riešenie:

$$s = \int_2^5 v dt = \int_2^5 \left(3t - \frac{1}{t^2}\right) dt = 3\left[\frac{1}{2}t^2\right]_2^5 - \left[-\frac{1}{t}\right]_2^5 = 31,2m$$

♢

$\boxed{\text{Príklad 6}}$ Auto sa pohybuje z bodu $[0,0]$ po trajektórii $y = x^{3/2}$ konštantnou rýchlosťou v. Nájdite časový priebeh cesty $x(t), y(t)$.

Riešenie: Predpokladajme, že teleso sa posunulo v smere osi x o dx, čo má za následok posun v smere y o $dy = \frac{3}{2}x^{1/2}dx$. Potom teleso prešlo dráhu, ktorej element možno vyjadriť podľa Pytagorovej vety:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}dx\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \begin{bmatrix} u = 1 + \frac{9}{4}x \\ du = \frac{9}{4}dx \end{bmatrix} = \\ &= \frac{4}{9}\int_1^{1+\frac{9}{4}x} \sqrt{u} du = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} - \frac{8}{27} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dráhu možno vypočítať aj priamo z rýchlosti : $s = vt$. Porovnaním s (2.4) dostaneme

$$x = \left[\left(\left(vt + \frac{8}{27}\right)\frac{27}{8}\right)^{2/3} - 1\right]\frac{4}{9}$$

pričom

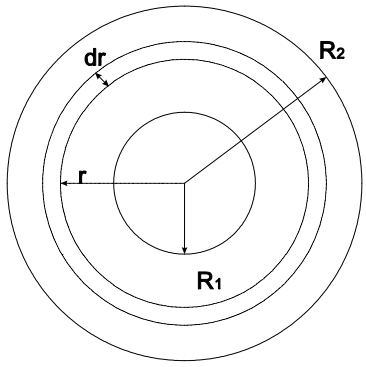
$$y = x^{3/2} = \left[\left[\left(\left(vt + \frac{8}{27}\right)\frac{27}{8}\right)^{2/3} - 1\right]\frac{4}{9}\right]^{3/2}$$

♢

Tuhé teleso

Príklad 7 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho valca s vnútorným polomerom R_1 a vonkajším polomerom R_2, vzhľadom na os, prechádzajúcu osou valca.

Riešenie: V súlade s definíciou momentu zotrvačnosti hmotného bodu $I = mr^2$, kde m je hmotnosť hmotného bodu, r jeho vzdialenosť od osi otáčania, budeme objemový element voliť tak, aby všetky jeho body mali rovnakú vzdialenosť od osi rotácie: $dV = 2\pi rH\,dr$, kde H je výška valca.



obr. II.5

Potom hmotnosť hmotného elementu $dm = \rho 2\pi rH\,dr$, kde ρ je hustota.

$$\begin{aligned} I &= \int dm\, r^2 = \int_{R_1}^{R_2} \rho 2\pi r H r^2 dr = H\rho 2\pi\left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho H\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right) = \frac{1}{2}M\left(R_2^2 + R_1^2\right) \end{aligned}$$

kde M je hmotnosť valca $M = \pi\rho H\left(R_2^2 - R_1^2\right)$ ♢

Práca

$\boxed{\text{Príklad 8}}$ Vypočítajte prácu adiabatického deja.

Riešenie: Adiabatický dej je popísaný rovnicou $p_0V_0^{\chi} = pV^{\chi}$, z ktorej určíme závislosť tlaku od objemu $p = \frac{p_0V_0^{\chi}}{V^{\chi}}$. Pre prácu platí:

$$A = \int_{V_0}^{V_1} pdV = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0V_0^{\chi}}{V^{\chi}} dV = p_0V_0^{\chi} \left[\frac{V^{-\chi+1}}{-\varkappa+1}\right]_{V_0}^{V_1} = \frac{p_0V_0^{\chi}}{-\varkappa+1}\left[\frac{1}{V_1^{\chi-1}} - \frac{1}{V_0^{\chi-1}}\right] \quad \diamondsuit$$

Výpočet stredných hodnôt.

$\boxed{\text{Príklad 9}}$ Okamžitá rýchlosť telesa v časovom intervale $\langle 0, t_0\rangle$ je daná funkciou $v(t) = \alpha t^2 - t$. Vypočítajte jeho priemernú rýchlosť.

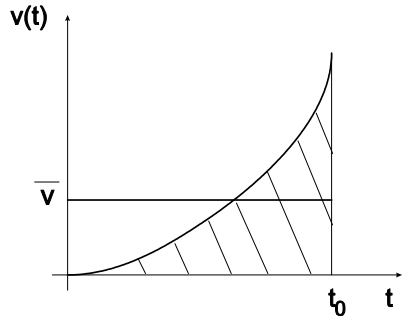
Riešenie: Za čas t_0 teleso prešlo dráhu

$$s = \int_0^{t_0} vdt = \int_0^{t_0} \left(\alpha t^2 - t\right) dt = \alpha\frac{t_0^3}{3} - \frac{t_0^2}{2}$$

Priemerná rýchlosť $\bar{v}$ je rýchlosť, ktorou by teleso prešlo dráhu s za čas t_0 rovnomerným priamočiarym pohybom:

$$\begin{aligned} s &= \bar{v}t_0 = \alpha\frac{t_0^3}{3} - \frac{t_0^2}{2} \\ \bar{v} &= \frac{1}{t_0}\left[\alpha\frac{t_0^3}{3} - \frac{t_0^2}{2}\right] \end{aligned}$$

Všimnite si, že hľadanie strednej hodnoty rýchlosti je ekvivalentné hľadaniu takej veľkosti $\bar{v}$, aby plocha, ktorú ohraničuje krivka $v(t) = \bar{v}$ zodpovedala ploche pod pôvodnou závislosťou $v(t)$.



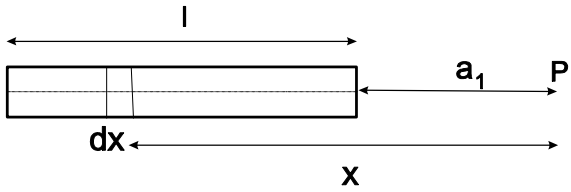
obr. II.6

$\diamondsuit$

Potenciály

$\boxed{\text{Príklad 10}}$ Určte potenciál gravitačného poľa homogénnej tyče dĺžky l, hmotnosti m v bode P. Pre potenciál hmotného bodu s hmotnosťou m_0 vo vzdialenosti x platí:

$$\varphi = -\chi \frac{m_0}{x}$$



obr. II.7

Riešenie: Tyč rozdelíme na infinitezimálne elementy "podobajúce sa hmotným bodom" s hmotnosťou $dm = \frac{m}{l}dx$, ktoré prispievajú k celkovému potenciálu v danom bode veľkosťou $d\varphi = -\chi\frac{dm}{x}$. Využitím princípu superpozície

$$\varphi = -\chi \int\limits_{a_1}^{a_1+l} \frac{m}{l}\frac{dx}{x} = -\frac{\chi m}{l}\left[\ln x\right]_{a_1}^{a_1+l} = -\frac{\chi m}{l}\ln\frac{a_1+l}{a_1}$$

$\diamondsuit$

2.3 Cvičenia

$\boxed{2.1^*}$ Vypočítajte prácu, ktorú musíme vykonať, aby sme vyčerpali nádrž tvaru pologule, ktorá je naplnená do polovice vodou.

Riešenie: $W = \frac{9}{64}\pi r^4 \rho g$

$\boxed{2.2^*}$ Vypočítajte prácu, ktorú vykoná ideálny plyn pri izotermickej expanzii, ak jeho počiatočný objem je $V_1 = 10dm^3$, tlak $p_1 = 10^3 kPa$, konečný tlak po expanzii je $p_2 = 10^2 kPa$.

Riešenie: $W = p_1 V_1 \ln\frac{p_1}{p_2}$

$\boxed{2.3^*}$ Rýchlosť pohybu hmotného bodu je $v = t\exp\left(-\frac{t}{100}\right)$ v ms^{-1}, čas t je v sekundách. Určte dráhu, ktorú teleso prejde do zastavenia.

Riešenie: $s = 10^4 m$

$\boxed{2.4.}$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

$\boxed{2.5.}$ $\int \cot g^2 \varphi d\varphi$

$\boxed{2.6.}$ $\int\limits_0^1 \arcsin t dt$

$\boxed{2.7.^*}$ Teleso mení svoju polohu podľa vzťahu $x(t) = 5t - 6t^2$. Nájdite závislosť rýchlosti a zrýchlenia od času.

$\boxed{2.8.^*}$ Častica sa pohybuje po priamke tak, že $v(x) = \alpha\,(x^2 + x)$. Za aký čas dôjde z bodu 0 do x_0?

$\boxed{2.9.^*}$ Auto sa pohybuje z bodu $[0, \ln 3]$ po trajektórii $y = \ln(2 + \cos x)$ rýchlosťou $v = \frac{\sqrt{5+4\cos x}}{2+\cos x}$. Nájdite časový priebeh cesty $x(t), y(t)$.

Kapitola 3

Matice

3.1 Vlastnosti matíc a determinanty

Pod maticou A typu $m \times n$ budeme rozumieť tabuľku s m riadkami a n stĺpcami[1].

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Elementy a_{ij} nazývame prvkami matice. Matice sa rovnajú práve vtedy, keď obsahujú rovnaké počty stĺpcov aj riadkov s rovnakými elementami:

$$A\,(m \times n) = B\,(m \times n) \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \tag{3.2}$$

Matice možno sčítavať a odčítavať iba vtedy, keď majú rovnaké počty riadkov aj stĺpcov:

$$A\,(m \times n) \pm B\,(m \times n) = C\,(m \times n) \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \tag{3.3}$$

Ak matica $A\,(m \times n)$ obsahuje taký počet sĺpcov ako matica $B\,(n \times p)$ riadkov, potom existuje ich súčin $A \times B = C\ (m \times p)$ pričom: $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Pri násobení matíc neplatí komutatívny zákon, ako sme boli na to zvyknutí pri operáciach s číslami.

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ Majme maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a maticu $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nájdite ich súčin $A \cdot B$, $B \cdot A$:

Riešenie: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \neq \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\diamondsuit$

[1] Takúto maticu budeme v ďalšom texte zjednodušene označovať $A\,(m \times n)$

Špeciálnym typom matíc sú štvorcové matice, ktoré majú rovnaký počet riadkov aj stĺpcov. Dôležité a veľmi často používané čísla, ktoré im priraďujeme nazývame *determinaty*. Označujeme ich zvislými "paličkami" $|A|$. K maticiam sa priraďujú tieto čísla podľa nasledovných kritérií:

- ak ide o maticu A typu 1×1, potom $|A| = a_{ij}$
- ak ide o maticu A typu 2×2, potom $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- vyšším stupňom matíc priraďujeme determinanty podľa rekurentného vzťahu:

$$|A| = \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \left(-1\right)^{i+j} \det M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(-1\right)^{i+j} \det M_{ij} \qquad (3.4)$$

kde M_{ij} je determinant štvorcovej matice, ktorú získame zo štvorcovej matice A vyškrtnutím $i - teho$ riadku a $j - teho$ stĺpca. Vo fyzike sa stretneme s využitím determinantov pri hľadaní vektorových súčinov:

Príklad 2 Určte vektorový súčin $\vec{a}\,(1,2,3)$ a $\vec{b}\,(1,1,2)$

Riešenie:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= \left(-1\right)^{1+1} \overrightarrow{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \left(-1\right)^{1+2} \overrightarrow{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \left(-1\right)^{1+3} \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= \overrightarrow{i}\,(2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) - \overrightarrow{j}\,(1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + \overrightarrow{k}\,(1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = \\
&= \overrightarrow{i}\,(+1) - \overrightarrow{j}\,(-1) + \overrightarrow{k}\,(-1)
\end{aligned}$$

♢

3.2 Využitie matíc

Determinanty matíc sa dajú využiť pri riešení sústav n lineárnych rovníc o n neznámych $(x_1, x_2, ...x_n)$:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\ a_{1n}x_n &= y_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\ a_{2n}x_n &= y_2 \\
&\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots\ a_{nn}x_n &= y_n
\end{aligned}$$

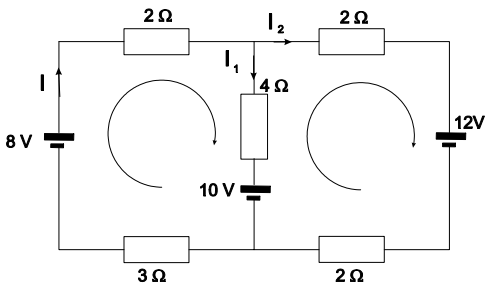
Podľa Cramerovho pravidla táto sústava má riešenie práve vtedy, keď determinant matice $|A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \right| \neq 0$. Neznáme x_1,x_2, ...x_n vypočítame podľa vzťahu:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, 2, ...n \tag{3.5}$$

Matica A_i vznikne nahradením $i - teho$ stĺpca matice A stĺpcovou maticou Y:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & y_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & y_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & y_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Príklad 3}}$ Nájdite prúd prechádzajúci zdrojom $12V$.



obr. III.1

Riešenie: Podľa prvého a druhého Kirchhoffovho zákona zostavíme sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} 5I + 4I_1 + 0I_2 &= -2 \\ 0I - 4I_1 + 4I_2 &= -2 \\ I - I_1 - I_2 &= 0 \end{aligned}$$

a vyriešime ju podľa Cramerovho pravidla (3.5):

$$I_2 = \frac{|A_i|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{13}{28}$$

Zistili sme, že zdrojom tečie prúd $\frac{13}{28}A$, ktorý má opačný smer, ako sme predpokladali. ♢

Vektory sa zvyčajne zapisujú vo forme jednoriadkových alebo jednostĺpcových matíc[2]:

$$\vec{r} = (x, y, z) \qquad \vec{r}^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

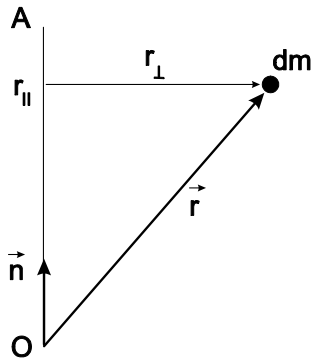
Napríklad z mechaniky vieme, že pre moment hybnosti platí:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{11}\omega_x + I_{12}\omega_y + I_{13}\omega_z \\ L_y &= I_{21}\omega_x + I_{22}\omega_y + I_{23}\omega_z \\ L_z &= I_{31}\omega_x + I_{32}\omega_y + I_{33}\omega_z \end{aligned}$$

čo v maticovej reprezentácii má nasledovné elegantné vyjadrenie:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Príklad 4}}$ Odvoďte vzťah pre výpočet momentu zotrvačnosti vzhľadom na ľubovoľnú os, ktorá prechádza bodom O podľa obrázka III.2.



obr. III.2

Riešenie: Z obr.III.2 vyjadrime polohový vektor $\overrightarrow{r}$ hmotného elementu dm vzhľadom na počiatok O: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_\perp} + \overrightarrow{r}_{||}$. Z definície momentu zotrvačnosti I ďalej vyplýva:

$$I = \int r_\perp^2 dm = \int \left(r^2 - r_{||}^2\right) dm \tag{3.6}$$

[2] Písmeno T nad maticou r je označenie pre tzv. transponovanú maticu, pre ktorú $r_{ij}^T = r_{ji}$. Stĺpce sa nahrádzajú riadkami a opačne.

Ak $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, n_3)$ je jednotkový vektor v smere osi OA, potom $r_{||} = \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} = xn_1 + yn_2 + zn_3$. Okrem toho $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ a $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Dosadením týchto vzťahov do (3.6) :

$$I = I_{11}n_1^2 + I_{22}n_2^2 + I_{33}n_3^2 + 2I_{12}n_1n_2 + 2I_{23}n_2n_3 + 2I_{31}n_3n_1 \tag{3.7}$$

kde:

$$I_{11} = \int \left(y^2 + z^2\right) dm \qquad I_{12} = I_{21} = -\int xydm \tag{3.8}$$

$$I_{22} = \int \left(x^2 + z^2\right) dm \qquad I_{23} = I_{32} = -\int yzdm \tag{3.9}$$

$$I_{33} = \int \left(x^2 + y^2\right) dm \qquad I_{31} = I_{13} = -\int xzdm \tag{3.10}$$

Veličiny I_{ij} sa nazývajú zložkami tenzora momentu zotrvačnosti, ktorý je symetrický $I_{ij} = I_{ji}$. Na jeho určenie stačí vypočítať šesť zložiek. Výraz (3.7) vyjadríme ako súčin matíc:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} I_{ij}n_in_j = (n_1, n_2, n_3)\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \\ &= \vec{n}\, I\, \vec{n}^T \end{aligned} \tag{3.11}$$

$\diamondsuit$

Pokúsme sa o geometrickú interpretáciu momentu zotrvačnosti I. Nanesme do ľubovolného smeru $\overrightarrow{n}$ vektor s veľkosťou $\frac{1}{\sqrt{I}}$. Ich koncové body[3] $\overrightarrow{r} = \frac{\overrightarrow{n}}{\sqrt{I}}$ vytvoria plochu druhého stupňa (3.7), tzv. elipsoid zotrvačnosti:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} I_{ij}x_ix_j = 1 \tag{3.12}$$

Súradnicovú sústavu so začiatkom v bode O možno vždy natočiť tak, aby ortogonálne osi x, y, z splynuli s hlavnými osami elipsoidu momentu zotrvačnosti a rovnica plochy elipsoidu (3.11) prešla na jednoduchý tvar:

$$I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 = 1 \tag{3.13}$$

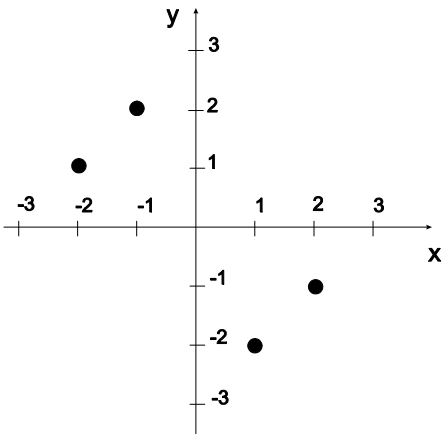
Pri takejto voľbe súradnicovej sústavy nediagonálne prvky tenzora $\bar{I}$ sú nulové. *Cez ľubovoľný bod telesa sa dajú vždy viesť tri navzájom kolmé hlavné osi, ktoré zodpovedajú hlavným osiam elipsoidu zotrvačnosti.* Ich smer možno mnohokrát nájsť zo symetrie telesa. Každá os symetrie telesa môže zodpovedať osi symetrie

[3] v zložkovom tvare $x_i = \frac{n_i}{\sqrt{I}}$

elipsoidu a preto reprezentuje jednu z jeho hlavných osí. Napríklad, ak ťažisko homogénneho valca stotožníme so začiatkom súradnicového systému (bod O), potom momenty zotrvačnosti vzhľadom na ľubovolnú os kolmú k osi symetrii sú rovnaké a môžu byť hlavnými osami (podobne ako hociktora os symetrie). Vo valci teda existuje nekonečne veľa trojíc hlavných osí, ktoré su na seba kolmé. Elipsoidom momentu zotrvačnosti homogénnej gule je guľa a preto ľubovoľná trojica navzájom kolmých priamok prechádzajúcich ťažiskom je hlavnými osami. Ak telesá nevykazujú žiadnu symetriu, potom sa diagonalizácia tenzora I dosahuje riešením sústavy rovníc:

$$\bar{I}\,\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega} \tag{3.14}$$

$\boxed{\text{Príklad 5}}$ Nájdime hlavné osi sústavy hmotných bodov $A(2,-1)$, $B(-2,1)$, $C(1,-2)$ a $D(-1,2)$ s rovnakými hmotnosťami $m = 1$.



obr. III.3

Riešenie: Vypočítajme jednotlivé zložky tenzora[4]:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \sum_{i=1,4} \left(y_i^2 + z_i^2\right) m_i = \sum_{i=1,4} y_i^2 m_i = (-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2 + (2)^2 = 10 \\
I_{12} &= -\sum_{i=1,4} x_i^2 y_i^2 m_i = -\left[-2-2-2-2\right] = 8 = I_{21} \\
I_{22} &= \sum_{i=1,4} \left(x_i^2 + z_i^2\right) m_i = \sum_{i=1,4} x_i^2 m_i = 10
\end{aligned}$$

a teda:

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

[4] $z_i = 0$

Tento tenzor je nediagonálny, a my už pohľadom na sústavu vieme (obr.III.3), ktoré osi sú hlavné. Teraz ich však získame výpočtom. Dosaďme $\bar{I}$ do rovnice (3.14):

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix}$$

a rozpísaním dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} (10-\lambda)\omega_x + 8\omega_y &= 0 \\ 8\omega_x + (10-\lambda)\omega_y &= 0 \end{aligned}$$

Je to homogénna sústava rovníc, a nutnou podmienkou jej riešenia je nulovosť determinantu[5]

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 8 \\ 8 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

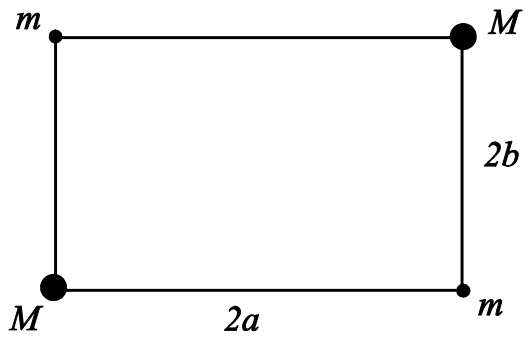
Odtiaľ dostávame $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 18$, teda dve rôzne riešenia (a ich násobky)

$$\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

3.3 Cvičenia

$\boxed{3.1^*}$ Nájdite hlavné osi telesa skladajúceho sa zo štyroch telies hmotností m, M, m, M, ktoré sú umiestnené vo vrcholoch obdĺžnika so stranami $2a$ a $2b$.



obr. III.4

Riešenie: $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2ab(M-m)}{(a^2-b^2)(M+m)}$

[5] Ak by bol determinant nenulový, sústava by mala iba triviálne riešenie, ktoré však nemá pre nás žiadny fyzikálny význam.

Kapitola 4

Nekonečné rady

4.1 Mocninné rady

Predpokladajme, že poloha telesa v čase t_0 je určená súradnicou $x(t_0)$. Pokúsme sa rýchlo a efektívne vypočítať jeho novú polohu po uplynutí krátkeho času Δt. Šikovná metóda takéhoto približného výpočtu je založená na predpoklade, že teleso sa pohybuje konštantnou rýchlosťou $\frac{dx}{dt} = v = konšt$:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + v\Delta t \tag{4.1}$$

Tento odhad môžeme vylepšiť tak, že pohyb telesa budeme považovať za rovnomerne zrýchlený a využijeme známy vzťah:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + v\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \tag{4.2}$$

Ďalšie vylepšenie je považovať pohyb za nerovnomerne zrýchlený so "zrýchlením zrýchlenia" α , ktoré je konštantné $\alpha = \frac{d^3x}{dt^3} = konšt$:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + v\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\alpha(\Delta t)^3 \tag{4.3}$$

Takto by sme mohli stále zvyšovať presnosť v určení polohy x v čase $t + \Delta t$. Štruktúra výrazov (4.1), (4.2), (4.3) nás vedie k myšlienke, že po uskutočnení nekonečne veľa "vylepšení" získame skutočnú polohu vo forme nekonečného radu:

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + a_4(t - t_0)^4 + ... \tag{4.4}$$

Z predchádzajúcich odhadov vyplýva, že pre prvé dva koeficienty platí: $a_0 = x(t_0)$, $a_1(t_0) = \frac{dx}{dt}|_{t=t_0}$. Algoritmus na výpočet ostatných a_n bude podobný:

Dráhu $x(t)$ $n-krát$ zderivujeme a potom vyjadríme jej hodnotu v bode $t = t_0$. Dospejeme k nasledovnému výsledku:

$$a_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right]_{t=t_0} \tag{4.5}$$

Po spätnom dosadení do rovnice (4.4) získame rozvoj funkcie $x(t)$ v okolí bodu t_0:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \frac{dx}{dt}|_{t=t_0}(t-t_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}|_{t=t_0}(t-t_0)^2 + \\ &\quad \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}|_{t=t_0}(t-t_0)^3 + ... \end{aligned} \tag{4.6}$$

Vo fyzike sa často stretneme s rozvojmi trigonometrických ako aj exponencionálnych funkcií. Pre ilustráciu ukážme niekoľko príkladov:

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ Rozviňte funkcie **a,** $f(x) = \sin x$ **b,** $f(x) = \cos x$ **c,** $f(x) = \exp(x)$ do radu v okolí bodu $x = 0$

Riešenie: a, Keďže $f(0) = 0$, $f^{\prime}(0) = 1$, $f^{\prime\prime}(0) = 0$, $f^{\prime\prime\prime}(0) = -1$, ...

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \tag{4.7}$$

b, Keďže $f(0) = 1$, $f^{\prime}(0) = 0$, $f^{\prime\prime}(0) = -1$, $f^{\prime\prime\prime}(0) = 0$ ...

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \tag{4.8}$$

c, Keďže $f(0) = f^{\prime}(0) = f^{\prime\prime}(0) = f^{\prime\prime\prime}(0) = 1$

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \tag{4.9}$$

Užitočnosť rozvoja funkcií spočíva často nie v tom, že môžeme sčítať celý rad, ale práve v tom, že pre mnohé praktické účely ho sčítať celý nemusíme. Ak totiž členy radu rýchlo klesajú, potom vyššie členy radu zvyšujú presnosť výsledku na vyšších desatinných miestach, ale prvé desatinné miesta sa už nemenia. Ak nás výsledok zaujíma len s konečnou presnosťou, stačí sčítať niekoľko prvých členov. Ďalšie členy radu nám umožňujú odhadnúť, na ktorom desatinnom mieste je už náš výpočet nepresný.

$\boxed{\text{Príklad 2}}$ Vypočítajte príspevky prvých piatich členov rozvoja funkcie $f = \sqrt{e} = e^{0,5}$

Riešenie: Ide v podstate o rozvoj (4.9) v ktorom dosadíme $x = \frac{1}{2}$. Pre n-tý člen tohto radu platí $a_n = \frac{(0,5)^n}{n!}$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	1	0,5	0,125	0,020833	0,002604	0,000260

vidíme, že každý nasledujúci člen je približne o rád menší než predchádzajúci. Sčítaním prvých piatich členov dostaneme $\sqrt{e} \approx 1,648$ a z posledného člena v tabuľke odhadneme, že tento výsledok sa líši od presného až na štvrtom desatinom mieste. "Presný" výsledok určíme z kalkulačky:

$$\sqrt{e} = 1,6487243. \qquad \diamondsuit$$

Z tvaru mocninného radu je intuitívne jasné, že čím menší je rozdiel $x - x_0$, tým menší počet členov treba zobrať na získanie relatívne presného výpočtu. Aké Δx je už dostatočne malé, závisí od konkrétneho tvaru funkcie. Niekedy sú aj pomerne veľké Δx ešte dostatočne malé z hľadiska mocninného radu.

Určite ste si všimli, že mnohé fyzikálne zákony sú lineárne. Spomeňme Ohmov zákon, Hookov zákon, zákon tepelnej rozťažnosti a iné. Aby sme pochopili túto skutočnosť, rozoberme príklad dobre známy z mechaniky - silu F, ktorou pôsobí pružina na teleso. Rozložme ju v okolí rovnovážnej polohy $x_0 = 0$ do mocninného radu:

$$F(x) = F(0) + F^{\prime}(0)\,x + \frac{1}{2}F^{\prime\prime}(0)\,x^2 + \frac{1}{6}F^{\prime\prime\prime}(0)\,x^3 + ... \tag{4.10}$$

Pre dostatočne malé výchylky x z rovnovážnej polohy sú tretí a všetky ďalšie členy malé oproti prvým dvom a keďže v rovnovážnej polohe $F(0) = 0$, získame práve lineárny vzťah $F = -kx$ (konštanta $F^{\prime}(0)$ sa označuje v praxi ako tuhosť pružiny k.). Tento vzťah je bežný pre mnohé pružiny práve preto, lebo bežné výchylky sú dostatočne malé na to, aby sme v (4.10) mohli zanedbať všetky vyššie členy. Ostatné zákony sú lineárne v dostatočne malom okolí danej veličiny, z analogického hľadiska.

Okrem približného výpočtu sú mocninné rady často užitočné aj pri úplne presných výpočtoch či dôkazoch. Ako príklad uvedieme odvodenie Eulerovej formuly, ktorú budeme úspešne používať aj v iných kapitolách:

$\boxed{\text{Príklad 3}}$ Odvoďte Eulerovu formulu $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$.

Riešenie: Nahraďme v rovnici (4.9) $x \to ix$, kde i je imaginárna jednotka, pre ktorú platí: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$

$$\exp(ix) = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} \pm ... \tag{4.11}$$

Po preusporiadaní jednotlivých členov rozvoja :

$$\exp(ix) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm ..\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm ...\right) \tag{4.12}$$

v zátvorkách spoznávame rozvoje trigonometrických funkcií (4.8), (4.7):

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x \tag{4.13}$$

čo sa nazýva Eulerova formula. Zameňme $x \to -x$, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ a získame rovnicu

$$\exp(-ix) = \cos x - i \sin x \tag{4.14}$$

Posledné vzťahy vyjadrujú súvislosť medzi exponenciálnymi a trigonometrickými funkciami. Ich sčítaním a odčítaním sa dajú prepísať do tvaru:

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \quad \text{resp.} \quad \sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} \tag{4.15}$$ ♢

Rady sa úspešne využívajú na približné výpočty integrálov a súm. Ak sa integrál z danej funkcie nedá zapísať v tvare elementárnych funkcií, môžeme sa pokúsiť rozložiť integrand do mocninného radu a integrovať člen po člene.

$\boxed{\text{Príklad 4}}$ Vypočítajte rozkladom do radov integrál $\int \frac{e^x}{x} dx$

Riešenie:

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ...\right) dx = c + \ln|x| + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + ..$$ ♢

Výsledkom je nová funkcia daná vo forme radu, ktorú nemožno vyjadriť pomocou elementárnych funkcií.

$\boxed{\text{Príklad 5}}$ Vypočítajte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

Riešenie: Zadefinujme funkciu $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ a zintegrujme ju[1]:

$$\int f(x)\, dx = \int \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} + c = \frac{x^2}{1-x} + c$$

[1] Všimnite si, že dostaneme geometrický rad s absolútnym členom $a_0 = x^2$ a s quocientom $q = x$. Jeho suma je $S = \frac{a_0}{1-q}$.

Spätným zderivovaním pravej a ľavej strany určíme funkciu $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2}$$

Dosadením za $x = \frac{1}{3}$ dostaneme sumu pôvodného radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} = f(\frac{1}{3}) = \frac{5}{4}$$

$\diamondsuit$

4.2 Fourierove rady

Vo fyzike sa často stretávame s veličinami a dejmi, ktoré sa pravidelne opakujú. Napríklad periodický pohyb piestu v motore, kmitanie sústavy okolo rovnovážnej polohy a pod. Každá periodická funkcia $f(t)$ je charakterizovaná periódou T, ktorá sa vyznačuje nasledovnou vlastnosťou:

$$f(t+T) = f(t) \tag{4.16}$$

Pod slovom perióda sa zvyčajne myslí najmenšia z kladných periód tzv. *základná perióda.* Podobne ako v predchádzajúcom paragrafe bolo výhodné rozvíjať funkcie do radov, pokúsme sa nájsť vhodné rozvoje pre periodické funkcie. Základnou stavebnou jednotkou takéhoto radu budú pravdepodobne najjednoduchšie periodické funkcie, ktorými sú $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$ (kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$) t.j.:

$$f(t) = c_0 + c_1 \cos(\omega_1 t) + d_1 \sin(\omega_1 t) + c_2 \cos(\omega_2 t) + d_2 \sin(\omega_2 t) + ...$$

Aké vlastnosti musí mať takýto rad? Keďže funkcia $f(t)$ je periodická, potom podľa (4.16):

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + c_1 \cos(\omega_1 t + \omega_1 T) + d_1 \sin(\omega_1 t + \omega_1 T) + ... = \\ &= c_0 + c_1 \cos(\omega_1 t) + d_1 \sin(\omega_1 t) + ... \end{aligned}$$

a teda $\omega_i T = 2\pi n_i \Longrightarrow \omega_i = \omega n_i$ kde n_i sú celé čísla.[2]. Zistili sme, že funkcie s periódou T bude možné rozvinúť do radu trigonometrických funkcií:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \tag{4.17}$$

[2] Vo fyzike sa frekvencie ω_i nazývajú vyššie harmonické.

Takéto vyjadrenie bude mať praktický zmysel iba vtedy, keď sa nám podarí nájsť recept na určenie všetkých neznámych koeficientov a_n b_n. Skôr ako sa o to pokúsime, vypočítajme niekoľko integrálov, ktoré neskôr použijeme:

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\,dt = \int_0^T \sin(n\omega t)\,dt = 0, \int_0^T dt = T \tag{4.18}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = 0 \tag{4.19}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = \int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = \frac{T}{2}\delta_{n,m} \tag{4.20}$$

kde $n, m = 1, 2...$, $\delta_{n,m}$−Kroneckerov symbol: $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$.

Vynásobme rovnicu (4.17) funkciou $\cos m\omega t$ a zintegrujme ju cez periódu T použitím (4.18),(4.19),(4.17):

$$\int_0^T f(t)\cos(m\omega t)\,dt = \int_0^T \frac{a_0}{2}\cos(m\omega t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T a_n\cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\,dt + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T b_n\cos(m\omega t)\sin(n\omega t)\,dt$$

$$\int_0^T f(t)\cos(m\omega t)\,dt = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{T}{2}\delta_{n,m} + 0 = \frac{T}{2}a_m$$

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(m\omega t)\,dt \tag{4.21}$$

Na určenie koeficientu b_m treba vynásobiť (4.17) funkciou $\sin m\omega t$ a zintegrovať ju cez periódu T, na určenie a_0 rovnicu (4.17) priamo integrujeme cez periódu T :

$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(m\omega t)\,dt \tag{4.22}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt \tag{4.23}$$

$\boxed{\text{Príklad 6}}$ Nájdite Fourierov rozvoj funkcie:

$$f(t) = \begin{cases} -A \text{ pre } t \in (-\frac{T}{2}, 0) \\ A \text{ pre } t \in (0, \frac{T}{2}) \end{cases}$$

Riešenie: Dosadením do (4.21), (4.22), (4.23) :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} A dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-A)\,dt\right] = 0 \tag{4.24}$$

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos m\omega t\,dt = 0 \tag{4.25}$$

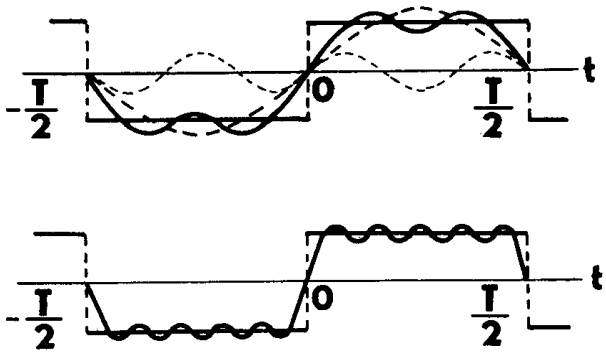
$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin m\omega t dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin m\omega t dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-A)\sin m\omega t dt\right] =$$

$$= -\frac{4A}{Tm\omega}(\cos m\pi - 1) \tag{4.26}$$

Všetky párne členy $b_m = 0$. Dosadením do (4.17) :

$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ...\right) \tag{4.27}$$

Na obr. IV.1 sú okrem pôvodnej funkcie znázornné aj prvé dva členy Fourierovho radu a priebeh po ich zložení, na druhom obrázku je suma prvých 6 členov príslušného radu.



obr. IV.1

◇

4.3 Cvičenia

$\boxed{4.1.}$ Integrujte pomocou radov: $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2}$

Riešenie: $c + x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + .., x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + ... = \arcsin x, x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... = arctgx$

$\boxed{4.2.}$ Pomocou Fourierovho radu rozviňte periodickú funkciu s priebehom: $f(t) = t$ v intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$

Riešenie: $2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nt}{n}$

$\boxed{4.3^*.}$ Dokážte, že výraz pre kinetickú energiu v klasickej mechanike predstavuje prvý člen Taylorovho rozvoja relativistického výrazu pre kinetickú energiu.

$\boxed{4.4.}$ Pomocou rozvoja funkcie $\ln(1+x)$ v bode 0 dokážte, že:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \ln 2$$

Kapitola 5

Diferenciálne rovnice-základný jazyk fyziky

Typickou úlohou fyziky je hľadanie časových priebehov veličín spĺňajúcich fyzikálny zákon, v ktorom vystupujú ich derivácie. Pre ilustráciu spomeňme niekoľko príkladov: Nájdite polohu telasa $x(t)$ pri voľnom páde z výšky h. Fyzikálny zákon popisujúci tento dej je Newtonov zákon: $m\,\ddot{x} = -mg$. Zvyčajne sa požaduje, aby hľadané fyzikálne veličiny dosahovali v čase $t = 0$ predpísané hodnoty: $x(0) = h$, $\dot{x}(0) = v_0$. Rovnica, v ktorej vystupuje neznáma funkcia spolu so svojimi deriváciami sa nazýva **diferenciálna rovnica**. Diferenciálne rovnice možno klasifikovať z rôznych hľadísk. Podľa druhu derivácie ich rozdeľujeme na obyčajné [1] a parciálne[2], podľa analytického tvaru na lineárne[3] a nelineárne a podľa najvyššieho stupňa derivácie na prvého, druhého až n-tého rádu. Pre diferenciálne rovnice n-tého rádu budeme pod *počiatočnými podmienkami* rozumieť hodnoty hľadanej funkcie a jej derivácii až do $n-1$ stupňa (vrátane) v počiatočnom čase $t = 0$[4]. V mechanike sa väčšinou stretneme s rovnicami 2. rádu, pretože základný zákon dynamiky-Newtonova rovnica je DR 2. rádu. Schopnosť správne riešiť diferenciálne rovnice by preto mala patriť do základnej matematickej výzbroje každého fyzika.

---

[1] vystupujú v nej iba obyčajné derivácie hľadanej funkcie, napr. $\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} = \cos x$

[2] vystupujú v nej parciálne derivácie hľadanej funkcie, napr. $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$

[3] hľadaná funkcia so všetkými svojimi deriváciami sa vyskytuje iba lineárne, pričom sa nikdy nevyskytuje ani ako súčin hľadanej funkcie a jej derivácii, ani ako súčin rôznych derivácií tejto funkcie, napr. $\sin t\,\ddot{f} - \left(t^2 + at\right)\dot{f} = \exp t$

[4] Všeobecné riešenie DR $n-$*tého* stupňa musí obsahovať n konštant, ktoré sa určia z pociatocných podmienok.

5.1 Diferenciálne rovnice prvého rádu

5.1.1 Najjednoduchšie typy

Najjednoduchšie typy diferenciálnych rovníc majú tvar $\dot{x}= g(t)$ a ich riešením je neurčitý integrál: $x = \int g(t)\,dt$

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ Určte rýchlosť a polohu telesa pri voľnom páde v homogénnom gravitačnom poli. Teleso v čase $t = 0\,s$ sa nachádzalo vo výške h a jeho rýchlosť $v = v_0$.

Riešenie: Ak počiatok súradnicovej sústavy umiestníme na povrch zeme, potom podľa Newtonovho zákona:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -mg \quad \Longrightarrow \quad v = \int -g dt = -gt + c_1 \\ \dot{x} &= -gt + c_1 \quad \Longrightarrow \quad x = \int (-gt + c_1)\,dt = -g\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \end{aligned}$$

Z počiatočných podmienok $x(0) = h$, $v(0) = v_0$ určíme neznáme konštanty: $c_1 = v_0$, $c_2 = h$:

$$x = \int (-gt + c_1)\,dt = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + h \qquad \diamondsuit$$

Častokrát je úloha zadaná vo viacrozmernom priestore. V takom prípade najskôr zostavíme vektorovú rovnicu, ktorú potom prepíšeme do jednotlivých rozmerov a tie samostatne riešime.

$\boxed{\text{Príklad 2}}$ Častica sa pohybuje z bodu $[0, 0]$ rýchlosťou $\vec{v} = a\vec{i} + bx\vec{j}$. Nájdite jej trajektóriu.

Riešenie: Vektorovú rovnicu napíšeme v algebraickom tvare:

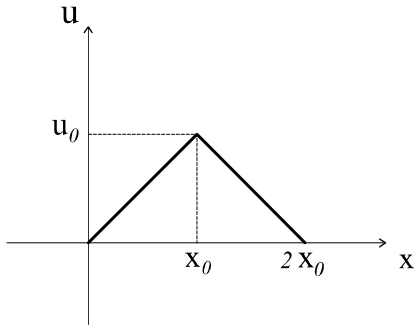
$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = a, \; v_y = \frac{dy}{dt} = bx \\ dx &= adt, \quad dy = bxdt \\ x &= at + c_1 \;\Rightarrow dy = b\,(at + c_1)\,dt \Rightarrow y = ba\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \end{aligned}$$

Z počiatočných podmienok $x\,(0) = y\,(0) = 0$ vypočítame neznáme konštanty: $c_1 = c_2 = 0$:

$$y = ba\frac{t^2}{2} = b\frac{x^2}{2a} \qquad \diamondsuit$$

$\boxed{\text{Príklad 3}}$ Rýchlosť tečenia vody v rieke narastá lineárne z nuly na krajoch, po rýchlosť u_0 v strede rieky. Naprieč riekou sa pohybuje loď, rýchlosťou v. Nájdite trajektóriu lode.

Riešenie: Zvoľme si počiatok súradnicovej sústavy v mieste vyplávania lode, pričom y-ová súradnica je totožná so smerom toku rieky. Profil rýchlosti vody v rieke je znázornený na obr.V.1:



obr. V.1

a možno ho vyjadriť vzťahom:

$$u = u_0 - \frac{u_0}{x_0}\,|x - x_0| \tag{5.1}$$

Riešenie úlohy rozdelíme na dva prípady:

1. *Loď sa pohybuje od okraja po stred rieky* ($x < x_0$). Rýchlosť lode v smere osi x ostáva konštantná $v_x = v \Rightarrow x = vt$ a v smere y:

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u_0}{x_0}x = \frac{u_0}{x_0}vt \\ y &= \frac{1}{2}\frac{u_0 v}{x_0}t^2 + C \end{aligned}$$

Z počiatočných podmienok $y(0) = 0$ určíme konštantu $C = 0$. Na konci prvého úseku ($t = \frac{x_0}{v}$) poloha lode bude:

$$y_0 = \frac{1}{2}\frac{u_0 x_0}{v} \qquad x = x_0$$

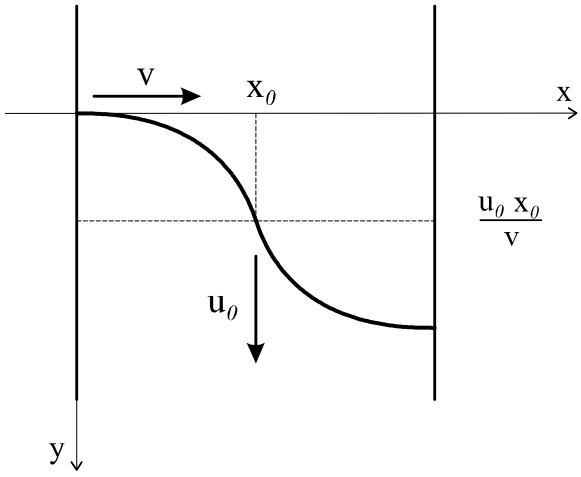
2. *Loď sa pohybuje od stredu rieky po opačný breh* ($x > x_0$). Pre rýchlosť vody platí: $u = 2u_0 - \frac{u_0}{x_0}x$. Postup je analogický ako v predchádzajúcom prípade, pričom musí byť splnená podmienka $y(\frac{x_0}{v}) = \frac{1}{2}\frac{u_0 x_0}{v}$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 2u_0 - \frac{u_0}{x_0}vt \\ y &= 2u_0 t - \frac{1}{2}\frac{u_0 v}{x_0}t^2 + C = 2u_0 t - \frac{1}{2}\frac{u_0 v}{x_0}t^2 - \frac{u_0 x_0}{v} \end{aligned}$$

Loď sa dostane na druhý breh za čas $t = \frac{2x_0}{v}$, a jej nová poloha bude:

$$y(\frac{2x_0}{v}) = \frac{u_0 x_0}{v}$$

Hľadaná trajektória lode je znázornená na obr. V.2.:



obr. V.2

♢

5.1.2 Diferenciálne rovnice so separovanými alebo separovateľnými premennými

Diferenciálna rovnica 1. rádu $\dot{x} = g(x,t)$, v ktorej funkcia $g(x,t)$ je súčinom dvoch funkcií $g(x,t) = f_1(x) f_2(t)$ sa volá rovnica so separovateľnými premennými. Stratégia riešenia je veľmi jednoduchá. Rovnicu upravíme tak, aby každá strana obsahovala iba jednu premennú:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x)\, f_2(t) \\ \frac{dx}{f_1(x)} &= dt\, f_2(t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Premenné sú oddelené (separované), preto hovoríme, že rovnica (5.2) je rovnicou so separovanými premennými. Jej riešenie získame zintegrovaním oboch strán rovnice:

$$\int \frac{dx}{f_1(x)} = \int dt\, f_2(t) \tag{5.3}$$

$\boxed{\text{Príklad 4}}$ Častica sa začala v čase $t = 0$ pohybovať po priamke rýchlosťou $v(x) = \alpha\sqrt{x}$. Za aký čas t_1 sa dostane z bodu 0 do bodu x_1?

Riešenie:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int \alpha dt \\ 2\sqrt{x} &= \alpha t + c \end{aligned}$$

Z počiatočnej podmienky $x(0) = 0$ určíme neznáme konštanty: $c = 0 \Longrightarrow t_1 = \frac{2\sqrt{x_1}}{\alpha}$ ♢

$\boxed{\text{Príklad 5}}$ Jeden z prvých modelov voľného pádu bol založený na predpoklade, že rýchlosť telesa je priamo-úmerná prejdenej dráhe $v = ks$. Ukážte, že tento model je teoreticky rozporný.

Riešenie: Pohybová rovnice voľne padajúceho telesa bude mať podľa modelu tvar:

$$\frac{ds}{dt} = ks$$

Postupnými úpravami

$$\begin{aligned} \int \frac{ds}{s} &= \int k dt \\ \ln|s| &= kt + c_1 \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ |s| &= e^{c_1} e^{kt} \qquad e^{c_1} = A \in \mathbb{R}^+ \\ s &= Ae^{kt} \quad A \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

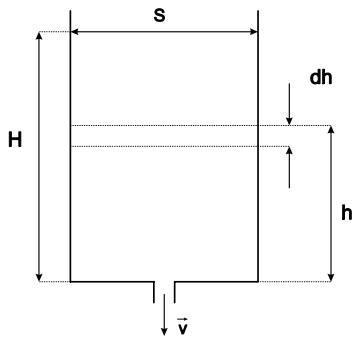
a dosadením počiatočnej podmienky $s(0) = 0$ určíme konštantu $A = 0$, čo vedie k záveru, že teleso sa nepohne $s \equiv 0$. Táto skutočnosť je však v rozpore s experimentom a preto použitý model je nesprávny.[5] ♢

[5] Mohli sme samozrejme postupovať aj "derivačnou" metódou a určiť silu, ktorá by musela pôsobiť na teleso, aby model bol správny.

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}(ks) = mkv$$

Na nepohybujúce teleso ($v = 0$) by pôsobila nulová sila, čo je v rozpore so skutočnosťou.

Príklad 6 Vo valcovej nádobe s prierezom S siaha kvapalina do výšky H. Určte čas, za aký vytečie voda z nádoby cez otvor s prierezom s (obr.V.3)! Nájdite taký tvar nádoby, aby hladina kvapaliny klesala s konštantnou rýchlosťou.



obr. V.3

Riešenie: Zo zákona zachovania energie pre rýchlosť výtoku kvapaliny dostaneme Torricelliho vzťah $v = \sqrt{2gh}$. Za čas dt vytečie z nádoby objem $dV = sv\,dt$, ktorý sa rovná úbytku objemu kvapaliny v nádobe: $dV = -S\,dh \Longrightarrow -S\,dh = sv\,dt$. Separáciou premenných a dosadením rýchlosti v :

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\,dt \quad \Longrightarrow 2\sqrt{h} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}t + c = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}t + 2\sqrt{H} \qquad (5.4)$$

Neznámu konštantu $c = 2\sqrt{H}$ sme určili z počiatočnej podmienky $h\,(0) = H$. Kvapalina vytečie z nádoby práve vtedy, keď $h = 0 \Longrightarrow t = 2\frac{S}{s}\sqrt{\frac{H}{2g}}$.

Aby rýchlosť poklesu hladiny bola konštantná $\frac{dh}{dt} = a$, potom podľa rovnice (5.4)[6] musí platiť:

$$\begin{aligned} \sqrt{h} &= -\frac{\pi x^2}{s\sqrt{2g}}a \\ h &= \frac{a^2\pi^2}{2gs^2}x^4 \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Príklad 7 Predpokladajme, že teplota vzduchu v atmosfére sa mení lineárne z hodnoty $T_1 = 300\,K$ vo výške $z_1 = 0\,m$ na $T_2 = 250\,K$ vo výške $z_2 = 10km$. Vypočítajte čas t, za ktorý sa zvuk rozšíri z výšky z_2 na zemský povrch. Pre rýchlosť zvuku platí: $v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}$ (viď. kapitola 9)

[6] Prierez $S(x) = \pi x^2$

$\boxed{\text{Príklad 8}}$ Rozdeľme celú výšku z na infinitenzimálne elementy dz, cez ktoré prejde zvuková vlna za čas

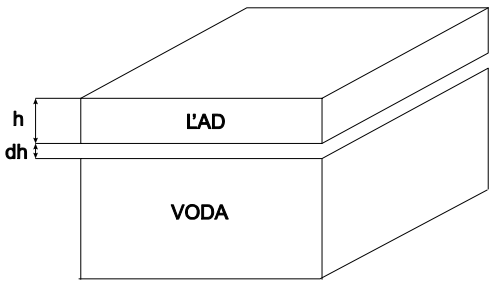
$$dt = \frac{dz}{v} = \frac{dz}{\sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}}$$

Teplota sa v atmosfére mení lineárne: $T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{z_2} z = T_1 + \alpha z$. Po menších úpravách:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dz}{\sqrt{\frac{\kappa R}{M}\left(T_1 + \alpha z\right)}} \\ \int_0^t dt &= \int_{z_2}^0 \frac{dz}{\sqrt{\frac{\kappa R}{M}\left(T_1 + \alpha z\right)}} \\ t &= \frac{2}{\alpha}\left[\sqrt{T_1} - \sqrt{T_1 + \alpha z_2}\right]\sqrt{\frac{M}{\kappa R}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Príklad 9}}$ Nájdite ako narastá hrúbka ľadu na hladine rybníka. Určte za aký čas sa vytvorí $10\,cm$ vrstva ľadu. (obr.V.6)

Riešenie: Predpokladajme, že ľad vzniká na hladine jazera, kde teplota je rovná teplote fázového prechodu t.j 0^0C. Merné skupenské teplo topenia je l, koeficient tepelnej vodivosti λ a hustota vody ρ. V mieste, v ktorom sa mení voda na ľad sa uvoľňuje tepelná energia $dQ = ldm = l\rho Sdh$.



obr. V.6

Toto teplo sa musí odvádzať cez vytvorenú vrstvu ľadu podľa vzťahu $\frac{dQ}{dt} = \lambda S \frac{\Delta T}{h}$. Porovnaním oboch rovníc a separovaním premenných:

$$\int_0^h hdh = \frac{\lambda \Delta T}{l\rho}\int_0^t dt$$

Po integrácii

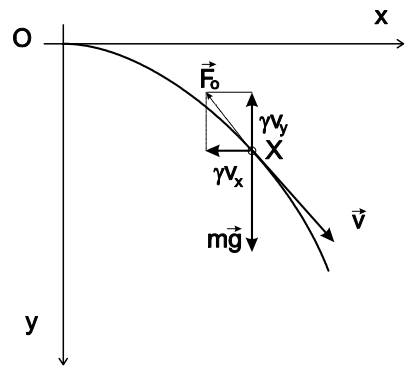
$$h(t) = \sqrt{\frac{2\lambda\Delta T}{l\rho}}\sqrt{t}$$

Vidíme, že hrúbka ľadu najskôr s časom prudko narastá, neskôr sa však nárast spomaľuje, pretože odvod tepla prebieha väčšou vrstvou ľadu. ♢

Vyšetrime pohyb v dvojrozmernom priestore:

Príklad 10 Nájdite trajektóriu vodorovne vrhnutého telesa vo vzduchu. Odpor prostredia je priamo úmerný okamžitej rýchlosti

Riešenie:



obr. V.4

Napíšme pohybovú rovnicu v súradnicovej sústave znázornenej podľa obr.V.4:

$$m\frac{d}{dt}\vec{v} = m\vec{g} - \gamma\vec{v}$$

a rozpíšme ju na jednotlivé zložky:

$$m\frac{d}{dt}v_x = -\gamma v_x \implies \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\gamma}{m}dt \tag{5.5}$$

$$m\frac{d}{dt}v_y = mg - \gamma v_y \implies \frac{dv_y}{g - \frac{\gamma}{m}v_y} = dt \tag{5.6}$$

Dosadením počiatočných podmienok $v_x(0) = v_0$, $v_y(0) = 0$, nájdeme jednotlivé zložky rýchlosti:

$$v_y = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right) \tag{5.7}$$

$$v_x = v_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) \tag{5.8}$$

Rovnicu trajektórie získame ďalšou integráciou:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) \quad \text{resp.} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right)$$

Z počiatočných podmienok $x(0) = y(0) = 0$ určíme neznáme konštanty:

$$x = \frac{m}{\gamma}v_0\left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right) \tag{5.9}$$

$$y = \frac{mg}{\gamma}t - \frac{m^2 g}{\gamma^2}\left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right) \tag{5.10}$$

Rovnice (5.9) a (5.10) sú parametrickým rovnicami trajektórie pohybu telesa pri vodorovnom vrhu v odporovom prostredí. Vyjadrenie $y = f(x)$ je značne zložité: Z rovnice (5.9) určíme čas $t = -\frac{m}{\gamma}\ln\left(1 - \frac{\gamma}{mv_0}x\right)$ a dosadíme ho do (5.10):

$$y = -\frac{m^2 g}{\gamma^2}\ln\left[\left(1 - \frac{\gamma}{mv_0}x\right)\exp\left(\frac{\gamma}{mv_0}x\right)\right] \tag{5.11}$$

Posledná rovnica sa nazýva rovnica balistickej krivky. ♢

Vo fyzike sa často stretneme s prípadmi, keď diferenciálne rovnice sú zadané v tvare diferenciálov:

$\boxed{\text{Príklad 11}}$ Nájdite závislosť tlaku a objemu pri adiabatickom deji.

Riešenie: Teplo δQ dodané 1 molu ideálneho plynu možno vyjadriť podľa 1. vety termodynamickej a stavovej rovnice:

$$\delta Q = pdV + C_v dT \tag{5.12}$$

$$pV = RT \implies pdV + dpV = RdT \tag{5.13}$$

Pri adiabatickom deji je sústava tepelne izolovaná $\delta Q = 0$. Upravme tieto rovnice a vylúčme teplotu T :

$$C_v pdV + VC_v dp = -RpdV \tag{5.14}$$

Zavedením Poissonovej konštanty $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ a použitím Mayerovho vzťahu $C_v + R = C_p$ separujme premenné:

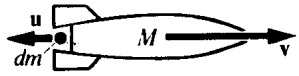
$$\kappa\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \tag{5.15}$$

$$pV^\kappa = konšt \tag{5.16}$$

♢

Príklad 12 Nájdite najvhodnejšie parametre dvojstupňovej rakety, ktorá má vyniesť do vesmíru teleso s hmotnosťou $M_0 = 500kg$, pričom po vyhorení paliva má dosiahnuť konečnú rýchlosť $v = 8km/s$. Rýchlosť unikania plynu z motorov vzhľadom na raketu je $u' = 2km/s$. Predpokladajte, že hmotnosť každého stupňa rakety z konštrukčných dôvodov predstavuje 10 percent hmotnosti paliva.

Riešenie: Najskôr odvoďme pohybovú rovnicu pre raketu. Predpokladajme, že v čase t má hmotnosť $M(t)$ a rýchlosť $\vec{v}$. Vypudením paliva s hmotnosťou dM' a rýchlosťou $\vec{u}$ sa zmenší hmotnosť rakety na $M - dM'$ a rýchlosť sa zmení na $\vec{v} + d\vec{v}$. (obr.V.5).



obr. V.5

Zo zákona zachovania hmotnosti a hybnosti ďalej platí:

$$\begin{aligned} dM + dM' &= 0 \\ (M - dM)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u}dM' &= M\vec{v} \end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami, zanedbaním nekonečne malého člena druhého rádu $d\vec{v}\,dM$ a nahradením $dM' \to -dM$:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{u} - \vec{v})\frac{dM}{dt} = \vec{u}'\frac{dM}{dt}$$

kde $\vec{u}'$ je rýchlosť výtoku plynu vzhľadom na raketu. Ide o separovateľnú DR, ktorú prepíšeme do algebraického tvaru:

$$\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M} = -\frac{1}{u'}\int_{v_0}^{v} dv$$

a nájdeme jej riešenie:

$$v = v_0 + u' \ln \frac{M_0}{M} \tag{5.17}$$

Nech M_1 a M_2 sú hmotnosti paliva prvého a druhého stupňa rakety. Jej počiatočná hmotnosť $m_0 = M_0 + 1,1\,(M_1 + M_2)$ sa po zhorení prvého stupňa zmenší na $m_1 = M_0 + 1,1\,M_2 + 0,1\,M_1$ a raketa získa rýchlosť (5.17) $v_1 = u' \ln \frac{m_0}{m_1}$. Druhý stupeň začne pracovať po odpojení palivového zásobníka prvého stupňa. Ďalšie zrýchľovanie rakety sa zahajuje po nadobudnutí hmotnosti $m_2 = M_0 + 1,1\,M_2$ a končí, pri hmotnosti $m_3 = M_0 + 0,1\,M_2$. Raketa získa konečnú rýchlosť (5.17) $v_2 = v_1 + u' \ln \frac{m_2}{m_3} = u' \ln \left[\frac{m_0 m_2}{m_1 m_3}\right]$. Po úpravách

$$m_0\left(\frac{11}{m_3} - \frac{e^4}{m_2}\right) = m_0\left(\frac{11}{M_0 + 0,1M_2} - \frac{\exp(4)}{M_0 + 1,1M_2}\right) = 10\exp(4)$$

Počiatočná hmotnosť rakety m_0 bude minimálna, ak výraz v zátvorke bude maximálny. Z podmienok extrému vyplynie:

$$\frac{M_0 + 1,1M_2}{M_0 + 0,1M_2} = \exp(2) \Longrightarrow M_2 = M\left(\exp(2) - 1\right) / \left(1,1 - 0,1\exp(2)\right) = 8800kg$$

a preto $m_0 = 209400\,kg$, $M_1 = 181000\,kg$. ♢

5.2 Lineárne diferenciálne rovnice

Diferenciálne rovnice typu:

$$a_n(x)\,y^n + a_{n-1}(x)\,y^{n-1} + a_{n-2}(x)\,y^{n-2} + a_{n-3}(x)\,y^{n-3} + ...a_0(x)\,y = g(x) \tag{5.18}$$

kde $a_i(x)$ sú funkcie, nazývame lineárne diferenciálne rovnice $n - tého$ rádu. Ak jej pravá strana je nulová $g(x) = 0$, diferenciálna rovnica je *homogénna,* v opačnom prípade je nehomogénna. Ak funkcie a_i sú konštanty, hovoríme o lineárnych diferenciálnych rovniciach s konštantnými koeficientami. Napriek svojej jednoduchosti sú vo fyzike veľmi časté[7]. Základné vlastnosti lineárnych diferenciálnych rovníc odvodíme z dvoch nasledovných viet a ich dôsledkov:

- *Veta. 1 (Cauchyho veta): Lineárna diferenciálna rovnica s danými počiatočnými podmienkami má jednoznačné riešenie t.j. riešenie existuje a je práve jedno.*
- *Veta 2: Nech y_1 a y_2 sú riešeniami diferenciálnej rovnice (5.18) s rôznymi pravými stranami $g_1(x)$, $g_2(x)$, potom ich lineárna kombináciou $y = c_1y_1 + c_2y_2$ je tiež riešením lineárnej DR (5.18) s pravou stranou $g(x) = c_1g_1(x) + c_2g_2(x)$.*

Poznámka: Toto tvrdenie úzko súvisí s princípom superpozície, s ktorým sa stretávame v mnohých fyzikánych disciplínach. Uveďme aspoň niekoľko známych príkladov. Ak sila F_1 vyvolá kmity s výchylkou y_1 a sila F_2 kmity s výchylkou y_2, z experimentov vieme, že výsledná sila $F = F_1 + F_2$ vyvolá kmity s výchylkou $y = y_1 + y_2$[8]. Podobne, ak náboj Q_1 vytvorí elektrické pole s intenzitou $\overrightarrow{E_1}$ a náboj Q_2 elektrické pole s intenzitou $\overrightarrow{E_2}$, z experimentov opäť vyplýva,

[7] Explicitná závislosť koeficientov a_i na čase by sa dala chápať ako závislosť danej rovnice, t.j. fyzikálneho zákona, na čase. Fyzikálny zákon by mal byť platný v každom čase (dnes, zajtra, o niekoľko rokov).

[8] Predpokladáme, že sily $\vec{F}_1 \uparrow\uparrow \vec{F}_2$

že náboj $Q_1 + Q_2$ vytvorí elektrické pole s intenzitou $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$. To sú však vlastnosti, ktorými sa vyznačujú iba lineárne rovnice. Ak je princíp superpozície experimentálne zaručený, musia byť príslušné javy popísané lineárnymi dif. rovnicami. Princíp superpozície v elektrodynamike vyplýva z lineárnosti Maxwelových rovníc, princíp superpozície v kvantovej mechanike z lineárnosti Schrodingerovej rovnice.

Dôsledok 1: (dôsledok pre homogénnu lineárnu DR $g(x) = 0$). *Ak y_1 a y_2 sú riešeniami homogénnej diferenciálnej rovnice, potom ich lineárna kombinácia $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ je tiež riešením tejto rovnice.*

Dôsledok 2: Ak y_h je riešením homogénnej rovnice a y_p je riešením tej istej dif. rovnice s pravou stranou $g(x)$, potom ich súčet $y = y_h + y_p$ je všeobecným riešením lineárnej dif. rovnice s pravou stranou.

Podľa tohto dôsledku je možná nasledovná stratégia riešenia DR: Ak nájdeme jedno riešenie danej nehomogénnej rovnice y_p potom stačí vyriešiť príslušnú homogénnu rovnicu a jej všeobecné riešenie y_h pripočítame k y_p. Cauchyho veta nám zase zabezpečuje, že už iné riešenie neexistuje.

Partikulárne riešenia y_p sa naučíme hľadať tromi metódami : variáciou konštánt, metódou neurčitých koeficientov a prechodom do komplexnej roviny.

5.2.1 Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu

Všeobecný tvar takejto DR je: $a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = g(x)$. Ak $a_1(x) \neq 0$ potom:

$$y' + P(x)\, y = Q(x) \tag{5.19}$$

kde $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, $Q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$. Rovnicu budeme riešiť v dvoch krokoch:

i) najskôr vyriešime homogénnu rovnicu metódou separácie premenných:

$$y' + P(x)\, y = 0 \tag{5.20}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\, dx \tag{5.21}$$

$$y_h = A \exp\left(-\int P(x)\, dx\right) \tag{5.22}$$

ii) Na hľadanie partikulárneho riešenia použijeme metódu variácie konštánt, s ktorou sa podrobnejšie zoznámime v ďalšej kapitole. Základná myšlienka spočíva v tom, že konštantu A v homogennom riešení (5.22) zameníme za funkciu $A(x)$, čiže:

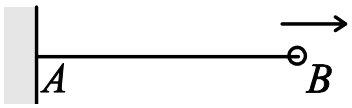
$$y = A(x) \exp\left(-\int P(x)\, dx\right) \tag{5.23}$$

Dosadením do (5.19) po úpravách:

$$\begin{aligned}
Q(x) &= A^{\prime}(x)\exp\left(-\int P(x)\,dx\right)\\
\int dA &= \int Q(x)\exp\left(\int P(x)\,dx\right)dx\\
A(x) &= \int Q(x)\exp\left(\int P(x)\,dx\right)dx + C\\
y &= A(x)\exp\left(-\int P(x)\,dx\right) =\\
&= \left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx\right]e^{-\int P(x)dx} + ce^{-\int P(x)dx} \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Príklad 13}}$ Máme $L_0 = 1m$ kvalitného gumového lana - tak kvalitného, že sa všade naťahuje rovnako. Jeho ľavý koniec A je pevne uchytený a pravý koniec sa začne od určitého okamihu pohybovať rýchlosťou $v_B = 10\,\mathrm{m/s}$. V tom istom okamihu začne liezť mucha z bodu A po lane rýchlosťou $v_m = 1\,\mathrm{m/s}$ (voči lanu). Dolezie mucha do bodu B? Ak áno, kedy?

Riešenie:



Rýchlosť ľubovoľného miesta x lineárne stúpa z nulovej hodnoty v bode A na hodnotu v_B v mieste B :

$$v(x) = \frac{v_B}{L_0 + v_B t}x$$

Rýchlosť muchy v bode x:

$$v = \dot{x} = \frac{v_B}{L_0 + v_B\,t}x + v_m \qquad (5.25)$$

Dostali sme nehomogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu, ktorú vyriešime v dvoch krokoch. Najskôr nájdeme homogénne riešenie. Po separácii premenných:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{v_B}{L_0 + v_B t}dt && (5.26)\\
\ln|x| &= \ln|L_0 + v_B t| + \ln|c| && (5.27)\\
x &= c(L_0 + v_B t) && (5.28)
\end{aligned}$$

V ďalšej časti sa na konštantu c budeme pozerať ako na funkciu $c(t)$:

$$x = c(t)(L_0 + v_B t) \tag{5.29}$$

$$\dot{x} = \dot{c}(L_0 + v_B t) + c(t) v_B \tag{5.30}$$

Dosadením do (5.25) a úpravami :

$$\dot{c} = \frac{v_m}{L_0 + v_B t} \tag{5.31}$$

$$c(t) = \frac{v_m}{v_B} \ln |L_0 + v_B t| + K \tag{5.32}$$

získame všeobecné riešenie:

$$x(t) = \frac{v_m}{v_B} \ln |L_0 + v_B t| (L_0 + v_B t) + K (L_0 + v_B t) \tag{5.33}$$

Konštantu K určíme z počiatočnej podmienky $x(0) = 0 \Rightarrow K = -\frac{v_m}{v_B} \ln |L_0|$. Mucha dosiahne koniec lana vtedy, keď

$$x(t) = L_0 + v_B t$$

Z čoho pre čas t vyplýva:

$$t = \frac{L_0 \left[\exp\left(\frac{v_B}{v_m}\right) - 1\right]}{v_B}$$

♢

$\boxed{\text{Príklad 14}}$ Za aký čas sa teleso zohriate na $T_0 = 100^0 C$ ochladí na $25^0 C$, keď sa za 10 minút ochladilo na $60^0 C$? V miestnosti je udržiavaná konštantná teplota $T_m = 20^0 C$. Predpokladajte, že rýchlosť ochladzovania je úmerná rozdielu teplôt!

Riešenie: Podľa predpokladov úlohy :

$$\dot{T} = k[T_m - T(t)] \Rightarrow \dot{T} + kT(t) = kT_m \tag{5.34}$$

Pomocou homogénneho riešenia $T_h = A \exp(-kt)$ nájdeme všeobecné

$$T = T_m + (T_0 - T_m) \exp(-kt)$$

Po dosadení zadaných hodnôt zistíme, že teleso sa ochladí za $t = 40\,\text{min}$. ♢

5.2.2 Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov

Homogénne linárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami

Budeme sa zaoberať rovnicami druhého rádu:

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{5.35}$$

Riešenie hľadajme v tvare

$$y = A \exp(\alpha x) \tag{5.36}$$

Dôvodov je niekoľko:

i) podľa Cauchyho vety o jednoznačnosti, ak nájdeme akýmkoľvek regulérnym spôsobom riešenie (s danou počiatočnou podmienkou), potom už iné neexistuje. Naša stratégia je založená na tipovaní. Ak náš tip na riešenie (5.35) nevýjde, skúsime iný

ii) derivácia exponenciálnej funkcie je opäť exponenciála, a preto každý člen rovnice ju bude obsahovať. DR sa zmenia na algebraické, ktoré už riešiť vieme.

Skutočne, po dosadení (5.36) do (5.35):

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \tag{5.37}$$

pričom

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{5.38}$$

Algebraickú rovnicu (5.37) nazývame *charakteristickou.* Tvar všeobecného riešenia závisí od povahy koreňov $\alpha_{1,2}$. Môžu nastať tri prípady, ktoré samostatne vyšetríme:

PRÍPAD 1. Oba korene charakteristickej rovnice (5.37) sú reálne, t.j $a^2 - 4b > 0$ potom dosadením do (5.36) a využitím princípu superpozície všeobecné riešenie má tvar:

$$y = c_1 \exp\left[\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} x\right] + c_2 \exp\left[\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} x\right] \tag{5.39}$$

$\boxed{\text{Príklad 15}}$ Vyriešte $y'' - y' - 2y = 0$ s počiatočnou podmienkou: $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$

Riešenie: Charakteristická rovnica $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ má koreň $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$: $y = c_1 \exp(2x) + c_2 \exp(-x)$. Dosadením počiatočných podmienok $c_1 = 1$ a $c_2 = 2$:

$$y = \exp(2x) + 2\exp(-x) \qquad \diamondsuit$$

PRÍPAD 2. Charakteristická rovnica (5.37) má dvojnásobný koreň $\alpha_{1,2} = -\frac{a}{2}$, to znamená: $a^2 - 4b = 0$ a riešenie (5.36) by mohlo byť:

$$y = c_1 \exp\left(-\frac{a}{2}x\right)$$

Tú však treba určiť z dvoch nezávislých počiatočných podmienok, čo vo všeobecnosti nie je možné.

$\boxed{\text{Príklad 16}}$ Vyriešte DR $y'' - 4y' + 4y = 0$ s počiatočnými podmienkami: $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

Riešenie: Charakteristická rovnica $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ má koreň $\alpha_{1,2} = 2$ a riešenie $y = c_1 \exp(2x)$. Z prvej počiatočnej podmienky dostaneme $c_1 = 2$ z druhej $c_1 = \frac{3}{2}$ čo nemožno splniť súčastne. $\diamondsuit$

Neúspech v predchádzajúcom príklade bol spôsobené tým, že riešenie nie je úplné, potrebujem nájsť jeho "druhú časť". Použime metódu variácie konštánt a na konštantu A začnime hľadieť ako na funkciu. Dosadením (5.36) do (5.35) a postupným preskupením členov :

$$A'' + A'[2\alpha + a] + A\left[\alpha^2 + a\alpha + b\right] = 0 \tag{5.40}$$

Obe zátvorky sú nulové a $A'' = 0 \Rightarrow A = c_1 + c_2 x$. Všeobecné riešenie(5.36) bude mať tvar :

$$y = c_1 \exp\left(-\frac{a}{2}x\right) + c_2 x \exp\left(-\frac{a}{2}x\right) \tag{5.41}$$

Tento poznatok zovšeobecníme do nasledovnej vety:

Veta. Ak α je $m-$násobným koreňom rovnice (5.18), potom okrem funkcie $\exp(\alpha x)$ *sú riešeniami danej rovnice aj funkcie* $x\exp(\alpha x)$, $x^2\exp(\alpha x)$, ...,$x^{m-1}\exp(\alpha x)$ *a všeobecné riešenie je ich lineárnou kombináciou:*

$$y = c_1 \exp(\alpha x) + c_2 x \exp(\alpha x) + ... + c_m x^{m-1} \exp(\alpha x)$$

Použitie vety ukážme v nasledovnom príklade:

$\boxed{\text{Príklad 17}}$ Nájdite všeobecné riešenie $y''' = 0$

Riešenie: Charakteristická rovnica vedie k trojnásobnému koreňu $\alpha = 0$ a podľa vety všeobecné riešenie bude mať tvar: $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ $\diamondsuit$

PRÍPAD 3. Korene charakteristickej rovnice nie sú reálne, t.j. $a^2 - 4b < 0$ Pre charakteristický koreň dostaneme:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} = -\gamma \pm i\delta \tag{5.42}$$

a

$$y = c_1 \exp\left[(-\gamma + i\delta)\, x\right] + c_2 \exp\left[(-\gamma - i\delta)\, x\right] \tag{5.43}$$

Tento výsledok je na prvý pohľad neprehľadný a preto ho upravme. Využitím Eulerovho vzťah:

$$\begin{aligned} y &= \exp(-\gamma x)\left[c_1(\cos\delta x + i\sin\delta x) + c_2(\cos\delta x - i\sin\delta x)\right] = \\ &= \exp(-\gamma x)\left[A\cos\delta x + B\sin\delta x\right] \end{aligned} \tag{5.44}$$

kde $A = (c_1 + c_2)$ a $B = i(c_1 - c_2)$, ktoré sú vo všeobecnosti komplexné. Ak sú počiatočné podmienky reálne, čo je prípad všetkých fyzikálnych úloh, potom aj konštanty A, B sú reálne.[9] Rovnicu (5.44) možno za tohto predpokladu ďalej upraviť:

$$\begin{aligned} y &= \exp(-\gamma x)\sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos\delta x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin\delta x\right) \\ y &= D\exp(-\gamma x)\left(\cos\varphi\cos\delta x + \sin\varphi\sin\delta x\right) \end{aligned} \tag{5.45}$$

kde $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\varphi$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\varphi$ a $\sqrt{A^2 + B^2} = D$. Zo súčtových vzorcov[10]

$$y = D\exp(-\gamma x)\cos(\delta x - \varphi) \tag{5.46}$$

Mali by sme si zvyknúť na všetky tri zápisy všeobecného riešenia (5.44), (5.45), (5.46), pretože sa v praxi často vyskytujú.

$\boxed{\text{Príklad 18}}$ Vyšetrite pohyb tlmeného oscilátora bez vynucujúcej sily

Riešenie: Pohybová rovnica má tvar : $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$. Zavedením premenných $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a $\lambda = \frac{\gamma}{2m}$ nájdeme charakteristické korene:

$$\alpha_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Budeme rozoznávať tri prípady:

[9] Nech $y(0) = \mathrm{Re}_1$ potom $c_1 + c_2 = \mathrm{Re}_1$. Z druhej počiatočnej podmienky $y'(0) = \mathrm{Re}_2$ vyplýva $-\gamma(c_1 + c_2) + i\delta(c_1 - c_2) = \mathrm{Re}_2$. Konštanty c_1 a c_2 sú komplexne združené, pretože ich súčet je rýdzo reálny a rozdiel rýdzo imaginárny.

[10] $\cos\varphi\cos\delta x + \sin\varphi\sin\delta x = \cos(\delta x - \varphi)$

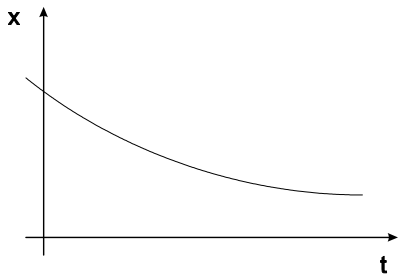
PRÍPAD 1: Oba korene charakteristickej rovnice sú reálne: $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$. Ide o silné tlmenie a pre výchylky platí :

$$x = A \exp\left[\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right) t\right] + B \exp\left[\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right) t\right] \tag{5.47}$$

Hodnoty konštant A, B sa určia z počiatočných podmienok. Ak predpokladáme, že obe čísla A, B sú kladné, potom rýchlosť v je záporná[11]:

$$v = \frac{dx}{dt} = \exp(-\lambda t)\left[A\alpha_1 \exp\left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\, t\right) + B\alpha_2 \exp\left(-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\, t\right)\right] < 0 \tag{5.48}$$

a výchylka monotónne klesá $x \to 0$ (obr. V.7).



obr. V.7

K rovnakému výsledku by sme prišli, ak by obe konštanty A, B boli záporné. Na záver predpokladajme, že konštanty A, B majú opačné znamienka. Potom podľa rovnice (5.47) teleso prechádza cez rovnovážnu polohu $x = 0$ iba v jedinom čase t_0:

$$t = t_0 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \ln\left(-\frac{B}{A}\right). \tag{5.49}$$

a zastaví sa ($v = \frac{dx}{dt} = 0$) tiež iba v jedinom čase t_1 :

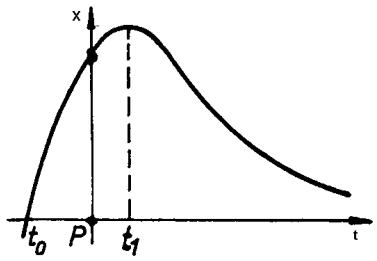
$$t = t_1 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \ln\left[-\frac{B\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)}{A\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)}\right] \tag{5.50}$$

Porovnaním oboch výrazov $t_1 < t_0$ je zrejmé, že rýchlosť zmení znamienko iba raz.

Záver:

→Ak $x < 0$ v čase $t < t_0$, potom $x > 0$ v čase $t > t_0$. Výchylka stále stúpa a teleso sa zastaví v čase $t = t_1$, potom už len klesá ($x > 0$) a limitne sa blíži k rovnovážnej polohe (obr. V.8).

[11] $\alpha_1,\ \alpha_2 < 0$



obr. V_8

→*Ak $x > 0$ v čast $t < t_0$ potom $x < 0$ v čase $t > t_0$. Výchylka klesá, v čase $t = t_1$ sa teleso zastaví a začne sa limitne blížiť do rovnovážnej polohy. Pohyb v oboch prípadoch je aperiodický*

PRÍPAD 2: Charakteristická rovnica má dvojnásobný koreň: $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$ $x = c_1 \exp(\alpha_1 t) + c_2 t \exp(\alpha_1 t)$. Diskusia dáva podobné výsledky ako v predchádzajúcom prípade. Stačí si uvedomiť, že podľa L'Hospitalovho pravidla:

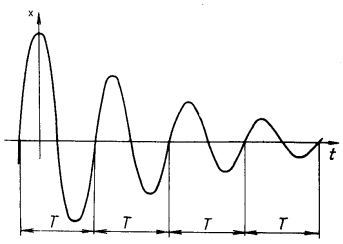
$$\lim_{t\to\infty} [t \exp(-\lambda t)] = 0$$

Pohyb je opäť aperiodický. Hovoríme, že sa jedná o kritické tlmenie.

PRÍPAD 3: Charakteristická rovnica má komplexné korene: $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$. Ide o periodický pohyb a všeobecné riešenia napíšeme vo všetkých troch tvaroch (5.44), (5.45), (5.46):

$$\begin{aligned} x &= c_1 \exp \alpha_1 t + c_2 \exp \alpha_2 t = \\ &= \exp(-\lambda t) \left[A \cos \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + B \sin \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right] = \\ &= D \exp(-\lambda t) \left[\cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t - \varphi \right) \right] \end{aligned} \tag{5.51}$$

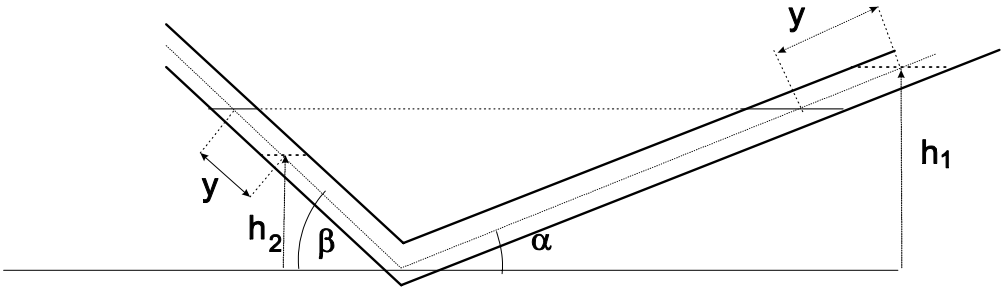
Hoci funkcia $x(t)$ je neperiodická, má zmysel hovoriť o perióde, pretože lokálne maximá a minimá sa periodicky opakujú s periódou $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Tá sa líši od periódy vlastných kmitov oscilátora $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Podobne má zmysel hovoriť o amlitúde, ak pod ňou rozumieme absolútnu hodnotu funkcie v lokálnych extrémoch. Amplitúda potom exponenciálne klesá: $D \exp(-\lambda t)$ (obr.V.9). Konštanty určíme z počiatočných podmienok



obr. V.9

◇

Príklad 19 V sklenenej trubici konštantného prierezu je kvapalina s hustotou ρ, s dĺžkou kvapalinového stĺpca l (obr.V.10) Po vychýlení stĺpca z rovnovážnej polohy o l_0 začne kmitať. Zanedbajte trecie a kapilárne sily a vypočítajte časový priebeh tejto výchylky.



obr. V.10

Riešenie: Kmitavý pohyb spôsobuje sila, ktorá sa rovná hydrostatickej tlakovej sile

$$S\left(h_1 - h_2\right)\rho g = S\rho g\left(y\sin\alpha + y\sin\beta\right)$$

Je orientovaná proti vychýleniu kvapaliny a pohybová rovnica nadobudne tvar:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -Sg\rho y\left(\sin\alpha + \sin\beta\right)$$

Keďže hmotnosť kvapaliny $m = S\rho l$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{h}{l}\left(\sin\alpha + \sin\beta\right)y$$

čo je DR harmonických kmitov. Výslednú výchylku zapíšeme v tvare (5.46)

$$y = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{h}{l}\left(\sin\alpha + \sin\beta\right)}t + \delta\right)$$

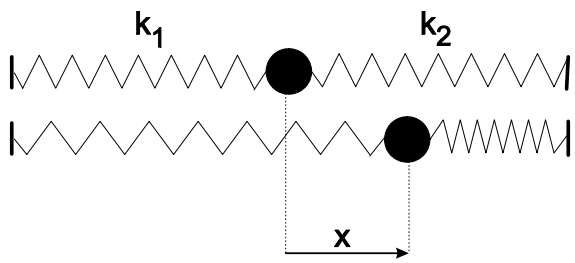
Po dosadení počiatočných podmienok $y(0) = l_0$, $\dot{y}(0) = 0$:

$$y = l_0\cos\left(\sqrt{\frac{h}{l}\left(\sin\alpha + \sin\beta\right)}t\right)$$

$\diamondsuit$

Príklad 20 Teleso s hmotnosťou m je pripevnené na pružinách s tuhosťami k_1 a k_2. V čase $t = 0\,s$ sme ho vychýlili z rovnovážnej polohy do vzdialenosti l_0. Nájdite jeho polohu v ľubovoľnom čase.

Riešenie:



Nech je teleso v čase t vychýlené z rovnovážnej polohy o vzdialenosť x. Pohybová rovnica bude mať tvar:

$$m\ddot{x} = -k_1 x - k_2 x = -\left(k_1 + k_2\right) x$$

čo vedie k riešeniu $x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} t + \varphi\right)$. Dosadením počiatočných podmienok $x\left(0\right) = l_0$, $\dot{x}(0) = 0$ nájdeme polohu telesa v ľubovoľnom čase:

$$x = l_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

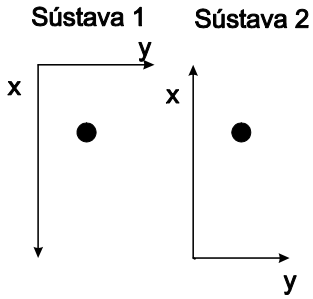
$\diamondsuit$

Znižovanie rádu diferenciálnych rovníc

Diferenciálne rovnice nižších rádov sa mnohokrát ľahšie riešia a preto DR vyšších rádov sa vhodnými substitúciami na ne prevádzajú.

$\boxed{\text{Príklad 21}}$ Vyšetrite rýchlosť telesa pri voľnom páde v odporujúcom prostredí.

Riešenie: Pri malých rýchlostiach je odporová sila úmerná prvej mocnine v, pri veľkých rýchlostiach jej druhej mocnine. Dôležitou časťou riešenia úloh z dynamiky je správne zostavenie pohybových rovníc. Rovnice sú závislé od voľby a orientácie osí súradnicového systému. Uvažujme o dvoch sústavách s opačnými orientáciami osi y (obr.V.11) a zostavme pohybové rovnice pre padajúce ako aj vrhnuté teleso smerom nahor



obr. V.11

$\left\lvert\overrightarrow{F_o}\right\rvert = \gamma v$	pád nadol	vrh nahor
Sústava č.1	$m\,\ddot{x} = +mg - \gamma\,\dot{x}$	$m\,\ddot{x} = +mg - \gamma\,\dot{x}$
Sústava č.2	$m\,\ddot{x} = -mg - \gamma\,\dot{x}$	$m\,\ddot{x} = -mg - \gamma\,\dot{x}$

$\left\lvert\overrightarrow{F_o}\right\rvert = \gamma v^2$	pád nadol	vrh nahor
Sústava č.1	$m\,\ddot{x} = +mg - \gamma v^2$	$m\,\ddot{x} = +mg + \gamma v^2$
Sústava č.2	$m\,\ddot{x} = -mg + \gamma v^2$	$m\,\ddot{x} = -mg - \gamma v^2$

Odporová sila je vždy opačne orientovaná, ako vektor rýchlosti. V druhom prípade je výraz $\gamma v^2 \geqslant 0$ a preto správnu orientáciu odporovej sily musíme „umelo dorábať„ podľa aktuálnej situácie. Voľný pád telesa vyšetrime v súradnicovom systéme 2:

$$m\,\ddot{x} = -mg + \gamma v^2 \tag{5.52}$$

Fyzikálna intuícia nám hovorí, že teleso najskôr začne prudko zvyšovať rýchlosť v, čo má za následok zväčšovanie odporovej sily. Tá sa postupne vyrovnáva s tiažovou, až nastane ich rovnováha. V tomto okamihu teleso dosiahne hraničnú rýchlosť v_k, pre ktorú platí:

$$m\,\ddot{x} = 0 = -mg + \gamma v_k^2 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{mg}{v_k^2}$$

Dosadením do (5.52), zavedením substitúcie $\ddot{x} = \dot{v}$ a postupnými úpravami:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{v_k^2}\left(v_k^2 - v^2\right) \tag{5.53}$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v_k^2 - v^2} = -\frac{g}{v_k^2}\int_0^t dt \tag{5.54}$$

$$\frac{1}{2v_k}\ln\frac{v_k + v}{v_k - v} = -\frac{g}{v_k^2}t \tag{5.55}$$

$$v = -v_k\frac{1 - \exp\left(-2gt/v_k\right)}{1 + \exp\left(-2gt/v_k\right)} \tag{5.56}$$

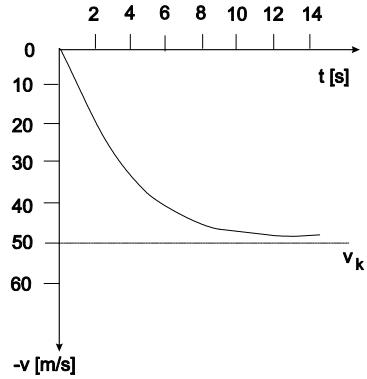
Analyzujme pohyb v limitných prípadoch: Na začiatku je rýchlosť $v \ll v_k \Rightarrow 2gt \ll v_k$ a pri rozvoji exponenty v rovnici (5.56) sa stačí ohraničiť iba prvými dvomi členmi:

$$\exp\left(-2gt/v_k\right) \approx 1 - \frac{2gt}{v_k} \tag{5.57}$$

Spätným dosadením do (5.53) $v = -gt$. Výsledok možno interpretovať tak, že v začiatočnom štádiu teleso padá voľným pádom a odpor vzduchu nezohráva takmer žiadnu úlohu. Pri ďaľšom zvyšovaní rýchlosti, úloha odporovej sily narastá a v oblasti kritickej rýchlosti $v_k \ll 2gt$ z rovnice (5.56):

$$\begin{aligned} \frac{v_k - v}{v_k} &= 1 - \frac{1 - \exp(-2gt/v_k)}{1 + \exp(-2gt/v_k)} = \\ &= \frac{2\exp(-2gt/v_k)}{1 + \exp(-2gt/v_k)} \approx 2\exp(-2gt/v_k) \end{aligned} \tag{5.58}$$

Zo skúseností vieme, že kritická rýchlosť parašutistu bez otvoreného padáka je $v_k \approx 50\frac{m}{s}$ Ak ju dosadíme do (5.58) zistíme, že po uplynutí $t = 10s$ teleso získa rýchlosť, ktorá sa nepatrne líši od kritickej: $v_k - v \approx 2m/s$. Závislosť je znázornená na obr.V.12



obr. V.12

Kritická rýchlosť s otvoreným padákom je podstatne nižšia $v_k \approx 10\frac{m}{s}$. Parašutista po otvorení padáku pociťuje prudký náraz, pretože za krátky čas jeho rýchlosť poklesne z hodnoty $50m/s$ na $10m/s$. ♢

5.2.3 Lineárne nehomogénne DR. s konštantnými koeficientami

Lineárne nehomogénne DR budeme riešiť podľa nasledovného návodu:

i) nájdeme homogénne riešenie DR y_h

ii) nájdeme partikulárne riešenie y_p jednou z metód
- variácia konštánt
- metóda neurčitých koeficientov
- prechod do komplexnej roviny

iii) všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice dostaneme sčítaním $y = y_h + y_p$

iv) neznáme konštanty určíme z počiatočných podmienok.

Homogénne riešenie y_h nájdeme podľa predchádzajúcej kapitoly. Ostáva nám zvládnuť techniku hľadania partikulárnych riešení y_p.

5.2.4 Metódy hľadania partikulárnych riešení

Metóda variácie konštánt

Na hľadanie riešenia diferenciálnej rovnice 2. rádu s pravou stranou môžeme použiť Lagrangeovu metódu variácie konštánt. Ukážeme si ju na diferenciálnej rovnice druhého stupňa:

$$y'' + ay' + by = g(x) \tag{5.59}$$

Všeobecné riešenie y sa konštruuje z lineárne nezávislých riešení y_1, y_2 homogénej DR: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, pričom konštanty c_1 a c_2 zameníme na funkcie t.j.

$$y = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2 \tag{5.60}$$

Po zderivovaní podľa premennej x:

$$y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2' \tag{5.61}$$

Pri ďalších úpravách budeme predpokladať, že

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \tag{5.62}$$

Dôvodov je hneď niekoľko:

i) Ak dosadíme príslušné y' a y'' do (5.59) získame iba jednu rovnicu, z ktorej nedokážeme určiť obe funkcie $c_1(x)$ a $c_2(x)$. Na ich nájdenie potrebujeme mať práve dve nezávislé rovnice.

ii) Ak by sme nezvolili predpoklad (5.62), druhá derivácia y'' bude obsahovať aj druhé derivácie c_1'', c_1'' a po ich dosadení do (5.59) by sme získali diferenciálnu rovnicu druhého rádu pre c_1 a c_2, ktorú nevieme riešiť.

Predpoklad (5.62) zatiaľ považujme iba za podmienený, nemáme žiadnu záruku, či ho dokážeme splniť. Ak sa nám to podarí, našli sme všeobecný recept na hľadanie riešení DR (pretože veta o jednoznačnosti nepripúšťa iné riešenie), ak budeme mať "smolu" a nepodarí sa nám to, vymyslíme inú stratégiu. Zderivujme y' :

$$y'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'' \tag{5.63}$$

Po dosadení do (5.59) s predpokladom (5.62) a menších úpravách:

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1\left(y_1'' + ay_1' + by_1\right) + c_2\left(y_2'' + ay_2' + by_2\right) = g\left(x\right) \tag{5.64}$$

Koeficienty pri c_1 a c_2 sa rovnajú nule, pretože y_1 a y_2 sú riešeniami rovnice bez pravej strany. Dostávame jednoduchý vzťah:

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = g\left(x\right) \tag{5.65}$$

ktorý spolu s (5.62) poskytujú sústavu lineárnych rovníc na určenie c_1 a c_2. Keďže y_1 a y_2 sú lineárne nezávislé, determinant sústavy rovníc:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5.66}$$

a riešenie existuje:

$$c_1' = \frac{W_1}{W} \quad c_2' = \frac{W_2}{W} \tag{5.67}$$

kde W, W_1, W_2 sú determinanty sústavy a W nazývame Wronskián:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g\left(x\right) & y_2' \end{vmatrix}, W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g\left(x\right) \end{vmatrix}, W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \tag{5.68}$$

Integráciou (5.67)

$$c_1 = \int \frac{W_1}{W}dx \quad \text{a} \quad c_2 = \int \frac{W_2}{W}dx \tag{5.69}$$

Z uvedeného vyplýva, že rovnicu (5.62), ktorá bola doteraz iba podmienená, dokážeme splniť ak $W \neq 0$. Vtedy sú funkcie y_1, y_2 lineárne nezávislé a tvoria tzv. fundamentálny systém[12].

$\boxed{\text{Príklad 22}}$ Vyriešte DR $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.

[12] Wronskián W je dôležitým kritériom lineárnej závislosti, resp. lineárnej nezávislosti riešení y_1, y_2. Skutočne, ak $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' = 0$ potom integráciou rovnice $\frac{y_2'}{y_2} = \frac{y_1'}{y_1}$ dostaneme $y_2 = Cy_1$ čo vyjadruje lineárnu závislosť oboch riešení.

Riešenie: Najskôr nájdeme homogéne riešenie: $y_1 = \cos x$ a $y_2 = \sin x$. Metódou variácie konštant pomocou vzťahu (5.69) nájdeme všeobecné riešenie:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \tag{5.70}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos^3 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x} \tag{5.71}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos^3 x} \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{5.72}$$

$$c_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x} \Longrightarrow c_1 = \int -\frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = -\frac{1}{2\cos^2 x} + A \tag{5.73}$$

$$c_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow c_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + B \tag{5.74}$$

Dosadením do (5.60)

$$y = A\cos x + B\sin x - \frac{1}{2\cos x} + \sin x \tan x$$

$\diamondsuit$

Poznámka: Pre fundamentálny systém platí dôležitý vzťah, ktorý si odvodíme. Nech funkcie y_1 a y_2 sú homogénnymi riešeniami DR:

$$y_1'' + a(x)\, y_1' + b(x)\, y_1 = 0 \qquad y_2'' + a(x)\, y_2' + b(x)\, y_2 = 0$$

Vynásobme prvú rovnicu funkciou y_2, druhú funkciou y_1 a odčítajme ich od seba:

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + a(x)\left[y_1 y_2' - y_2 y_1'\right] = 0 \tag{5.75}$$

V rovnici (5.75) využijeme identitu:

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = \frac{d}{dx}\left[y_1 y_2' - y_2 y_1'\right] = \frac{d}{dx} W$$

a výraz upravíme[13]:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} + a(x)\, W &= 0 \\ W &= C_2 \exp\left(\int -a(x)\, dx\right) \end{aligned} \tag{5.76}$$

[13] W je Wronskián $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \left[y_1 y_2' - y_2 y_1'\right]$

Tento vzťah oceníme v prípadoch, keď zo štruktúry rovnice dokážeme uhádnuť iba jedno partikulárne riešenie y_1. Vtedy stačí použiť rovnicu[14](5.76):

$$\begin{aligned} y_1 y' - y y_1' &= C_2 \exp\left(\int -a(x)\,dx\right) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) &= C_2 y_1^{-2} \exp\left(-\int a(x)\,dx\right) \\ \frac{y}{y_1} &= C_1 + C_2 \int y_1^{-2}\left[\exp\left(\int -a(x)\,dx\right)\right] dx \\ y &= C_1 y_1 + C_2 y_1 \int y_1^{-2}\left[\exp\left(-\int a(x)\,dx\right)\right] dx \end{aligned}$$

Z čoho pre hľadanú funkciu $y = y_2$:

$$y_2 = y_1 \left[\int y_1^{-2}\left[\exp\left(-\int a(x)\,dx\right)\right] dx\right] \tag{5.77}$$

$\boxed{\text{Príklad 23}}$ Nájdite fundamentálny systém pre rovnicu $y'' + ay' + by = 0$, keď $a^2 - 4b = 0$.

Riešenie: S touto rovnicou sme sa už stretli. Ak budeme hľadať riešene v tvare: $A\exp(\alpha x)$, charakteristická rovnica bude mať dvojnásobný koreň a $y_1 = \exp\left(-\frac{a}{2}x\right)$. Druhé riešenie y_2 určíme zo vzťahu (5.77):

$$\begin{aligned} y_2 &= \exp\left(-\frac{a}{2}x\right)\left[\int \exp(ax)\left[\exp\left(\int -a dx\right)\right] dx\right] \\ y_2 &= x\exp\left(-\frac{a}{2}x\right) \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

K rovnakému výsledku sme sa dopracovali pri použití metódy variácie konštánt.

$\boxed{\text{Príklad 24}}$ Nájdite partikulárne riešenie Eulerovej rovnice $x \neq 0$, keď $(p_0 - 1)^2 - 4q_0 = 0$:

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0 \tag{5.78}$$

$$y'' + p_0 \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} q_0 y = 0 \tag{5.79}$$

[14] Zvoľme $y_2 = y$.

Riešenie: Stačí si uvedomiť, že pri derivovaní funkcie x^λ sa mocniteľ znižuje o jedničku a preto jedno partikulárne riešenie bude mať tvar:

$$y = x^\lambda$$

Po dosadení do DR dostaneme kvadratickú rovnicu:

$$\lambda^2 + (p_0 - 1)\,\lambda + q_0 = 0$$

s koreňmi:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\,(p_0 - 1) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4}\,(p_0 - 1)^2 - q_0\right]}$$

Ak $(p_0 - 1)^2 - 4q_0 = 0$ kvadratická rovnica má dvojnásobný koreň $y_1 = x^{-\frac{1}{2}(p_0-1)}$. Jeho dosadením do (5.77) určíme druhé riešenie :

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}(p_0-1)}\left[\int x^{(p_0-1)}\left[\exp\left(\int -\frac{p_0}{x}dx\right)\right]dx\right] = x^{-\frac{1}{2}(p_0-1)}\ln x \qquad \diamondsuit$$

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda variácie konštánt je dobrá stratégia na riešenie diferenciálnych rovníc, ale vzhľadom na jej pracnosť a časovú náročnosť nepatrí medzi veľmi obľúbené. Pokiaľ to špecifický tvar pravej strany DR umožňuje, používa sa oveľa efektívnejšia metóda tzv. metóda neurčitých koeficientov, založená na princípe superpozície. Ak totiž funkcia $x_p(t)$ je konkrétnym riešením nehomogénnej LDR a $x_h(t)$ je všeobecným riešením homogénnej rovnice, potom ich súčet $x = x_p(t) + x_h(t)$ je všeobecným riešením danej nehomogénnej rovnice. Partikulárne riešenie v špeciálnych prípadoch (keď na pravej strane rovnice je konštanta, exponenciálna funkcia, trigonometrická funkcia, resp. ich kombinácie) navrhneme tak, aby malo rovnaký tvar, ako pravá strana $g(t)$ až na koeficienty, ktoré určíme po jeho dosadení do DR.

Pravá strana KONŠTANTA: $g(t) = const$

Partikulárne riešenie zvolíme v tvare $x_p(t) = ct^m$, kde m je najnižšia derivácia vyskytujúca sa v rovnici. Dôvod je jednoduchý, m-tá derivácia funkcie $x_p(t)$ vytvorí konštantu, ktorá sa musí rovnať konštante $g(t)$ na pravej strane rovnice. Všetky vyššie derivácie ako $m - tého$ rádu dajú nulu a nebudú prispievať k určeniu neznámeho koeficienta c.

$\boxed{\text{Príklad 25}}$ Nájdite polohu telesa $x(t)$ pri voľnom páde v odporovom prostredí s počiatočnými podmienkami $x(0) = H, \dot{x}(0) = 0$

Riešenie: Spôsobu zostavenie pohybovej rovnice sme sa už venovali:

$$m\,\ddot{x} = -mg - \gamma\,\dot{x} \tag{5.80}$$

$$m\,\ddot{x} + \gamma\,\dot{x} = -mg \tag{5.81}$$

Najnižšia derivácia na ľavej strane je prvá a preto partikulárne riešenie $x_p = At^1$. Dosadením do (5.80) dostaneme

$$\gamma A = -mg \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{mg}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad x_p = -\frac{mg}{\gamma}t \tag{5.82}$$

Pripočítaním všeobecného riešenia homogénnej rovnice:

$$x\,(t) = x_p + x_h = -\frac{mg}{\gamma}t \; + c_1 + c_2 \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) \tag{5.83}$$

Po dosadení počiatočných podmienok:

$$x(t) = H + \frac{m^2}{\gamma^2}g\left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right] - \frac{mg}{\gamma}t \tag{5.84}$$

Skúsme urobiť limitný prechod $\gamma \to 0$, čo by zodpovedalo voľnému pádu v neodporovom prostredí. Druhý a tretí člen rovnice vyjadrime pomocou parametra $\beta = \frac{\gamma}{m}$ a vypočítajme jeho limitu podľa L'Hospitalovho pravidla:

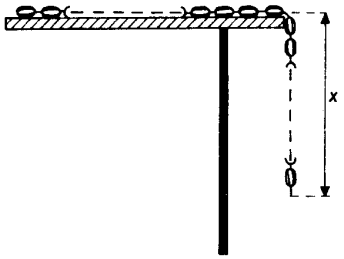
$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to 0} g\frac{[1-\exp(-\beta t)] - \beta t}{\beta^2} &= \lim_{\beta\to 0} g\frac{t\exp(-\beta t) - t}{2\beta} = \\ &= \frac{g}{2}\lim_{\beta\to 0}\frac{t\,(\exp(-\beta t) - 1)}{\beta} = -\frac{g}{2}t^2\end{aligned}$$

Je teda zrejmé, že

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma\to 0} x(t) &= \lim_{\gamma\to 0}\left[H + \frac{m^2}{\gamma^2}g\left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right] - \frac{mg}{\gamma}t\right] \\ &= H - \frac{g}{2}t^2\end{aligned}$$

Výsledok zodpovedá voľnému pádu v bezodporovom prostredí. ♢

$\boxed{\text{Príklad 26}}$ Ohybná retiazka dĺžky l je prevesená cez stôl (obr.V.13). Vplyvom vlastnej tiaže sa začne pohybovať. Nájdite ako sa bude meniť dĺžka previsnutej časti $x\,(t)$, ak v čase $t = 0$ visela zo stola dĺžka l_0. Najskôr uvažujte pohyb bez trenia a potom s trením.



obr. V.13

Riešenie: Nech dĺžka visiacej časti je x, potom na celú retiazku s hmotnosťou m pôsobí tižová sila $G = \frac{x}{l}mg$. Podľa Newtonovho zákona $m\,\ddot{x} = \frac{x}{l}mg$ čo vedie k riešeniu $x = c_1 \exp\left(\sqrt{g/l}t\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{g/l}t\right)$. Dosadením počiatočných podmienok $x(0) = l_0$, $\dot{x}(0) = 0$ pre dĺžku previsnutej časti x dostaneme:

$$x = \frac{l_0}{2}\left[\exp\left(\sqrt{g/l}\,t\right) + \exp\left(-\sqrt{g/l}\,t\right)\right] = l_0 \cosh\sqrt{g/l}\,t$$

V prípade trenia pohybová rovnica bude mať tvar $m\,\ddot{x} = \frac{x}{l}mg - \mu\frac{(l-x)}{l}mg$. Ide o LDR $\ddot{x} - x\frac{g}{l}(1+\mu) = -\mu g$ s konštantnou pravou stranou a jej partikulárne riešenie navrhnime v tvare $x = A \Longrightarrow A = \frac{l\mu}{(1+\mu)}$. Všeobecné riešenie zostrojíme superpozíciou

$$x = x_p + x_h = \frac{l\mu}{(1+\mu)} + c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}(1+\mu)}\,t\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}(1+\mu)}\,t\right)$$

Po dosadení počiatočných podmienok

$$x = \frac{1}{2}\left(l_0 - \frac{l\mu}{1+\mu}\right)\left[\exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}(1+\mu)}t\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}(1+\mu)}t\right)\right] + \frac{l\mu}{(1+\mu)} \diamond$$

Pravá strana EXPONENCIÁLNA FUNKCIA: $g(t) = \exp(\beta t)$

Partikulárne riešenie volíme v tvare $x_p = A\exp(\beta t)$. Exponent eulerovho čísla musí byť totožný s pravou stranou $g(t)$, pretože po dosadení do DR každý člen bude obsahovať faktor $\exp(\beta t)$. Po jeho vykrátení získame rovnicu pre určenie neznámeho koeficientu A.

$\boxed{\text{Príklad 27}}$ Na štartujúce lietadlo začne pôsobiť sila motorov, ktorej veľkosť rastie exponenciálne s časom: $F_0 \exp(3t)$. Nájdite polohu lietadla $x(t)$ keď, naň pôsobí odporová sila vzduchu.

Riešenie: Pohybová rovnica pre štartujúce lietadlo má tvar:

$$m\,\ddot{x} = -\gamma\,\dot{x} + F_0 \exp(3t) \tag{5.85}$$

Dosaďme partikulárne riešenie $x_p(t) = A\exp(3t)$ do (5.85):

$$\begin{aligned} 9mA + 3\gamma A &= F_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F_0}{9m+3\gamma} \\ x_p(t) &= \frac{F_0}{9m+3\gamma}\exp(3t) \end{aligned} \tag{5.86}$$

Homogénna rovnica je totožná s predchádzajúcim príkladom, čiže pre všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice platí:

$$x(t) = x_p + x_h = \frac{F_0}{9m+3\gamma}\exp(3t) + c_1 + c_2\exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) \qquad \diamondsuit$$

Pravá strana TRIGONOMETRICKÁ FUNKCIA: $g(t) = \sin(\beta t), \cos(\beta t)$

Partikulárne riešenie volíme v tvare superpozície sínusov a kosínusov. Dôvod je veľmi jednoduchý. Po dosadení do DR vzniknú na jej ľavej strane trigonometrické funkcie. Porovnaním koeficientov pri sínusoch a kosínusoch získame rovnice, ktoré nám umožnia nájsť neznáme koeficienty.

$\boxed{\text{Príklad 28}}$ Na teleso s hmotnosťou m , ktoré kmitá na pružine s tuhosťou k, pôsobí periodická sila $F = F_0\cos(\omega t)$. Nájdite výchylku telesa $x(t)$ v ustálenom stave .

Riešenie: Zostavme pohybovú rovnicu:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0\cos(\omega t) \tag{5.87}$$

Jej partikulárne riešenie navrhnime v tvare:

$$x_p = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{5.88}$$

Vypočítajme príslušné derivácie

$$\dot{x}_p = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \tag{5.89}$$

$$\ddot{x}_p = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) \tag{5.90}$$

a dosaďme ich do (5.87):

$$\cos(\omega t)\left[-mA\omega^2 + \gamma B\omega + kA\right] + \sin(\omega t)\left[-mB\omega^2 - \gamma A\omega + kB\right] = F_0\cos(\omega t) \tag{5.91}$$

Na oboch stranách (5.91) porovnajme koeficienty pri $\cos(\omega t)$ a $\sin(\omega t)$. Získame rovnice:

$$\begin{aligned} A\left(-m\omega^2 + k\right) + B\gamma\omega &= F_0 \\ -A\gamma\omega + B\left(k - m\omega^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

z ktorej určíme neznáme koeficienty A, B :

$$A = F_0 \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \tag{5.92}$$

$$B = F_0 \frac{\gamma\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \tag{5.93}$$

Spätným dosadením do (5.88), partikulárne riešenie má tvar:

$$x_p = F_0 \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \cos(\omega t) + F_0 \frac{\gamma\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \sin(\omega t)$$

Vzťah upravme do vhodnejšej formy:

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} * \left[\frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \cos(\omega t) + \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \sin(\omega t) \right]$$

Zavedením substitúcie:

$$\cos\varphi = \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad \text{a} \quad \sin\varphi = \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \tag{5.94}$$

potom

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} [\cos\varphi \cos(\omega t) + \sin\varphi \sin(\omega t)] =$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \tag{5.95}$$

pričom podľa (5.94)

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\gamma\omega}{k - m\omega^2} \tag{5.96}$$

Zistili sme, že teleso v ustálenom stave $x_h \to 0$ vykonáva harmonický pohyb s frekvenciou ω a amplitúdou

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}$$

pričom výchylka je fázovo posunutá vzhľadom na vynucujúcu silu o uhol φ (5.96). K podrobnejšej diskusii sa ešte vrátime. ♢

Pravá strana POLYNÓM: $g(t) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$

Partikulárne riešenie volíme v tvare polynómu, neznáme koeficienty zistíme dosadením partikulárneho riešenia do DR.

$\boxed{\text{Príklad 29}}$ Vyriešte rovnicu $y'' + 4y = 2x^2 - x$

Riešenie: Partikulárne riešenie navrhnime v tvare: $y_p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, potom $y_p'' = 2a_2$. Dosadením do danej rovnice porovnáme koeficienty na pravej a ľavej strane:

$$2a_2 + 4a_0 + 4a_1 x + 4a_2 x^2 = 2x^2 - x$$

Nájdime všeobecné riešenie:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \qquad \diamondsuit$$

Na prvý pohľad sa zdá, že už dokážeme riešiť všetky diferenciálne rovnice s pravými stranami (exponenciálnymi, trigonometrickými, konštantnými, polynomickými) rozoberanými v tejto kapitole. Situácia však nie je až tak priaznivá. Uveďme ilustračný príklad:

$\boxed{\text{Príklad 30}}$ Uvažujme teleso s hmotnosťou $m = 1kg$, kmitajúce na pružine s tuhosťou $k = 1Nm^{-1}$, na ktorú pôsobí vynucujúca sila $F = \sin(\omega t)$. Nájdite jeho polohu v ľubovoľnom čase t. Odpor prostredia zanedbávame.

Riešenie: Dosaďme partikulárne riešenie $x_p(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ do pohybovej rovnice telesa:

$$\ddot{x} = -kx + \sin(\omega t) \tag{5.97}$$

Získame sústavu rovníc pre určenie neznámych koeficientov A, B

$$\begin{aligned} -A\omega^2 &= -kA + 1 \\ -B\omega^2 &= -kB \end{aligned}$$

Sústava však nemá riešenie, pretože druhá rovnica sa vo všeobecnosti nedá splniť. Teleso sa určite nejako pohybuje a preto neprichádza do úvahy interpretácia, že pôvodná DR (5.97) nemá žiadne riešenie. $\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 31}}$ Nájdite riešenie $\ddot{x} + 2\dot{x} = t$ s počiatočnými podmienkami $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$

Riešenie: Navrhnime partikulárne riešenie v štandardnom tvare $x_p = At + B$, dosaďme ho do DR:

$$2A = At + B$$

z čoho dostaneme $A = B = 0$, čo však opäť nevedie k partikulárnemu riešeniu$\diamondsuit$

Naša stratégia hľadania x_p v niektorých prípadoch je neúčinná a preto sa pokúsme urobiť jej podrobnejšiu a všeobecnejšiu analýzu. Majme teda DR :

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = P(t)\, e^{\alpha t} \tag{5.98}$$

kde P je polynóm m-tého stupňa. Pokúsme sa hľadať partikulárne riešenie v tvare pravej strany (až na konštanty): $x_p(t) = Q(t)\, e^{\alpha t}$, kde Q je polynóm n-tého stupňa. Dosadením do (5.98): dostaneme:

$$\begin{aligned} & \ddot{Q}(t)\, e^{\alpha t} + 2\alpha\dot{Q}(t)e^{\alpha t} + \alpha^2 Q(t)\, e^{\alpha t} + a_1\left[\dot{Q}(t)e^{\alpha t} + \alpha Q(t)\, e^{\alpha t}\right] \\ + a_2 Q(t)\, e^{\alpha t} \quad = \quad & P(t)\, e^{\alpha t} \end{aligned}$$

resp.

$$\ddot{Q}(t) + (2\alpha + a_1)\,\dot{Q}(t) + \left(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2\right) Q(t) = P(t) \tag{5.99}$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách t na oboch stranách (5.99) získame $n+1$ rovníc pre určenie hľadaného polynómu $Q(t)$. Vo všeobecnosti môžu nastať tri prípady:

i) α nie je koreňom charakteristickej rovnice

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \tag{5.100}$$

a preto $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 \neq 0$. Polynóm na ľavej strane (5.99) je rovnakého stupňa ako polynóm P t.j $n = m$. Jeho $n+1$ koeficientov vypočítame porovnaním koeficientov na oboch stranách rovnice (5.99)

ii) α je jednonásobným koreňom charakteristickej rovnice (5.100). Potom $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$ ale $2\alpha + a_1 \neq 0$. Derivovaný polynóm $\dot{Q}(t)$ je $m - tého$ stupňa, pričom samotný polynóm $Q(t)$ je stupňa $n = m+1$. Vzhľadom na to, že na určenie neznámych koeficientov Q máme iba $m+1$ rovníc (potrebovali by sme $m+2$), zobereme taký tvar polynómu Q, aby obsahoval iba $m+1$ neznámych koeficientov. To je možné zabezpečiť tak, že $Q(t) = xQ_1(t)$, pričom Q_1 je polynóm stupňa m. Jeho koeficienty vypočítame ako v prípade *i,* .

iii) α je dvojnásobným koreňom charakteristickej rovnice (5.100). Potom platí $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$, $2\alpha + a_1 = 0$. Polynóm Q je stupňa $n = m + 2$, pričom počet rovníc na jeho určenie je iba n. Z rovnakých dôvodov ako v prípade 2 treba hľadať partikulárne riešenie v tvare $Q(t) = t^2 Q_2(t)$. Na základe rozboru môžeme formulovať nasledovnú vetu:

Nech $P(t)$ je polynóm $n-$ tého stupňa, potom funkcia $y = t^r Q(t) e^{\alpha t}$ je partikulárnym riešením diferenciálnej rovnice:

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = P(t) e^{\alpha t}$$

pričom $Q(t)$ je polynóm stupňa n a r je číslo, ktoré udáva koľkonásobným koreňom charakteristickej rovnice je číslo α.

Ak by pravá strana DR. mala trigonometrický tvar, podobnou diskusiou by sme dospeli k ďalšej vete:

Ak pravá strana DR má tvar:

$$g(t) = e^{\alpha t}\left[P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t\right]$$

kde $P_1(t)$ a $P_2(t)$ sú polynómy, potom partikulárne riešenie bude mať tvar:

$$x_p(t) = t^r e^{\alpha t}\left[R_1(t)\cos\beta t + R_2(t)\sin\beta t\right]$$

kde $R_1(t)$ a $R_2(t)$ sú polynómy, ktorých stupeň sa rovná vyššiemu zo stupňov polynómu P_1 a P_2, r je číslo, ktoré udáva koľkonásobným koreňom charakteristickej rovnice sú čísla $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$.

$\boxed{\text{Príklad 32}}$ Riešte DR: $y'' + 2y' = \exp(-2x)$.

Riešenie: *1.krok* Charakteristická rovnica $\alpha^2 + 2\alpha = 0$ má dva korene $\alpha_1 = -2$ a $\alpha_2 = 0$ a preto $y_h = c_1 + c_2\exp(-2x)$. V tomto prípade navrhnime partikulárne riešenie v tvare : $y_p = x^r Q(x)\, e^{\alpha x} = Ax^1\exp(-2x)$, pretože $\alpha = -2$ je jednonásobným koreňom charakteristickej rovnice.

2.krok neznámy koeficient A určíme dosadením partikulárneho riešenia do pôvodnej DR a upravíme:

$$\begin{aligned} -A\exp(-2x)\,2 &= \exp(-2x) \quad \Longrightarrow \quad A = -0,5 \\ y &= y_h + y_p = c_1 + c_2\exp(-2x) - 0,5x\exp(-2x) \end{aligned}$$

3.krok Neznáme konštanty c_1 a c_2 určíme z počiatočných podmienok. ♢

$\boxed{\text{Príklad 33}}$ Riešte DR: $y'' + y' = x$.

Riešenie: Charakteristická rovnica má korene $\alpha_1 = 0$ a $\alpha_2 = -1 \Longrightarrow y_h = c_1 + c_2 \exp(-x)$. Keďže α_1 je koreňom charakteristickej rovnice, partikulárne riešenie hľadajme v tvare: $y_p = x^r Q(x) e^{\alpha x} = x(Ax + B)$. Dosadením do DR:

$$\begin{aligned} 2A + 2Ax + B &= x \Longrightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -1 \\ y &= y_h + y_p = c_1 + c_2 \exp(-x) + x\left(\frac{1}{2}x - 1\right) \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 34}}$ Riešte DR: $y'' - 2y' + y = 3\exp(x)$.

Riešenie: Charakteristická rovnica má dvojnásobný koreň $\alpha_{1,2} = 1 \Longrightarrow y_h = c_1 \exp(x) + c_2 x \exp(x)$. Partikulárne riešenie budeme hľadať v tvare: $y_p = x^r Q(x) e^{\alpha x} = Ax^2 \exp(x)$. Dosadením do DR:

$$\begin{aligned} 2A\exp(x) &= 3\exp(x) \quad \Longrightarrow 2A = 3 \\ y &= y_h + y_p = e^x [c_1 + c_2 x] + 3\frac{x^2}{2}\exp(x) \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 35}}$ Riešte DR: $y'' + y = 2x\sin(x)$.

Riešenie: V tomto prípade $\alpha = 0$ $\beta = 1$ a $\pm i$ sú charakteristické korene homogénnej DR $\Longrightarrow y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Skonštruujeme partikulárne riešenie v tvare: $y_p = x[(ax + b)\cos x + (a_1 x + b_1)\sin x]$. Koeficienty a, b, a_1, b_1 určíme metódou neurčitých koeficientov:

$$\begin{aligned} y_p'' &= \left[-ax^2 + (4a_1 - b)x + (2a + 2b_1)\right]\cos x + \\ &\quad + \left[-a_1 x^2 - (4a + b_1)x + (2a_1 + 2b)\right]\sin x \end{aligned}$$

Dosadením do DR dostaneme:

$$[2a_1 x + (a + b_1)]\cos x + [-2ax + (a_1 + b)]\sin x = 2x\sin x$$

Porovnaním oboch strán získame nasledovné rovnice: $2a_1 x = 0$, $a + b_1 = 0$, $-2a = 2$, $a_1 - b = 0$

$$a = -1 \quad b = 0 \quad a_1 = 0 \quad b_1 = 1$$

a všeobecné riešenie:

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x\sin x - x^2 \cos x$$

$\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 36}}$ Riešte DR: $y'' - 4y' + 13y = 8e^x + 2x$

Riešenie: Charakteristická rovnica má dva korene: $\alpha_1 = 2 + 3i$, $\alpha_1 = 2 - 3i$ a všeobecné riešenie homogénnej rovnice $y_h = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$. Využijeme princíp superpozície a riešime DR najskôr s pravou stranou $g_1(x) = 8e^x$ a potom s pravou stranou $g_2(x) = 2x$. V prvom prípade navrhneme partikulárne riešenie v tvare $y_{p1} = ae^x$ a metódou neurčitých koeficientov určíme $a = \frac{4}{5}$ $\Longrightarrow y_{p1} = \frac{4}{5}e^x$. Pre pravú stranu $g_2(x) = 2x$ má partikulárne riešenie tvar: $y_{p2} = ax + b$ a použitím metódy neurčitých koeficientov zistíme: $y_{p2} = \frac{2}{13}x + \frac{8}{169}$. Všeobecné riešenie DR:

$$y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \frac{4}{5}e^x + \frac{2}{13}x + \frac{8}{169} \qquad \diamondsuit$$

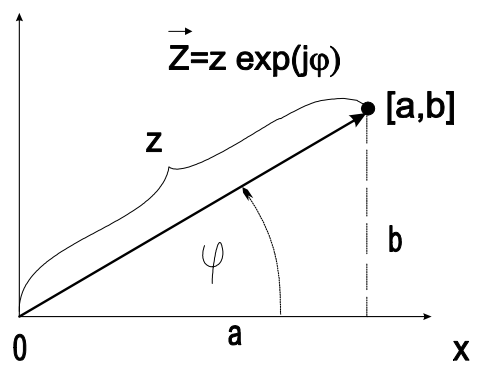
Prechod do komplexnej roviny

Pod komplexným číslom rozumieme usporiadanú dvojicu

$$\hat{Z} = [a, b] = a + ib \tag{5.101}$$

Jeho obrazom v kartézskom pravouhlom súradnicovom systéme je bod P so súradnicami (a, b). Os x sa volá reálna os, os y imaginárna (obr.V.14). Ak spojíme bod P s počiatkom súradnicovej sústavy, dostaneme tzv. komplexný vektor. Obrazom komplexného čísla je bod, komplexného vektora orientovaná úsečka.

Okrem vyjadrenia komplexného čísla v tvare (5.101) existujú aj ďalšie formy, ktoré môžeme priamo odvodiť z obrázka V.14:



obr. V.14

Pre zložky a, b platí:

$$a = |z| \cos \varphi \tag{5.102}$$

$$b = |z| \sin \varphi \tag{5.103}$$

Pričom $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ sa nazýva *modulom*[15] *(absolútnou hodnotou)* komplexného čísla, $\varphi = arctg\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$je polárny uhol (argument, fáza). Z rovností (5.102), (5.103) a (5.101) vyplýva:

$$\hat{Z} = |z| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right) \tag{5.104}$$

Tento tvar komplexného čísla sa volá *trigonometrický.* Upravíme ho ďalej použitím Eulerovho vzťahu, ktorý sme dokázali v kapitole rady:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \exp\left(i\varphi\right)$$

Dosadením do (5.104) získame tzv.*exponenciálny* tvar komplexného čísla:

$$\hat{Z} = |z| \exp\left(i\varphi\right) \tag{5.105}$$

ktorý je vo fyzike najpoužívanejší. Komplexné číslo Z sa skladá zo súčinu modulu $|z|$ a jednotkového faktora $\exp\left(i\varphi\right)$ [16]. Faktor možno chápať ako operátor, ktorého aplikovaním na modul $|z|$ otáčame komplexný vektor s dĺžkou $|z|$ o uhol φ, vzhľadom na reálnu os. Pre naše potreby sa ďalej obmedzíme na komplexné funkcie, ktorých fáza lineárne narastá s časom[17] t, $\Psi\left(t\right) = \omega t + \varphi$:

$$\widehat{Z} = |z| \exp\left[i\Psi\left(t\right)\right] = |z| \exp\left[i\left(\omega t + \varphi\right)\right] \tag{5.106}$$

pričom

$$\mathrm{Re}\left(\widehat{Z}\right) = |z| \cos\left(\omega t + \varphi\right) \tag{5.107}$$

$$\mathrm{Im}\left(\widehat{Z}\right) = |z| \sin\left(\omega t + \varphi\right) \tag{5.108}$$

Vektor $\widehat{Z}$ sa otáča v komplexnej rovine okolo počiatku O uhlovou rýchlosťou ω. Jeho koncový bod koná rovnomerny pohyb po kružnici. Zavedením komplexného vektora $\widehat{Z}$ v čase $t = 0$: $\widehat{Z}\left(0\right) = |z| \exp\left[i\left(0 + \varphi\right)\right] = \widehat{Z}_0$ rovnicu (5.106) prepíšeme do nasledovného tvaru:

$$\widehat{Z} = \widehat{Z}_0 \exp\left[i\omega t\right] \tag{5.109}$$

Okamžitú polohu fázora $\widehat{Z}\left(t\right)$ v ľubovolnom čase získame pootočením vektora $\widehat{Z}_0$ o uhol ωt. Pri riešení diferenciálnych rovníc fázormi sa stretneme s deriváciou komplexného vektora $\widehat{Z}$ [18]:

$$\frac{d\widehat{Z}}{dt} = i\omega\widehat{Z}_0 \exp\left[i\omega t\right] = i\omega\widehat{Z} = \omega\widehat{Z}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \tag{5.110}$$

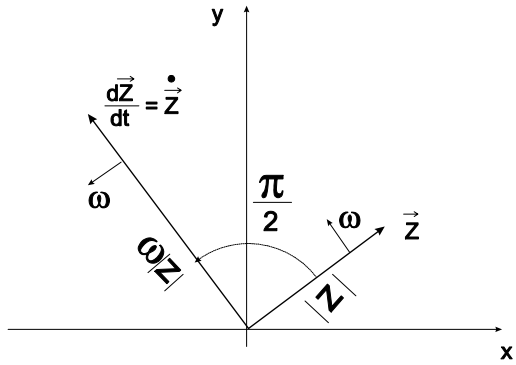
[15] Všimnime si, že k druhej mocnine modulu $|z|^2$ sa možno dostať vynásobením $z = [a, b]$ komplexne združeným číslom $z^* = [a, -b]$. Skutočne $zz^* = a^2 + b^2 = |z|^2$

[16] $|\exp\left(i\varphi\right)| = 1$

[17] tzv. časové vektory

[18] Podľa Eulerovho vzťahu: $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i$

Faktor $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$ otočí vektor $\widehat{Z}$ o uhol $\frac{\pi}{2}$ a preto vektor $\frac{d\widehat{Z}}{dt}$ je kolmý na vektor $\widehat{Z}$ s absolutnou hodnotou ω krát väčšou, ako jeho pôvodná hodnota (obr.V.15)[19].



obr. V.15

V matematike a vo fyzike sa pri riešení niektorých problémov v obore reálnych čísel postupuje tak, že najskôr sa vyriešia v širšom obore komplexných čísel, kde je riešenie jednoduchšie a potom sa späť "prenesú" do reálnych čísel.

Príklad 37 Vyšetrite pohyb tlmeného oscilátora pod vplyvom vynucujúcej sily: $F = F_0 \cos(\omega t)$

Tento problém sme už raz riešili pomerne zdĺhavým spôsobom.. Pohybová rovnica mala tvar:

$$m\,\ddot{x} + \gamma\,\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \tag{5.111}$$

Ukážeme si využitie komplexných čísel na riešenie DR analytickou a grafickou metódou.:

- **Analytická metóda**. Ak zapíšeme rovnicu (5.111) v obore komplexných čísiel :

$$m\,\ddot{\widehat{x}} + \gamma\,\dot{\widehat{x}} + k\widehat{x} = \hat{F}_0 \exp(i\omega t) \tag{5.112}$$

a nájdeme jej riešenie $\widehat{x}$, potom jeho reálna časť $x_{re} = \mathrm{Re}(\widehat{x})$ zodpovedá riešeniu pohybovej rovnice tlmeného oscilátora s kosínusovou vynucujúcou silou $F = F_0 \cos\omega t$ (5.114), a imaginárna $x_{im} = \mathrm{Im}(\widehat{x})$ sínusovej sile (5.115) $F = F_0 \sin\omega t$. Ľahko sa o tom presvedčíme dosadením $\widehat{x} = x_{re} + i\,x_{im}$ do (5.112):

$$m\,\ddot{x}_{re} + \gamma\,\dot{x}_{re} + kx_{re} + i\left(m\,\ddot{x}_{im} + \gamma\,\dot{x}_{im} + kx_{im}\right) = F_0 \cos\omega t + iF_0 \sin\omega t \tag{5.113}$$

[19] Doporučujem čitateľom, aby rovnakým spôsobom vyšetrili integrovanie, násobenie a sčítanie časových vektorov.

Na pravej a ľavej strane sú komplexné čísla, ktoré sa rovnajú práve vtedy, keď ich imaginárne a reálne zložky sú rovnaké:

$$m\,\ddot{x}_{re} + \gamma\,\dot{x}_{re} + kx_{re} = F_0 \cos\omega t \tag{5.114}$$

$$m\,\ddot{x}_{im} + \gamma\,\dot{x}_{im} + kx_{im} = F_0 \sin\omega t \tag{5.115}$$

V komplexnej rovine teda súčasne riešime obe rovnice (5.114), (5.115). Ak $F = F_0 \cos\omega t$, *potom* $x = \mathrm{Re}\left(\widehat{x}\right)$, *ak* $F = F_0 \sin\omega t$ *potom* $x = \mathrm{Im}\left(\widehat{x}\right)$.

Poďme teraz hľadať partikulárne riešenie $\widehat{x}_p$, diferenciálnej rovnice (5.112) Vzhľadom na pravú stranu ho navrhneme v tvare časového vektora[20]

$$\widehat{x}_p = \widehat{A}\exp\left(i\omega t\right) \tag{5.116}$$

Po úpravách:

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \frac{F_0}{m\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+\frac{i\gamma\omega}{m}\right]} = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}\exp\left(i\varphi\right)} = \\ &= \frac{F_0\exp\left[-i\varphi\right]}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}} \qquad (5.117)\\ \widehat{x}_p &= \widehat{A}\exp\left(i\omega t\right) = \frac{F_0\exp\left[i\left(\omega t-\varphi\right)\right]}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}} \qquad (5.118)\end{aligned}$$

kde $\omega_0 = \frac{k}{m}$, $\varphi = arctg\left(\frac{\gamma\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)m}\right)$[21]. Všeobecne riešenie pre kosínusovú vynucujúcu silu $F = F_0\cos\omega t$, dostaneme z reálnej časti $x_p = \mathrm{Re}\left(\widehat{x}_p\right)$: :

$$x = x_h + \frac{F_0\cos\left(\omega t-\varphi\right)}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}} \tag{5.119}$$

poprípade pre sínusovú vynucujúcu silu: $F = F_0\sin\omega t$ z imaginárnej $x_p = \mathrm{Im}\left(\widehat{x}_p\right)$:

$$x = x_h + \frac{F_0\sin\left(\omega t-\varphi\right)}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}} \tag{5.120}$$

V kapitole LDR sme ukázali, že $\lim_{t\to\infty} x_h = 0$ a preto v ustálenom stave je správanie telesa plne reprezentované partikulárnou časťou.

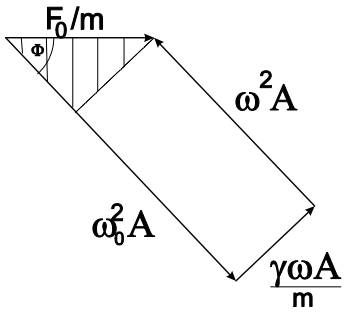
[20] Stačí si uvedomiť, že pravá strana $g\left(x\right)$ je exponenciálna a preto aj partikulárne riešenie má exponenciálny tvar

[21] Uvedomme si, že φ je uhol medzi komlexným vektorom $\widehat{z} = \left(\omega_0^2-\omega^2\right)+i\gamma\omega$ a reálnou osou.

- **Grafická metóda** (Metóda fázorových diagramov)**:** Amplitúdu ako aj fázový posun možno nájsť metódou *fázorových diagramov.* Rovnicu (5.112) prepíšeme do tvaru:

$$\ddot{\widehat{x}} + \frac{\gamma}{m}\,\dot{\widehat{x}} + \omega_0^2 \widehat{x} = \frac{F_0}{m}\exp\left(i\omega t\right) \tag{5.121}$$

a jednotlivé fázory zakreslíme.



obr. V.16

Zobrazne jednotlivé členy rovnice (5.112)[22] komplexnými vektormi. Vznikne uzavretý obrazec, ktorý rotuje v rovine a zachováva si svoj tvar. Fázový posun φ sa dá určiť z pravouhlého trojuholníka vyznačeného na obrázku V.16:

$$\tan\varphi = \frac{\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) m} \tag{5.122}$$

pomocou pytagorovej vety aplikovanej na ten istý trojuholník nájdeme amplitúdu A :

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 A^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}A\right)^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \tag{5.123}$$

$$A = \frac{F_0}{m}\sqrt{\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}} \tag{5.124}$$

Výsledky získané analytickou a grafickou metódou sa pochopiteľne musia zhodovať.

Pokúsme sa tieto riešenia fyzikálne interpretovať. Budeme si všímať predovšetkým amplitúdové a fázové charakteristiky.

[22] $\dot{x}$ má amplitúdu ωA a predbieha vektor x o $\frac{\pi}{2}$, vektor $\ddot{x}$ má amplitúdu $\omega^2 A$ a predbieha $\dot{x}$ o $\frac{\pi}{2}$

- *Amplitúdová charakteristika*: Amplitúda kmitov (5.124) je úmerná amplitúde vynucujúcej sily a závisí od budiacej frekvencie ω. Maximálnu hodnotu dosahuje pri frekvenciách, pre ktoré $\frac{dA}{d\omega} = 0$. Tento prípad nastane, keď výraz $f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2$ bude minimálny:

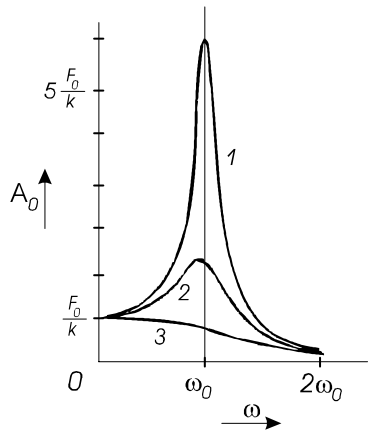
$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = 2\left(\omega_0^2 - \omega_{rez}^2\right)(-2\omega_{rez}) + 2\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 \omega_{rez} = 0 \qquad (5.125)$$

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma^2}{2m^2}\right)} \qquad (5.126)$$

Veľkému rozkmitanie systému periodickou vonkajšou silou s malou amplitúdou F_0 sa hovorí *rezonancia. Nastáva pri frekvencii* ω_{rez} a zodpovedá jej amplitúda:

$$A_r = \frac{F_0}{\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}} \qquad (5.127)$$

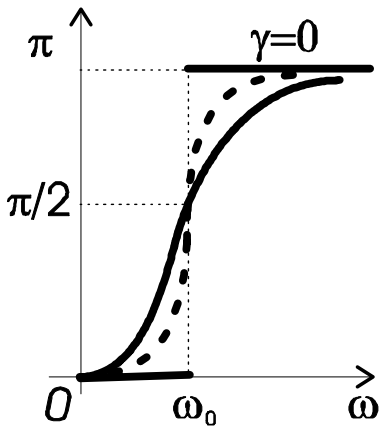
Bez prítomnosti trecích síl $\gamma \to 0$ by rezonacia nastala pri vlastnej frekvencii ω_0 a amplitúda by bola teoreticky nekonečná. Pre $\gamma \neq 0$ má amplitúda konečnú veľkosť a dosahuje sa pri $\omega < \omega_0$. Pri malých frekvenciách vynucujúcej sily ($\omega \to 0$) amplitúda kmitov nadobudne hodnotu $A = \frac{F_0}{k}$, a pri vysokých frekvenciách ($\omega \to \infty$), aplitúda klesne na nulu ($A \to 0$). V prvom prípade teleso iba natiahne pružinu, v druhom prípade dôsledkom zotrvačnosti nestačí reagovať na rýchle zmeny vynucujúcej sily a zotrváva v pokoji. Na obrázku V.17 je znázornená amplitúdová charakteristika $A(\omega)$ pre tri prípady: $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$.



obr. V.17

- *Fázová charakteristika.* Rozoberme vzťah (5.122) podrobnejšie:. Pripomeňme si, že φ je polárny uhol komplexného vektora $\widehat{z} = (\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\gamma\omega}{m}$. Ak trenie v sústave je nulové $\gamma = 0$, potom $\varphi = \begin{cases} 0 & \omega < \omega_0 \\ \frac{\pi}{2} & \omega = \omega_0 \\ \pi & \omega > \omega_0 \end{cases}$. Ak

$\gamma \neq 0$, potom $\varphi = \begin{cases} 0 & \omega = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \omega = \omega_0 \\ \pi & \omega \to \infty \end{cases}$ Fázorová charakteristika pri slabom trení prudko skáče v oblasti rezonančnej frekvencie, pri silnom trení je tento skok pomalý.(obr.V.18)



obr. V.18

Rozoberme si správanie sústavy v rôznych oblastiach budiacich frekvencií.

Prípad $\omega < \omega_0$

$$\varphi \approx 0 \tag{5.128}$$
$$A \approx F_0/m\omega_0^2 = F_0/k \tag{5.129}$$
$$x \approx \frac{F_0}{k}\cos\omega t \tag{5.130}$$
$$\ddot{x} \approx -\omega^2\frac{F_0}{k}\cos\omega t \tag{5.131}$$

Teleso má mále zrýchlenie $\ddot{x} \to 0$, a budiaca sila prekonáva silu pružnosti pružiny. Keďže táto sila je vratná, budiaca sila je vo fáze s výchylkou. Vidieť to nakoniec aj z rovnice (5.130)

Prípad $\omega > \omega_0$ (vysoké frekvencie)

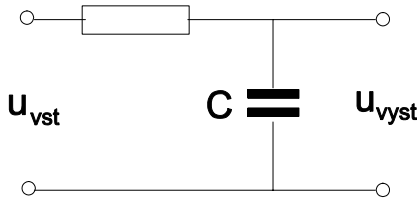
$$\varphi \approx \pi \tag{5.132}$$
$$A \approx F_0/m\omega^2 \tag{5.133}$$
$$x \approx -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t \tag{5.134}$$
$$\ddot{x} \approx \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{5.135}$$

Sila pružnosti $F = kx \to 0$ pri vysokých frekvenciách je v porovnaní so silou $m\,\ddot{x}$, ktorá urýchľuje celý systém, zanedbateľná. Ak by sme pružinu odstránili, ani

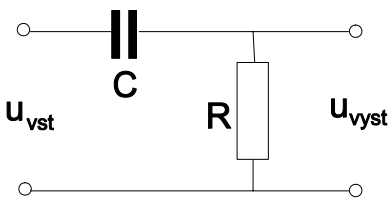
by sme si to nevšimli. Budiaca sila zastupuje celú vratnú silu a preto je logicky v protifáze voči výchylke. Pri nízkych frekvenciách je zrýchlenie sústavy malé, ale amplitúda neklesne pod $\frac{F_0}{k}$. Pri vysokých frekvenciách je výchylka malá, ale amplitúda zrýchlenia neklesne pod $\frac{F_0}{m}$. Vysokofrekvenčné chovanie možno využiť na izoláciu proti kmitaniu. Ak napríklad chceme uchrániť predmet pred vibráciami s frekvenciou ω, ktoré vznikajú na druhom konci podpornej pružiny, mali by sme vybrať takú pružinu, ktorej tuhosť $\omega > \omega_0$

Komplexná metóda má veľké využitie pri analýze striedavých obvodov:

Príklad 38 Obvody na obr.V.19 sa používajú ako jednoduché filtre vysokých (a) a nízkych (b) frekvencií. Nájdite závislosť amplitúd napätia od frekvencií tzv. prenosové charakteristiky obvodov za predpokladu, že na vstupoch pôsobí striedavé napätie s konštantnou amplitúdou a premennou frekvenciou ω. Pri akej frekvencii bude amplitúda výstupného napätia rovná $\frac{1}{\sqrt{2}}$ amplitúdy vstupného napätia (v tomto prípade klesne výstupný výkon na polovicu vstupného)?



obr. V.19a



obr. V.19b

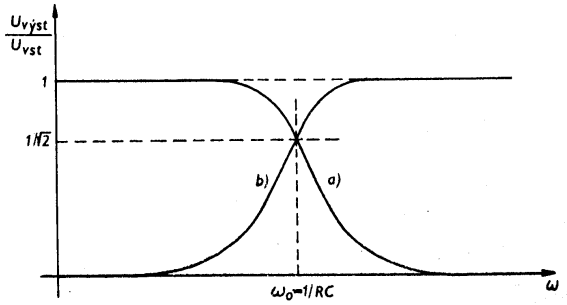
Riešenie: Vstupné napätie v obvode (a) je dané súčtom napätí na kondenzátore a odpore $U_{vst} = \frac{Q}{C} + Ri = \frac{\int idt}{C} + Ri$, a výstupné zodovedá úbytku napätia na odpore: $U_{vys} = Ri$. Prechodom do komplexnej roviny ($i = I_0 \cos(\omega t) \rightarrow \hat{\imath} = \hat{I}_0 \exp(\omega t)$) pre komplexné amplitúdy napätia:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{vys} &= \hat{u}_{vst} \frac{1}{1 + j\omega CR} \\ \frac{|\hat{u}_{vys}|}{|\hat{u}_{vst}|} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \end{aligned}$$

Zopakovaním postupu pre druhý obvod:

$$\frac{|\hat{u}_{vys}|}{|\hat{u}_{vst}|} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

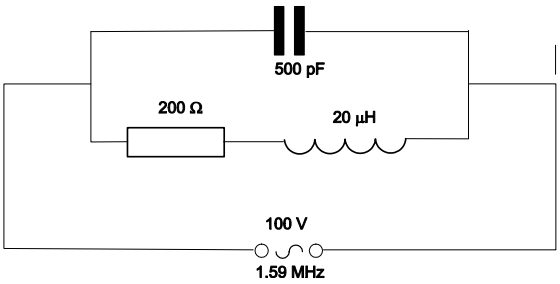
Podmienka $\frac{|\hat{u}_{vys}|}{|\hat{u}_{vst}|} = \left(1/\sqrt{2}\right)$ bude splnená v obidvoch príkladoch pri frekvencii $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. Prenosové charakteristiky sú znázornené na obr.V.20



obr. V.20

Vidíme, že prvý obvod prepúšťa iba vysoké frekvencia a preto slúži ako nízkofrekvenčný filter. Druhý obvod sa chová opačne. ♢

Príklad 39 Nájdite amplitúdu prúdu v obvode (obr.V.21), v závislosti od frekvencie zdroja striedavého napätia s amplitúdou U_0.



obr. V.21

Riešenie: Zostavme Kirchhofove rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\int i_1 dt}{C} &= u \\ Ri_2 + L\frac{di_2}{dt} &= u \\ i_1 + i_2 &= i \end{aligned}$$

Dostali sme sústavu diferenciálno-integrálnych rovníc, ktorú ľahko vyriešime prechodom do komplexnej roviny $i_1 \to \hat{i}_{01}e^{i\omega t}$, $i \to \hat{i}_0 e^{i\omega t}$, $i_2 \to \hat{i}_{02}e^{i\omega t}$, $u \to \hat{u}_0 e^{i\omega t}$(všimnite si, že rovnice sú algebraické):

$$\begin{aligned} -j\frac{1}{\omega C}\hat{i}_{01} &= \hat{u}_0 \\ R\hat{i}_{02} + Lj\omega\hat{i}_{02} &= \hat{u}_0 \\ \hat{i}_{01} + \hat{i}_{02} &= \hat{i}_0 \end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami:

$$\begin{aligned} \hat{\imath}_0 &= \hat{\imath}_{01} + \hat{\imath}_{02} = \hat{u}_0 \left[j\omega C + \frac{1}{R + Lj\omega} \right] \\ |\hat{\imath}_0| &= U_0 \left[\sqrt{\left(\omega C + \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega C}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Na prvý pohľad sa nám môže zdať, že vynucujúcim silám kosínusového alebo sínusového charakteru sme venovali neprimeranú pozornosť. V skutočnosti sme ale vyšetrili všetky systémy, na ktoré pôsobia akékoľvek periodické sily. Každá periodická funkcia sa dá rozložiť do Fourierového radu a použitím princípu superpozície dokážeme nájsť riešenie DR.

$\boxed{\text{Príklad 40}}$ Na tlmený oscilátor pôsobí periodická sila $F(t) = \begin{cases} F_0 \text{ pre } t \in < 0, \frac{T}{2} > \\ -F_0 \text{ pre } t \in < \frac{T}{2}, T > \end{cases}$.
Nájdite výchylku tohto systému v ľubovoľnom čase $x(t)$.

Riešenie: Použime Fourierov rozvoj. Pohybová rovnica má tvar:

$$m\,\ddot{x} + \gamma\,\dot{x} + kx = F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + ... \right) \tag{5.136}$$

Podľa princípu superpozície:

$$x(t) = \frac{4F_0}{\pi m} \left(\frac{\sin(\omega t - \varphi_1)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} + \frac{1}{3} \frac{\sin(3\omega t - \varphi_2)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - (3\omega)^2\right)^2 + (\gamma 3\omega)^2}} + ... \right) \tag{5.137}$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\tan \varphi_i = \frac{\gamma \omega_i}{\omega_0^2 - (\omega_i)^2}$ $\diamondsuit$

Superpozíciou sa dajú v princípe riešiť otázky, na akých otáčkach nesmie pracovať sústruh, akou frekvenciou sa nesmie rozkmitať most aby sa v dôsledku rezonancie nerozsypali. Stačí nájsť (teoreticky alebo experimentálne) vlastné frekvencie tohto systému a zistiť, či vo Fourierovom rozklade vonkajšej sily sú nenulové koeficienty pri sínusoch alebo kosínusoch s týmito frekvenciami. Ak koeficienty nie sú nulové, resp. nie sú veľmi malé, potom rezonancia môže spôsobiť katastrofu. V predchádzajúcom príklade sú nebezpečné nepárne násobky vlastnej frekvencie systému ω_0.

5.3 Špeciálne typy diferenciálnych rovníc

5.3.1 Diferenciálne rovnice typu m$\ddot{x}$=F(t)

Znížme rád DR zavedením substitúcie $v = \dot{x}$ a separáciou premenných:

$$m\dot{v} = F(t) \tag{5.138}$$

$$\int_{v_0}^{v} m dv = \int_{0}^{t} F(t)\, dt \tag{5.139}$$

$$v - v_0 = \frac{1}{m}\int_{0}^{t} F(t)\, dt \tag{5.140}$$

Keďže $v = \dot{x}$ rovnakým spôsobom sa dopracujeme k polohe telesa $x(t)$:

$$x - x_0 = \int_{0}^{t} \left[\frac{1}{m}\int_{0}^{t} F(t)\, dt + v_0\right] dt \tag{5.141}$$

$\boxed{\text{Príklad 41}}$ Teleso sa pohybuje pod pôsobením časovo sa meniacej sily $F(t) = at$. Nájdite polohu telesa v ľubovolnom čase $x(t)$, ak $x(0) = 1$, $v(0) = 0$.

Riešenie: Zostavme pohybovú rovnicu a separujme jednotlivé premenné:

$$m\dot{v} = at \tag{5.142}$$

$$\int_{v_0=0}^{v} m dv = \int_{0}^{t} at dt \tag{5.143}$$

$$mv = a\frac{t^2}{2} \tag{5.144}$$

$$\int_{x_0=1}^{x} m dx = \int_{0}^{t} a\frac{t^2}{2} dt \tag{5.145}$$

$$x = \frac{1}{m}a\frac{t^3}{6} + 1 \tag{5.146}$$

$\diamondsuit$

5.3.2 Diferenciálne rovnice typu m$\ddot{x}$=F(x)

Znížme rád DR. substitúciou $v = \dot{x}$ a rovnicu upravme:

$$m\dot{v} = F(x) \tag{5.147}$$

$$mdv = F(x)\,dt \tag{5.148}$$

Rovnica je takmer separovaná, ale na pravej strane sa vyskytujú funkcie dvoch premenných: x a t. Na vyjadrenie dt, využijeme čisto fyzikálnu predstavu: Keďže za čas dt teleso prejde dráhu $dx = vdt$ potom po dosadením do (5.148) dostaneme:

$$mvdv = F(x)\,dx \tag{5.149}$$

$$\int_{v_0}^{v} d\left(m\frac{v^2}{2}\right) = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx \tag{5.150}$$

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx \tag{5.151}$$

Rovnica vyjadruje zákon zachovania energie. Silové pole je konzervatívne, (kapitola 7.) pretože práca, ktorú treba vykonať medzi dvomi ľubovoľnými bodmi nezávisí od trajektórie. Pointa je v tom, že každé dva body spája prave jedna trajektória. Ak označíme potenciálnu energiu U, potom podľa definície potenciálnej energie (kap.7):

$$\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = U(x_0) - U(x)$$

z rovnice (5.151) dostaneme:

$$m\frac{v^2}{2} + U(x) = m\frac{v_0^2}{2} + U(x_0) = konšt \tag{5.152}$$

Z tejto závislosti odvodíme polohu telesa $x(t)$. Najskôr vyjadrime $v(x) = \frac{dx}{dt}$ a v rovnici (5.152) separujeme premenné :

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[U(x_0) - U(x) + \frac{1}{2}mv_0^2\right]}} \tag{5.153}$$

Pre porovnanie vyriešme podobný príklad s rovnakými počiatočnými podmienkami ako v predchádzajúcej úlohe. Sila však bude závisieť od polohy:

$$m\,\ddot{x} = ax$$

Ide o typ diferenciálnej rovnice, ktorý vedie k zákonu zachovania energie. Potenciálnu energiu určme vzhľadom na referenčný bod $x_{ref} = 0$.

$$U(x) = -\int_{x_{ref}=0}^{x} F(x)\,dx = -a\frac{x^2}{2} \tag{5.154}$$

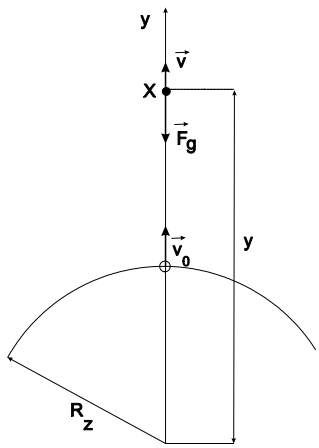
$$m\frac{v^2}{2} + U(x) = m\frac{v_0^2}{2} + U(x_0 = 0) \tag{5.155}$$

$$m\frac{v^2}{2} - a\frac{x^2}{2} = 0 \tag{5.156}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{x} = \int_0^t \sqrt{\frac{a}{m}}dt \tag{5.157}$$

Výsledok je veľmi zaujímavý. Zdá, že riešenie neexistuje a teda nie sme schopný zabezpečiť splnenie počiatočných podmienok. Je to v rozpore s Cauchyho vetou. Problém je však v tom, že úprava z (5.156) na (5.157) nie je korektná, pretože rovnicu delíme nulou. Prípad, keď teleso prechádza bodom $x = 0$ treba vyšetrovať samostatne. V tejto polohe pôsobí nulová sila $F = ax = 0$, a keďže $v_0 = 0$, teleso v nej zotrvá[23].

Príklad 42 Teleso s hmotnosťou m bolo vrhnuté z povrchu Zeme rýchlosťou v_0 smerom nahor. Nájdite jeho rýchlosť v ľubovoľnom čase, pričom berte do úvahy nehomogénnosť gravitačného poľa.



obr. V.22

[23] Úloha sa dala riešiť aj zostavením charakteristickej rovnice $m\alpha^2 = a$, ktorá má korene $\alpha = \pm\sqrt{\frac{a}{m}}$ a preto $x(t) = c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{a}{m}}t\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{a}{m}}t\right)$. Zohľadnením počiatočných podmienok $x \equiv 0$

Riešenie: Na teleso s hmotnosťou m pôsobí vo vzdialenosti y od stredu Zeme gravitačná sila a podľa 2. Newtonovho zákona platí:

$$m\frac{d^2}{dt^2}y = m\frac{d}{dt}v = -\varkappa\frac{M_z m}{y^2}$$

kde M_z je hmotnosť Zeme, R_z polomer Zeme, v rýchlosť. V rovnici vystupujú tri premenné: v, t, y. Známym trikom [24] vyjadríme časový element pomocou rýchlosti $dt = \frac{dy}{v}$ a po odseparovaní premenných pravú a ľavú stranu zintegrujeme:

$$\begin{aligned}
\int_{v_0}^{v} v dv &= \int_{R_z}^{y} -\varkappa\frac{M_z}{y^2}dy \\
v^2 &= 2\varkappa M_z\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R_z}\right) + v_0^2 \\
v &= \pm\sqrt{2\varkappa M_z\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R_z}\right) + v_0^2}
\end{aligned}$$

Obe znamienka majú fyzikálny význam: kladný koreň reprezentuje pohyb telesa smerom nahor, záporný voľný pád. V najvyššom bode trajektórie $y_{\max}$ rýchlosť telesa je nulová: $v = 0$:

$$y_{\max} = \frac{2\varkappa M_z R_z}{2\varkappa M_z - v_0^2 R_z}$$

Z posledného vzťahu vyplýva, že $y_{\max}$ bude mať konečnú veľkosť iba vtedy, ak $2\varkappa M_z \neq v_0^2 R_z$ a nekonečnú veľkosť (t.j. teleso opustí zem a už sa nevráti nazad) keď $2\varkappa M_z = v_0^2 R_z$. Pre únikovou rýchlosťou platí: $v_0 = \sqrt{\frac{2\varkappa M_z}{R_z}}$. Diferenciálnu rovnicu sme mohli riešiť priamo zo ZZE, pretože išlo o typ: $m\,\ddot{x} = f(x)$ ♢

$\boxed{\text{Príklad 43}}$ Vypočítajte prácu, ktorú vykoná sila pri urýchlení telesa z 0 na rýchlosť v. Uvažujte rôzne typy síl: $F = k$, $F = kt$, $F = F_0 + kx$. Závisí vykonaná práca od tvaru sily?

Riešenie: Najskôr vypočítame práce explicitne: *a,* Z pohybovej rovnice $m\ddot{x} = k$ a počiatočných podmienok $x = 0, v = 0$ určíme rýchlosť a polohu:

$$v = \frac{k}{m}t \qquad x = \frac{1}{2}\frac{k}{m}t^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{k}v^2$$

[24] pozornejším z Vás iste neuniklo, že riešime diferenciálnu rovnicu typu: $m\,\ddot{x} = f(x)$

Dosadíme do vzťahu pre prácu:

$$A = \int_0^x F dx = kx = \frac{1}{2} m v^2$$

b, Opäť vyjadríme z pohybovej rovnice rýchlosť, ktorú dosadíme do vzťahu pre prácu:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= kt \implies v = \frac{1}{2}\frac{k}{m}t^2 \\ A &= \int_0^x ktdx = \int_0^t ktvdt = \int_0^t kt^3 \frac{1}{2}\frac{k}{m}dt = \frac{1}{2}\frac{k^2t^4}{4\,m} = \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

c, pohybová rovnica pre posledný príklad je typom diferenciálnej rovnice (5.147) ktorý vedie k ZZE a teda k výsledku:

$$A = \frac{1}{2}mv^2$$

Vidíme, že všetky práce sú rovnaké k čomu sme mohli dospieť okamžite Keďže pre silu z Newtonovho zákona vyplýva $F = m\dot{v}$ a pre dráhový element $dx = vdt$ potom[25]:

$$A = \int_0^x F dx = \int_0^v m\dot{v}vdt = \int_0^v \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt}dt = \frac{1}{2}mv^2$$

Práca teda nezávisí od typu sily. ♢

Využitie ZZE na výpočet periód

Predpokladajme, že systém kmitá s periódou T, pričom jeho potenciálna energia $E_p = \frac{1}{2}a\left|x\right|^n$.V jednorozmernom priestore je každé silové pole konzervatívne a platí v ňom ZZE:

$$\frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + E_p\left(x\right) = E \tag{5.158}$$

Zvoľme súradnicový systém tak, aby potenciálna energia dosiahla svoje minimum v bode $x = 0$. Teleso sa zastaví v bodoch so súradnicami x_0 a -x_0, ($\dot{x}$= 0) a dosiahne energiu

$$E = \frac{a}{2}x_0^n \tag{5.159}$$

[25] $d\left(\frac{1}{2}mvv\right) = \frac{1}{2}m\dot{v}v + \frac{1}{2}mv\dot{v} = m\dot{v}v$

Z rovnice (5.158) určíme periódu[26]

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p\right]}} = 2\sqrt{\frac{m}{a}}\int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^n - |x|^n}} = 4\sqrt{\frac{m}{a}}x_0^{1-\frac{n}{2}}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^n}} \tag{5.160}$$

a použijeme (5.159):

$$T \sim E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \tag{5.161}$$

Vo všeobecnosti možno povedať, že kmity sú neizochrónne a ich perióda závisí od celkovej energie E. Výnimku tvoria kmity s kvadratickou formou potenciálnej energie t.j. keď $n = 2$.

- **Izochrónne kmity.** Zamerajme sa na tento špeciálny prípad a urobme podrobnejšiu analýzu: Z praktických dôvodov, ktoré pochopíme neskôr, prepíšme potenciálnu energiu ako funkciu zovšeobecnených súradníc $q, \dot{q}$. Pod súradnicami si môžte predstaviť uhol φ, polohu telesa x a pod.

$$\frac{1}{2}\alpha\,\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\beta q^2 = E \tag{5.162}$$

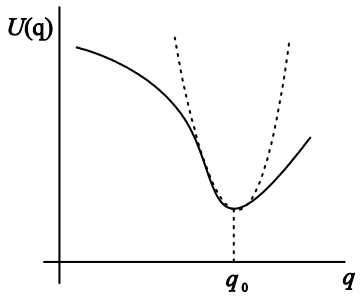
Keďže platí ZZE, $E = konšt$, po zderivovaní:

$$\ddot{q} = -\frac{\beta}{\alpha}q \tag{5.163}$$

Ide o rovnicu harmonického oscilátora, s výchylkou $q = q_0 \cos(\omega t + \delta)$ a uhlovou frekvenciou:

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{5.164}$$

Izochrónne kmity sú v prírode veľmi časté. Každý systém v rozumnom okolí rovnovážnej polohy ich vykonáva. Nech napríklad potenciálna energia má tvar znázornený na obrázku V.23:



obr. V.23

[26] pomôžeme si substitúciou $\xi = \frac{x}{x_0}$, $d\xi = \frac{dx}{x_0}$

Rozviňme ju do Taylorovho radu v okolí rovnovážnej polohy q_0, v ktorom má svoje minimum $\frac{dU}{dx}|_{q=q_0} = 0$:

$$U(q) = U(q_0) + \frac{dU}{dq}|_{q=q_0}(q - q_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dq^2}|_{q=q_0}(q - q_0)^2 + ... \quad (5.165)$$

Označme konštantu $\frac{d^2U}{dq^2}|_{q=q_0} = k$ a vypočítajme silu pôsobiaca na takýto systém

$$F = -\frac{dU}{dq} = -k(q - q_0) \quad (5.166)$$

Získané poznatky, môžeme zhrnúť do nasledovného praktického záveru(5.163): *Ak zistíme, že celková energia systému sa dá vyjadriť v tvare kvadratickej formy*

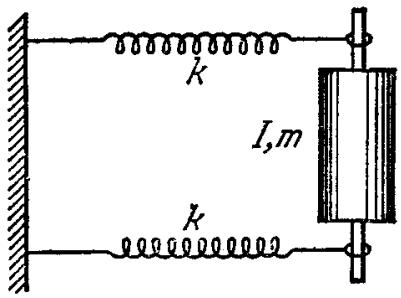
$$\frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\beta q^2 = E \quad (5.167)$$

potom systém vykonáva harmonický pohyb s periódou

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (5.168)$$

Stačí nájsť koeficienty β, α a vzájomne ich medzi sebou *podeliť*.

Príklad 44 Valček s polomerom R je spojený s pružinami s tuhosťami k podľa (obr. V.24). Určte jeho periódu



obr. V.24

Riešenie: Celková energia valčeka E pozostáva s potenciálnej energie a kinetickej, ktorá má dve zložky: translačnú a rotačnú:

$$E = 2\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (5.169)$$

kde J je moment zotrvačnosti, x je výchylka z rovnovážnej polohy, v_T- je rýchlosť ťažiska. Ak φ reprezentuje uhol otočenia valčeka vzhľadom na rovnovážnu polohu potom:

$$x = R\varphi \tag{5.170}$$

$$v_T = \dot{x} = R\,\dot{\varphi} \tag{5.171}$$

Z rovnice (5.169) môžeme vytvoriť kvadratické formy, ktoré závisia buď od polohy E_x alebo od uhla E_φ :

$$E_x = \frac{1}{2}\left[2k\right]x^2 + \frac{1}{2}\left[m + \frac{I}{R^2}\right]\dot{x}^2 \tag{5.172}$$

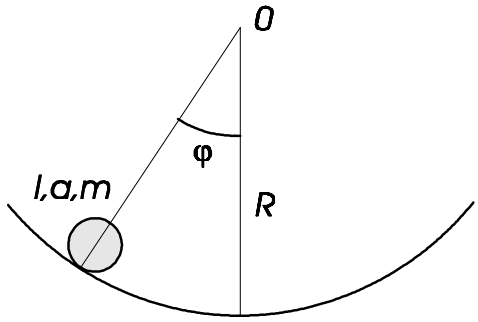
$$E\varphi = \frac{1}{2}\left[2kR^2\right]\varphi^2 + \frac{1}{2}\left[mR^2 + I\right]\dot{\varphi}^2 \tag{5.173}$$

Celková energia je kvadratickou formou a podľa (5.168) na určenie ω stačí podeliť výrazy v hranatých zátvorkách:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m + \frac{J}{R^2}}} \tag{5.174}$$

♢

Príklad 45 Gulička polomeru r sa pohybuje (bez prešmykovania) po vnútornej strane misky polomeru R. Vypočítajte periódu malých kmitov.



obr. V.25

Riešenie: Za zovšeobecnenú súradnicu zvolíme uhol φ. Kinetická energia pozostáva z kinetickej energie ťažiska a z rotačnej energie:

$$T = \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

kde pre rýchlosť ťažiska guličky : $v_T = (R - r)\dot{\varphi}$ a jej uhlovú rýchlosť: $\omega = \frac{v}{r} = \frac{R-r}{r}\dot{\varphi}$, teda:

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)(R - r)^2\,\dot{\varphi}^2$$

Pre potenciálnu energiu dostávame[27]:

$$U = mg(R-r)(1-\cos\varphi) \approx \frac{mg}{2}(R-r)\varphi^2$$

Celková energia má tvar kvadratickej formy:

$$E = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{mg}{2}(R-r)\varphi^2$$

a podľa (5.168) je perióda kmitov:

$$T = 2\pi\sqrt{\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)\frac{R-r}{g}}$$

Dosadením momentu zotrvačnosti pre guľu:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R-r}{g}}$$

$\diamondsuit$

Aj v prípadoch, kedy sa nedá celková energia vyjadriť v tvare kvadratickej formy, je možné zo ZZE určiť periódu kmitov. Keďže:

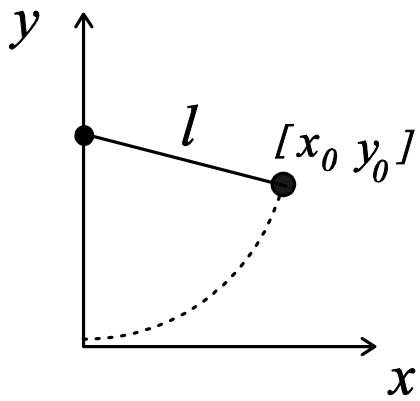
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 + U(x) &= \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) \\
v &= \frac{dx}{dt} = \left[\frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) - U(x)\right]\frac{2}{m} \\
t &= \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) - U(x)\right]\frac{2}{m}}}
\end{aligned}$$

potom pre periódu:

$$\frac{T}{4} = \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{\sqrt{\left[U(x_0) - U(x)\right]\frac{2}{m}}} \tag{5.175}$$

[27] Vzhľadom na malé výchylky φ rozvinieme $\cos\varphi$ do druhého rádu: $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} + ...$

Príklad 46 Teleso zavesené na niti púšťame z bodu $[x_0, y(x_0)]$. Zistite, za aký čas t sa dostane teleso do najnižšej polohy, v závislosti od x_0.

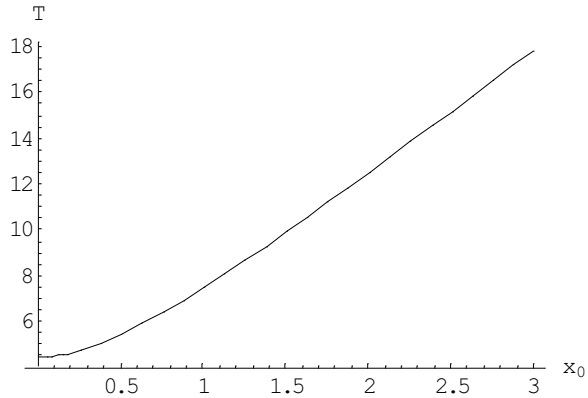


obr. V.26

Riešenie: Tento čas je rovný štvrť-perióde a podľa rovnice (5.175) platí[28]:

$$t = \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{\sqrt{[U(x_0) - U(x)]\,\frac{2}{m}}} = \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{\sqrt{\left[mg\left(l - \sqrt{l^2 - x_0^2}\right) - mg\left(l - \sqrt{l^2 - x^2}\right)\right]\frac{2}{m}}}$$

Integrál sa nedá riešiť analyticky, ale numericky a výsledok je znázornený na obr.V.27:



obr. V.27

Všimnite si, že pri malých výchylkách je čas rovnaký a kmity sú izochrónne. ♢

[28] Potenciálnu energiu vyjadrujeme v sústave znázornenej na obr. Pre y-ovú súradnicu preto platí $y = l - \sqrt{l^2 - x^2}$

5.4 Ako riešiť DR, ktoré sa nedajú riešit explicitne ?

V predchádzajúcich kapitolách sme si v stručnosti uviedli základné metódy riešenia DR V praxi sa nám však bežne stáva, že uvedené metódy zlyhávajú a nevedú k cieľu. V takýchto prípadoch možno použiť nasledovné tri stratégie riešenia:

i) kvalitatívna metóda

ii) rozvoj do radu a, podľa nezávislej premennej b, podľa parametra (tzv. poruchová metóda).

iii) numerická metóda

5.4.1 Kvalitatívna metóda

Cieľom metódy je získať kvalitatívnu informáciu o riešení DR.

Príklad 47 Nájdite vlastnosti funkcie y ktorá je riešením nasledovnej DR:

$$2\frac{d^2x}{dx^2} + 8x + x^3 = 0 \tag{5.176}$$

Riešenie: Takýto typ rovnice (5.176) môže popisovať napríklad pohyb hmotného bodu s hmotnosťou $m = 2kg$, na ktorý pôsobí "tvrdnúca" pružina silou $F = -kx - \gamma x^3$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma x^3 = -\left(k + \gamma x^2\right) x \tag{5.177}$$

Jej tuhosť totiž narastá s výchylkou $K = k+\gamma x^2$. Na základe fyzikálnej intuície sa pokúsme formulovať hypotézy o pohybe telesa a teda o riešení pôvodnej rovnice (5.176).

HYPOTÉZA 1: Teleso bude vykonávať periodický pohyb. Predpokladajme, že v nejakom čase t prechádza bodom x_0, rýchlosťou v_0. Podľa rovnice (5.177) mu sila udeľuje zrýchlenie $a_0 = -\frac{k}{m}x_0 - \frac{\gamma}{m}x_0^3$, ktoré je orientované do rovnovážnej polohy, čo má za následok jeho spomaľovanie. Ak by sa teleso naďalej pohybovalo so záporným zrýchlením a_0, zastalo by po uplynutí doby $\tau = \frac{v_0}{a_0}$. V našom prípade je teleso spomalované oveľa intenzívnejšie ($|a| \geqq |a_0|$) a preto sa zastaví skôr. V okamihu keď dosiahne nulovú rýchlosť bude na neho pôsobť sila $F = -kx - \gamma x^3$, ktorá ho začne ťahať do rovnovážnej polohy. Po prekročení $x = 0$, sila bude mať opäť brzdiaci účinok a po určitom čase teleso zastaví.

Z uvedeného vyplýva, že pohyb je periodický i keď nie harmonický. Keďže naša pružina na rozdiel od LHO "tvrdne", dokážeme predpovedať, že perióda :

$$T < 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} = 4\pi\,[s]$$

Hypotézu o periodicite deja sme mohli dokázať aj z energetickej bilancie. Pole $F(x) = -kx - \gamma x^3$ je konzervatívne, neexistuje tu žiaden útlm a musí platiť ZZE. Energia systému sa nestráca len prerozdeľuje na kinetickú a potencionálnu. Pre výchylku teda platí

$$x(t) = x(t+T) \tag{5.178}$$

HYPOTÉZA 2: Tá časť cyklu, v ktorej sa teleso približuje k svojej krajnej polohe, vyzerá rovnako ako tá časť cyklu, v ktorej sa od tejto polohy vzďaľuje:

$$x(t_0 - t) = x(t_0 + t) \tag{5.179}$$

kde t_0 je niektorá z hodnot t, pre ktoré má teleso maximálnu výchylku a jeho rýchlosť je nulová:

$$\dot{x}(t_0) = 0 \tag{5.180}$$

HYPOTÉZA 3 Pôsobiaca sila $|F|$ je symetrická vzhľadom na bod $x = 0$ a preto pohyb smerom doľava, bude zrkadlovým obrazom pohybu doprava. Oba tieto pohyby trvajú presne pol periódy.

$$x\left(t + \frac{1}{2}T\right) = -x(t) \tag{5.181}$$

♢

5.4.2 Riešenie DR rozvojom do radov

a, podľa nezávislej premennej

Riešenie DR rozvinieme do radu podľa nezávislej premennej t, ktorá v pohybových rovniciach reprezentuje čas:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \tag{5.182}$$

Funkciu (5.182) dosadíme do DR a určíme z nej neznáme koeficienty c_n.

$\boxed{\text{Príklad 48}}$ Vyriešte DR:

$$m\,\ddot{x} = -kx \tag{5.183}$$

Riešenie: Predpokladajme, že túto DR nevieme riešit explicitne a navrhnime jej riešenie v tvare nekonečného radu (5.182). Dosadením do (5.183) spolu s odpovedajúcimi deriváciami :

$$\dot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} \tag{5.184}$$

$$\ddot{x} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-2} \tag{5.185}$$

a menších úpravách :

$$\sum_{n=0}^{\infty} m c_{n+2}(n+2)(n+1)t^n = -\sum_{n=0}^{\infty} k c_n t^n \tag{5.186}$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách parametra t, získame rekurentný vzťah pre koeficienty c_n :

$$c_{n+2} = -\frac{k}{m}\frac{1}{(n+2)(n+1)}c_n \tag{5.187}$$

Koeficienty c_0 a $c_1$nie sú týmito rovnicami určené jednoznačne a predstavujú ľubovolné konštanty všeobecného riešenia DR. Ich hodnoty získame z počiatočných podmienok. Podľa (5.187) vyjadrime aspoň prvé členy c_n:

$$n = 0 \qquad c_2 = -\frac{k}{m}\frac{1}{2.1}c_0 \tag{5.188}$$

$$n = 1 \qquad c_3 = -\frac{k}{m}\frac{1}{3.2}c_1 \tag{5.189}$$

$$n = 2 \qquad c_4 = \left(-\frac{k}{m}\right)\left(-\frac{k}{m}\right)\frac{1}{4!}c_0 \tag{5.190}$$

$$n = 3 \qquad c_5 = \left(-\frac{k}{m}\right)\left(-\frac{k}{m}\right)\frac{1}{5!}c_1 \tag{5.191}$$

a dosaďme ich do (5.182)

$$\begin{aligned} x &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + ... = \\ &= c_0 \left(1 - \frac{\left(\sqrt{k/m}t\right)^2}{2!} + \frac{\left(\sqrt{k/m}t\right)^4}{4!} - \frac{\left(\sqrt{k/m}t\right)^6}{6!} + ... \right) + \\ &\quad + c_1 \sqrt{m/k} \left(\sqrt{k/m}t - \frac{\left(\sqrt{k/m}t\right)^3}{3!} + \frac{\left(\sqrt{k/m}t\right)^5}{5!} + ... \right) \end{aligned}$$

V zátvorkách vystupujú rozvoje trigonometrických funkcií: $\sin x$ a $\cos x$:

$$x = c_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + c_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

K takémuto výsledku sme sa samozrejme mohli dopracovať priamou metódou.$\diamondsuit$

b, rozvoj podľa parametra-poruchová metóda

Základná myšlienka poruchovej metódy spočíva v tom, že všeobecné riešenie DR sa dá vyjadriť ak funkcia tzv. poruchového parametra λ, podľa ktorého je možné rozvinúť toto riešenie do Taylorovho radu:

$$x(t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \lambda^n \tag{5.192}$$

Ide o podobný rozvoj, ako v prípade (5.182), len podľa inej premennej. Pre istotu pripomíname, že x_n sú konštanty vzhľadom na poruchový parameter λ, závislé na čase t. V prípade vektorového tvaru pohybovej rovnice (5.192):

$$\overrightarrow{r}(t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \overrightarrow{r}_n \lambda^n \tag{5.193}$$

$\boxed{\text{Príklad 49}}$ Jablko padá na zem. Určte jeho polohu v ľubovoľnom čase t. Úlohu riešte poruchovou metódou do druhého rádu.

Riešenie: Pohybová rovnica má tvar:

$$\vec{F} \equiv m\vec{g} + 2m\vec{v} \times \vec{\omega} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{5.194}$$

Člen

$$\vec{F}' = 2m\vec{v} \times \vec{\omega} \tag{5.195}$$

predstavuje poruchu. Ak $\vec{r}$ je riešenie všeobecného problému a $\vec{r}_0$ je riešenie rovnice bez poruchového členu, potom zväčšovaním poruchy od 0 k $\vec{F}'$ bude $\vec{r}_0$ spojito prechádzať k $\vec{r}$. Vyjadrime funkciu $\vec{r}(t)$ ako funkciu parametra λ, a rozložme ju do radu. Ak $\lambda = 0$, porucha je vypnutá, ak $\lambda = 1$ porucha je úplne zapnutá:

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda\vec{r}_1 + \lambda^2\vec{r}_2 + \dots \tag{5.196}$$

Namiesto pôvodnej rovnice budeme riešiť rovnicu:

$$\vec{F}_0 + \lambda\vec{F}' = m\,\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_0 + \lambda\vec{r}_1 + \lambda^2\vec{r}_2 + \dots) \tag{5.197}$$

porovnáme členy pri rovnakých mocninách λ.
Po dosadení (5.196) a (5.197)do (5.194):

$$\begin{aligned} m\vec{g} + 2\lambda m\,\frac{d}{dt}(\vec{r}_0 + \lambda\vec{r}_1 + \lambda^2\vec{r}_2 + \dots) \times \vec{\omega} &= m\,\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_0 + \lambda\vec{r}_1 + \lambda^2\vec{r}_2 + \dots) \\ m\vec{g} + 2m(\lambda\vec{v}_0 + \lambda^2\vec{v}_1 + \lambda^3\vec{v}_2 + \dots) \times \vec{\omega} &= m\,\frac{d}{dt}(\vec{v}_0 + \lambda\vec{v}_1 + \lambda^2\vec{v}_2 + \dots) \end{aligned} \tag{5.198}$$

Neporuchový člen (*nulté* priblíženie) je

$$\vec{v}_0 = \vec{g}t \tag{5.199}$$

Spätným dosadením do rovnice (5.198), získame *prvé* priblíženie:

$$\vec{v}_0 + \lambda\vec{v}_1 = \vec{g}t + (\vec{g} \times \vec{\omega})\,t^2 \tag{5.200}$$

a po integrácii:

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{2}\,\vec{g}t^2 + \frac{1}{3}(\vec{g} \times \vec{\omega})\,t^3 \tag{5.201}$$

Podobne pre *druhé* priblíženie:

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \vec{g}t + (\vec{g} \times \vec{\omega})\,t^2 + \frac{2}{3}\,[(\vec{g} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega}]\,t^3 \\ \vec{r}_2 &= \frac{1}{2}\,\vec{g}t^2 + \frac{1}{3}(\vec{g} \times \vec{\omega})\,t^3 + \frac{1}{6}\,[(\vec{g} \times \omega) \times \vec{\omega}]\,t^4 \end{aligned} \tag{5.202}$$

$\diamondsuit$

5.4.3 Numerická metóda

Predpokladajme, že na teleso pôsobí sila $F(x, v, t)$ a pohybová rovnica má tvar: $ma = F(x, v, t)$ V krátkych časových okamihoch Δt, sa pôsobiaca sila $F(x, v, t)$ príliš nezmení a možno ju považovať za konštantu. Sila udeľuje telesu zrýchlenie $a = F/m$, takže pre novú rýchlosť:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v(t + \Delta t) = v(t) + a(t) * \Delta t \tag{5.203}$$

Analogicky pre polohu x:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \Longrightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) * \Delta t \tag{5.204}$$

Celý proces cyklicky opakujeme. Na základe týchto vzťahov postupne dostávame rekurentné vzťahy pre celý pohyb:

$$\begin{aligned} v\left(n\Delta t\right) &= v\left(\left(n-1\right)\Delta t\right) + \Delta t \cdot \frac{F\left(x\left(\left(n-1\right), \Delta t\right), \left(n-1\right)\Delta t\right)}{m} \\ x\left(n\Delta t\right) &= x\left(\left(n-1\right)\Delta t\right) + \Delta t \cdot v\left(x\left(\left(n-1\right), \Delta t\right), \left(n-1\right)\Delta t\right) \end{aligned}$$

Čím menší je interval Δt, tým presnejší výsledok získame. Metóda sa dá vylepšiť, tak že zrýchlenie telesa v infitenzimálnom elemente Δt berieme v strede intervalu Δx, alebo ako strednú hodnotu začiatočného a konečného zrýchlenia. Podrobnejšie sa s numerickými metódami zonámite vo vyšších ročníkoch.

$\boxed{\text{Príklad 50}}$ Zostavte jednoduchú diferenčnú schému pre kyvadlo s veľkými výchylkami.

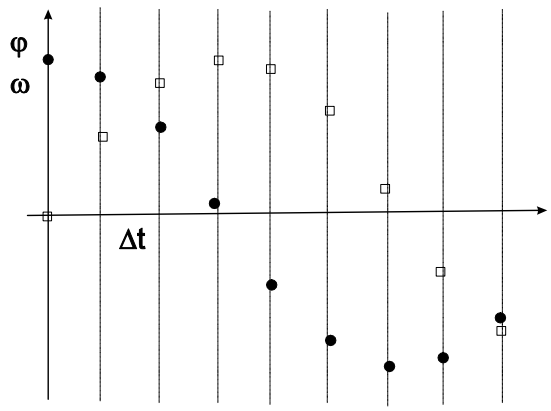
Riešenie: Pohybová rovnica popisujúca popisujúca pohyb kyvadla:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \tag{5.205}$$

Pri veľkých výchylkách nie je možné aproximovať $\sin \varphi \sim \varphi$ a preto uvedenú rovnicu budeme riešiť numericky. Časové derivácie v rovniciach nahradíme konečnými prírastkami:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta t} &= \omega_n & \Longrightarrow \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \omega_n \Delta t \\ \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta t} &= -\frac{g}{l} \sin \varphi_n & \Longrightarrow \omega_{n+1} &= \omega_n - \frac{g}{l} \sin \varphi_n \Delta t \end{aligned}$$

Získali sme rekurentný vzťah na výpočet φ a ω v neskorších časových okamihoch. Riešenie je takýmto spôsobom diskretizované s časovým krokom Δt. Štartovacie hodnoty φ_0 a ω_0 sú dané počiatočnými podmienkami.(obr.V.28)



obr. V.28

Rovnica sa dá riešiť aj analyticky, ale veľmi zdĺhavo. Ide však o poučný príklad, na ktorom budeme demonštrovať využitie mnohých matematických postupov a metód, ktoré sme sa dosiaľ naučili. Diferenciálna rovnica (5.205) je typom diferenciálnej rovnice $m\,\ddot{x}= F\,(x)$ [29] a po zohľadnení počiatočných podmienok $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$:

$$\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

čo zodpovedá zákonu zachovania energie. Po separácii premenných:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \sqrt{2\frac{g}{l}}dt$$

V ľavej časti rovnice zaveďme novú premennú α:

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - 2k^2\sin^2\alpha$$

kde

$$k = \sin\frac{\varphi_0}{2}$$

Potom

$$\sin\varphi\,d\varphi = -4k^2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha$$

a

$$d\varphi = \frac{4k^2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} = \frac{4k^2\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)}} = \frac{2k\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$

Okrem toho

$$\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0} = k\sqrt{2}\cos\alpha$$

[29] stačí zameniť $\varphi \to x$ a $\ddot{\varphi}\to\ddot{x}$

keďže pri $\varphi = \varphi_0$ je $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dosadením do pôvodnej rovnice:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = n\, dt$$

pričom pre periódu T dostaneme

$$n\,\frac{T}{4} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \tag{5.206}$$

Integrál (5.206) sa nedá riešiť analyticky a preto ho vypočítame rozvojom do Taylorovho radu:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \alpha + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 a + \dots$$

Zároveň

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \alpha\, d\alpha = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

Potom

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots\right]$$

Po spätných dosadeniach dostávame výsledný vzorec pre kmity matematického kyvadla:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \dots\right]$$

Vidíme, že pre malé uhly sú kmity izochrónne s periódou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

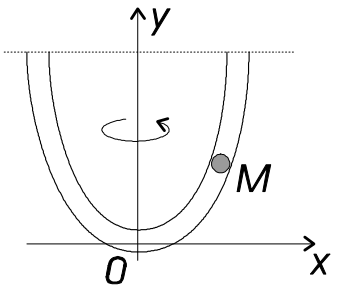
Zároveň vidíme aj ohraničenosť platnosti tohto vzťahu. Chyba pri jeho používaní do $\varphi_0 \leq 20°$ neprevyšuje 1%. Ak by sme zarátali aj druhý člen, tak s tou istou chybou ho môžme používať do odklonu 50°. $\diamondsuit$

5.5 Aplikácie diferenciálnych rovníc.

5.5.1 Využitie DR na hľadanie tvarov kriviek.

Diferenciálne rovnice sa využívajú na hľadanie kriviek, ktoré musia spĺňat isté požiadavky.

Príklad 51 Gulôčka hmotnosti m je pripevnená na hladký drôtik, ktorý leží v jednej rovine a otáča sa okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou ω. Nájdite jeho tvar, ak viete, že guḷôčka sa v ľubovolnej polohe nachádza v rovnováhe.



obr. V.29

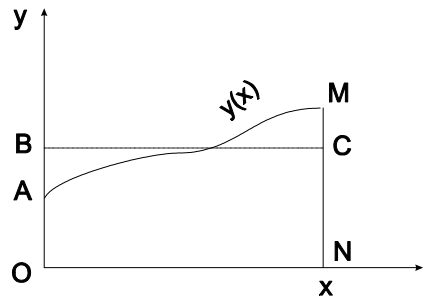
Riešenie: Predpokladajme, že krivka je určená rovnicou $y(x)$. Pohyb vyšetrujme v neinerciálnej vzťažnej sústave, v ktorej na gulôčku pôsobia tri sily: Tiažová $\vec{G} = (0, -mg)$, odstredivá $\vec{F_0} = (m\omega^2 x, 0)$ a tlaková $\vec{N}$. Vzhľadom na to, že gulička je v rovnováhe v ktorejkoľvek polohe, výslednica tiažovej a odstredivej sily $\vec{G}+\vec{F_0}$ musí byť kolmá na podložku, aby sa práve vykompenzovala s tlakovou silou $\vec{N}$. Inak povedané, súčet ich tangenciálnych zložiek je nulový $\left(\vec{G}+\vec{F_0}\right)_\tau = \vec{0}$. Tangenciálny vektor na krivku má súradnice $\vec{\tau} = (dx, dy)$:

$$\left(\vec{G}+\vec{F_0}\right)_\tau = \left(\vec{G}+\vec{F_0}\right)\cdot\vec{\tau} = \left(m\omega^2 x, -mg\right)\cdot(dx, dy) = m\omega^2 x dx - mgdy = 0$$

Riešením diferenciálnej rovnice s počiatočnou podmienkou $y(0) = 0$ zistíme, že gulôčka, sa musí pohybovať na drôtiku v tvare paraboly $y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$.

$\diamondsuit$

Príklad 52 Nájdite krivky pre ktoré platí, že výška obdĺžnika η, ktorý má rovnakú plochu, ako je plocha ohraničená krivkou $y(x)$, je $k - krát$ väčšia ako je $MN = y(x)$ (obr.V.30).



obr. V.30

Riešenie: Využitím vlastností určitých integrálov, matematická formulácia zadania je nasledovná:

$$\int y dx = xky$$

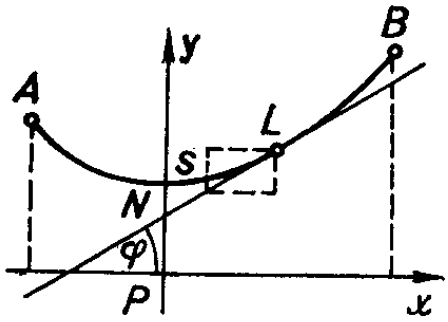
Zderivovaním získame separovateľnú diferenciálnu rovnicu:

$$\begin{aligned} y &= ky + xky' \\ xky' &= y(1-k) \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{1-k}{k}\frac{dx}{x} \\ \ln|y| &= \frac{1-k}{k}\ln|x| + \ln|c| \qquad k \in (0,\infty), c \in \mathrm{Re} \\ y &= cx^{\frac{1-k}{k}} = cx^{\frac{1}{k}-1} \end{aligned}$$

Hľadaná krivka môže mať rôzne tvary. Napríklad, ak $k = 1$, krivka je priamka $y = c$, ak $k \to \infty$, krivka je hyperbola $y = x^{-1}$, ak $k = \frac{1}{3}$ krivka je parabola $y = x^2$ a pod. ♢

Príklad 53 Nájdite tvar dokonale ohybného nerozťažiteľného homogénneho lana, zaveseného na oboch koncoch A,B, ak na neho pôsobí iba gravitačné pole.

Riešenie: Predpokladajme, že lano má tvar funkcie $y = f(x)$. Za os y zvoľme vertikálnu priamku, ktorá prechádza najnižším bodom N (obr.V.31).



obr. V.31

Vyberme na lane ľubovolný bod L. Medzi bodmi L, N pôsobia na lano tri sily: sila horizontálneho napätia $\vec{H}$ v bode N, ťahová sila $\vec{T}$ v bode L, ktorá má smer dotyčnice a tiažová sila $\vec{Q}$ uvažovanej časti lana, pôsobiaca v ťažisku. Keďže dĺžková hustota je ρ a dĺžka oblúku LN je s, potom $Q = \rho s$. Rozložme silu $\vec{T}$ na horizontálnu a vertikálnu zložku a využime podmienku rovnováhy:

$$\begin{aligned} T\sin\varphi &= \rho s \\ T\cos\varphi &= H \end{aligned}$$

kde uhol φ je uhol, ktorý zviera dotyčnica v bode L s osou x. Zavedením konštantného parametra $k = \frac{\rho}{H}$, a vzájomným predelením oboch rovníc dostaneme[30]:

$$y' = ks \tag{5.207}$$

Keďže podľa Pytagorovej vety $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$ potom po zderivovaní (5.207)

$$y'' = ks' = k\sqrt{1 + y'^2}$$

Znížme rád DR substitúciou $y' = z$:

$$\frac{z'}{\sqrt{1 + z^2}} = k$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice má tvar:

$$\ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = kx + c_1$$

Nech v bode N je $x = 0$, $y' = z = 0$ z čoho $c_1 = 0$:

$$z + \sqrt{1 + z^2} = \exp(kx)$$

a po úpravách:

$$\begin{aligned} z &= y' = \frac{1}{2}\left(\exp(kx) - \exp(-kx)\right) \\ y &= \frac{1}{2k}\left(\exp(kx) + \exp(-kx)\right) + c_2 \end{aligned}$$

Pre lepšiu prehľadnosť rovnice zvoľme dĺžku $PN = \frac{1}{k} = y(0) \Longrightarrow c_2 = 0$:

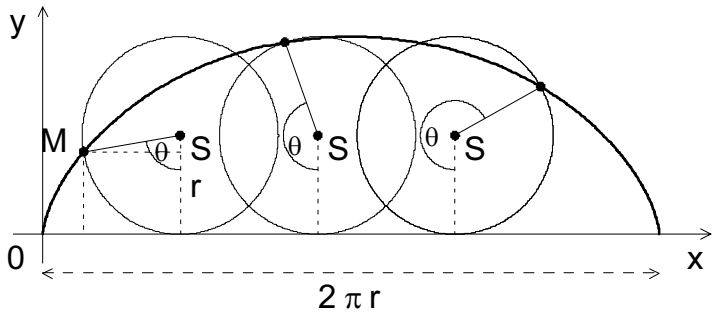
$$y = \frac{1}{2k}\left(\exp(kx) + \exp(-kx)\right)$$

Krivka sa nazýva reťazovka. $\diamondsuit$

[30] tangent uhla φ je rovný derivácii fynkcie y v bode L

5.5.2 Úlohy o cykloidách

Medzi významné krivky, s ktorými sa môžeme stretnúť vo fyzike, v matematike a technike patrí cykloida. Je reprezentovaná trajektóriou hmotného bodu M, ležiaceho na kružnici, ktorý sa kotúľa po priamke (obr. V.32.)

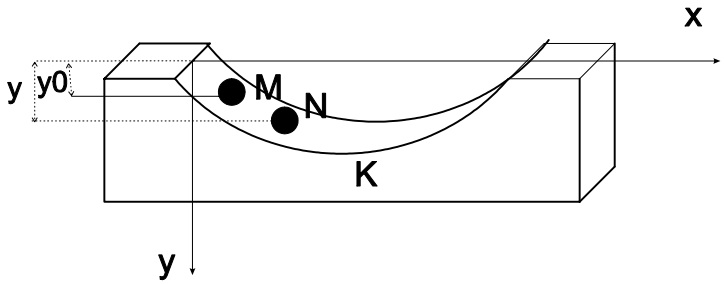


obr. V.32

Z obrázku V.32 je zrejmé, že parametrické vyjadrenie cykloidy platí:

$$x = r\,(\theta - \sin\theta)\,, \qquad y = r\,(1 - \cos\theta) \tag{5.208}$$

$\boxed{\text{Príklad 54}}$ Gulôčka sa pohybuje bez trenia v žliabku, ktorý má tvar cykloidy (obr. V.33). Ukážte, že čas, za ktorý prejde z krajnej polohy M do rovnovážnej polohy K, nezávisí od polohy bodu M, z ktorého bola spúšťaná.



obr. V.33

Riešenie: Nech počiatočná poloha gulôčky má súradnice $M\,[x_0, y_0]$ a zodpovedá jej parameter θ_0. Zo zákona zachovania energie a rovnice (5.208) vyplýva, že teleso bude mať v bode N rýchlosť:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2g\Delta y} = \sqrt{2g\,[r(1-\cos\theta) - r(1-\cos\theta_0)]} = \\ \frac{ds}{dt} &= \sqrt{2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)} \end{aligned} \tag{5.209}$$

Pre dĺžku oblúka cykloidy možno odvodiť vzťah:

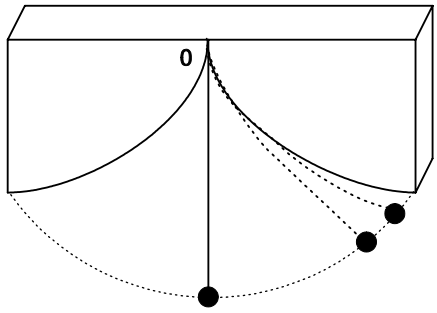
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

Dosadením do (5.209) a následným preintegrovaním vypočítame čas, za ktorý sa gulôčka dostane z bodu M do bodu K:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt &= \int_0^\pi \frac{2r\sin\frac{\theta}{2}d\theta}{\sqrt{2gr(\cos\theta_0-\cos\theta)}} \\ t &= -2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^\pi \frac{d\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\theta_0}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} \end{aligned} \tag{5.210}$$

V tejto kapitole sme ukázali, že perióda matematického kyvadla závisí od amplitúdy. Ak však takéto kyvadlo ohraničíme šablónou v tvare cykloíd (obr.V.34), potom perióda kmitov nebude závisieť od amplitúdy. Ich perióda podľa rovnice (5.210) bude:

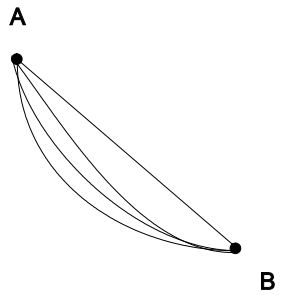
$$T = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$



obr. V.34

Na záver poznamenajme, že cykloida je jedinou krivkou, po ktorej sa môže pohybovať hmotný bod, aby jeho kmity boli izochrónne. ♢

Príklad 55 Vo vertikálnej rovine sú dané dva body A a B (obr.V.35). Nájdite tvar krivky, po ktorej sa musí pohybovať hmotný bod, aby sa pod vplyvom tiažovej sily dostal z bodu A do bodu B za najkratší čas. Takejto krivke sa hovorí brachystochrona (brachistos=najkratší, chronos=čas).

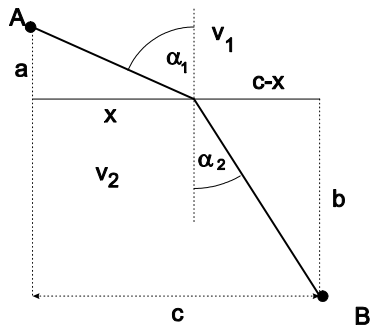


obr. V.35

Riešenie: Úlohu budeme riešiť pomocou analógii z optiky. Ak svetelný lúč prechádza z bodu A do bodu B cez dve optické prostredia, potom na ich rozhraní sa láme podľa Snelovho zákona:

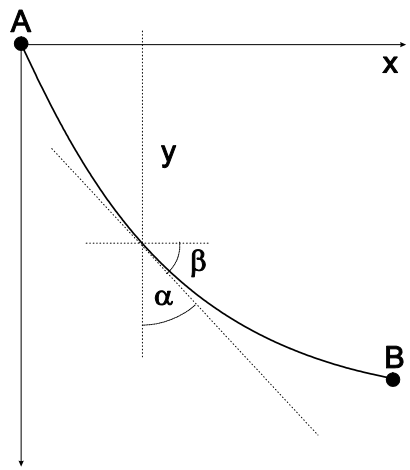
$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \quad resp. \quad \frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2} = konšt \tag{5.211}$$

Vzťah bol mnohokrát experimentálne overený a dá sa odvodiť z Fermatovho princípu[31].



obr. V.36

Vráťme sa však k pôvodnej úlohe. Zvoľme si súradnicový systém podľa obrázka V.37.



obr. V.37

Trajektóriu hmotného bodu prirovnáme k svetelnému lúču, ktorý sa snaží dostať do bodu B za najkratší čas. Musí sa preto správať podľa Snellovho zákona (5.211). Podľa ZZE rýchlosť, ktorú má teleso v ľubovoľnom bode, nezávisí od tvaru trajektórie, po ktorej sa pohybuje, ale iba zmeny potenciálnej energie:

$$v = \sqrt{2gy} \tag{5.212}$$

[31] Fermatov princíp hovorí, že svetelný zväzok sa šíri v prostredí v najkratšom čase. Z obrázku pre tento čas platí: $T = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$. Extrém $\frac{dT}{dx} = 0$ zodpovedá rovnici: $\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$

Z geometrického tvaru krivky ďalej vyplýva:

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \tag{5.213}$$

Dosadením (5.212), (5.213) do (5.211):

$$y\left[1+\left(y'\right)^2\right] = C \tag{5.214}$$

Táto krivka sa nazýva brachystochrona. Ukážeme, že to môže byť iba cykloida. Upravme (5.214):

$$dx = \left(\frac{y}{C-y}\right)^{1/2} dy \tag{5.215}$$

a zaveďme substitúciou:

$$\left(\frac{y}{C-y}\right)^{1/2} = \tan\varphi \tag{5.216}$$

potom:

$$y = C\sin^2\varphi \qquad dy = 2C\sin\varphi\cos\varphi d\varphi \tag{5.217}$$

$$dx = \tan\varphi dy = 2C\sin^2\varphi d\varphi = C\left(1-\cos 2\varphi\right)d\varphi \tag{5.218}$$

Preintegrovaním posledného výrazu a dosadením počiatočných podmienok $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ získame rovnicu cykloidy:

$$x = \frac{C}{2}\left(2\varphi - \sin 2\varphi\right), \quad y = C\sin^2\varphi = \frac{C}{2}\left(1-\cos 2\varphi\right) \tag{5.219}$$

Cykloida je teda nielen izochrónna ale aj brachystochrónna. V tom je jej čaro♢

5.5.3 Model šírenia reklamy

Žijeme v dobe technických výdobytkov, ktoré však treba prostredníctvom reklamného priemyslu dostať do povedomia potenciálnych záujemcov. Pokúsme sa preto vytvoriť matematický model šírenia informácii o produkte, ktorý chceme predať. Predpokladajme, že v čase t je z celkového množstva N potencionálnych záujemcov informovaných o produkte x osôb. V čase $t = 0$ sme prostredníctvom médii uverejnili reklamný šot o našej ponuke, ktorá sa ďalej bude šíriť ústnym podaním medzi záujemcami. S veľkou pravdepodobnosťou sa dá očakávať, že

rýchlosť nárastu informovaných záujemcov bude úmerná súčinu počtu informovaných a počtu ešte neinformovaných zákazníkov:

$$\frac{dx}{dt} = kx\,(N - x) \tag{5.220}$$

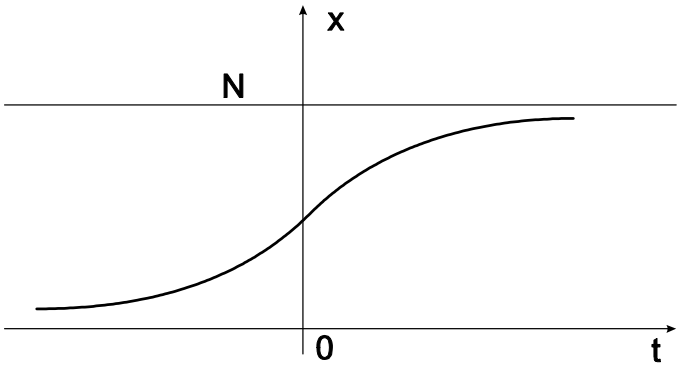
Počiatočne podmienky zvoľme nasledovne $x\,(0) = \frac{N}{k}$, kde k je kladná konštanta. Zintegrovaním (5.220) a postupnými úpravami[32]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} &= kt + C \\ \frac{x}{N-x} &= Ae^{Nkt} \\ x &= N\frac{Ae^{Nkt}}{Ae^{Nkt}+1} = \frac{N}{1+P\exp^{-Nkt}} \end{aligned} \tag{5.221}$$

Po dosadení počiatočných hodnôt:

$$x = \frac{N}{1+(\gamma-1)\exp^{-Nkt}}$$

Na obr.V.38 je znázornený tvar krivky pre $\gamma = 2$



obr. V.38

5.5.4 Model šírenia epidémie

Predpokladajme, že v populácii, ktorá pozostáva z N ľudí, vznikne nákazlivá choroba. Osoby podľa náchylnosti ku chorobe, rozdelíme do troch skupín: na infikovaných I, na zdravých s imunitou R a na zdravých bez imunity S, pričom v ľubovoľnom čase musí byť splnená podmienka:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \tag{5.222}$$

Ak počet infikovaných osôb presiahne hodnotu I^* je vyhlásená epidémia a nakazené osoby sa začnú izolovať od zdravých. Budeme predpokladať, že počas

[32] pri úpravách nahradzujeme konštanty inými konštantami

karantény rýchlosť šírenia nákazy medzi zdravými osobami je úmerný ich počtu. Za normálnych okolností $I < I^*$ počet zdravých osôb ostáva konštantný[33]:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & \text{ak } I(t) > I^* \\ 0 & \text{ak } I(t) \leq I^* \end{cases} \tag{5.223}$$

Podobne pre ostatné skupiny osôb:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & \text{ak } I(t) > I^* \\ -\beta I & \text{ak } I(t) \leq I^* \end{cases} \tag{5.224}$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I \tag{5.225}$$

Aby sme mohli popísať šírenie choroby, musíme poznať počiatočne podmienky. Pre jednoduchosť uvažujme, že ide o nový druh nákazy a preto v čase $t = 0$ sa v populácii nevyskytovala žiadna osoba s vytvorenou imunitou $R(t) = 0$ a počet infikovaných osôb dosiahol hodnotu $I(0)$. Nech zároveň koeficienty uzdravenia a ochorenia sú rovnaké $\alpha = \beta$. Pri riešení musíme uvažovať dva prípady:

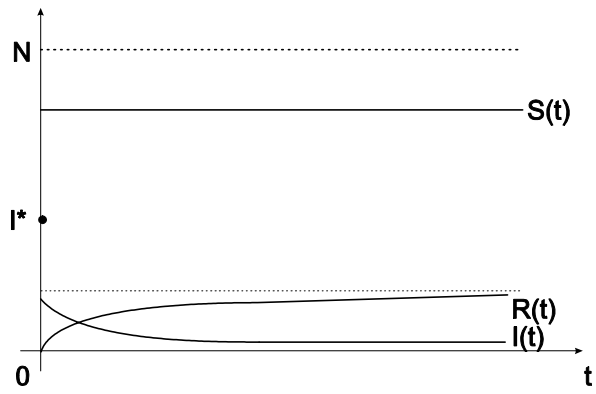
- *NORMÁLNY STAV* $I(t) \leq I^*$: Počet zdravých osôb sa nemení a je rovnaký ako na začiatku.

  $$S(t) = S(0) = N - I(0) \tag{5.226}$$

  Riešením rovníc dostaneme:

  $$\begin{aligned} I(t) &= I(0)e^{-\alpha t} \\ R(t) &= I(0)\left[1 - e^{-\alpha t}\right] \end{aligned}$$

  Na obr.V.39 sú znázornené tieto priebehy.



obr. V.39

[33] To znamená že počet ochorených osôb je rovnaký ako počet uzdravených. V žiadnom prípade to teda neznamená, že nikto sa nenakazí.

- *EPIDÉMIA* $I(t) > I^*$: V tomto prípade treba sledovať počet infikovaných osôb, pretože epidémia trvá dovtedy, pokiaľ počet infikovaných osôb neklesne na hodnotu I^*. Dĺžku trvania epidémie označme písmenom T. Riešením rovnice (**??**) pre počet zdravých osôb vyplýva:

$$S(t) = S(0)e^{-\alpha t} \tag{5.227}$$

Dosadením do (5.224):

$$\frac{dI}{dt} + \alpha I = \alpha S(0)e^{-\alpha t} \tag{5.228}$$

a použitím metódy neurčitých koeficientov (alebo variácie konštánt) s počiatočnou podmienkou $I(t) = I(0)$ počet infikovaných osôb sa mení s časom:

$$I(t) = [I(0) + \alpha S(0)t]\, e^{-\alpha t} \tag{5.229}$$

Pri modelovaní šírenia epidémie je pre zdravotnícku verejnosť dôležité odhadnúť dĺžku trvania epidémie T, ako aj čas jej kumulácie$t_{\max}$. Pokúsme sa preto nájsť uvedené parametre, analýzou dosiahnutých rovníc.

- *Dĺžka trvania epidémie* T je daná dobou, počas ktorej počet infikovaných osôb nedosiahne "bezpečnú" úroveň I^* :

$$I(T) = I^* = [I(0) + \alpha S(0)T]\, e^{-\alpha T} \tag{5.230}$$

Mimo epidémie je počet zdravých osôb konštantný (**??**) a dôsledkom spojitosti funkcie $S(t)$ musí platiť:

$$S(T) = \lim_{t\to\infty} S(t) = S(\infty) = S(0)e^{-\alpha T} \tag{5.231}$$

odkiaľ pre hľadaný čas T :

$$T = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{S(0)}{S(\infty)} \tag{5.232}$$

Ak chceme určiť dobu karantény z rovnice (5.232), potrebujeme poznať počet zdravých osob po zlikvidovaní epidémie $S(\infty)$. Táto informácia v čase epidémie samozrejme nie je známa, a preto ju musíme vypočítať. Dosaďme preto (5.232) do rovnice (5.230), ktorú upravíme:

$$I^* = \left[I(0) + S(0) \ln \frac{S(0)}{S(\infty)}\right] \frac{S(\infty)}{S(0)} \tag{5.233}$$

$$\frac{I^*}{S(\infty)} + \ln S(\infty) = \frac{I(0)}{S(0)} + \ln S(0) \tag{5.234}$$

Všetky členy na pravej strane rovnice (5.230) sú známe a možno z nej vypočítať hľadanú hodnotu $S(\infty)$ potrebnú na odhad doby karantény T (5.232).

- *Čas kumulácie epidémie* $t_{\max}$. Hľadajme čas, kedy epidémia kumuluje. Počet nainfikovaných osôb dosiahne svoje maximum v časem $t_{\max}$, vtedy keď:

$$\frac{dI}{dt} = \left[\alpha S(0) - \alpha I(0) - \alpha^2 S(0) t_{\max}\right] \exp\left(-\alpha t_{\max}\right) = 0 \quad (5.235)$$

$$t_{\max} = \frac{1}{\alpha}\left[1 - \frac{I(0)}{S(0)}\right] \quad (5.236)$$

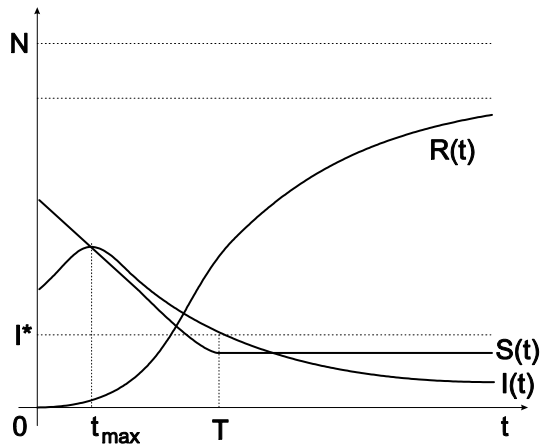
Ak dosadíme tento čas do rovnice (5.229), potom

$$I_{\max} = S(0) \exp\left[-\left(1 - \frac{I(0)}{S(0)}\right)\right] = S(t_{\max}) \quad (5.237)$$

Zistili sme, že v čase kumulácie epidémie je počet infikovných osôb rovnaký ako počet zdravých. Po zastavení epidémie:

$$I(t) = I^* e^{-\alpha(t-T)} \quad (5.238)$$

Na (obr.V.40) je schématicky znázornený časový vývoj jednotlivých skupín osôb : $I(t), R(t), S(t)$.



obr. V.40

5.5.5 Chemické reakcie.

Rýchlosť chemickej reakcie pri konštantnej teplote je úmerná súčinu koncentrácii látok, ktoré do nej vstupujú. Majme dve chemické látky A a B s objemami 10 a 20 litrov, z ktorých chemickou reakciou vzniká produkt C. Aby sa vytvorili 3 objemové jednotky tejto látky, do reakcie musia vstúpiť dve objemové jednotky A a jedna objemová jednotka B. Nájdite množstvo látky C v ľubovoľnm čase, ak viete, že za 20 minút vzniklo 6 litrov chemickej látky C..

Nech v čase t je v nádobe x litrov látky C. Koncentrácia jednotlivých produktov bude:

$$c_A = (10 - \frac{2x}{3}) \qquad c_B = (20 - \frac{x}{3}) \tag{5.239}$$

a podľa hore uvedeného zákona chemických reakcií:

$$\frac{dx}{dt} = Kc_a c_b = K(10 - \frac{2x}{3})\,(20 - \frac{x}{3}) = c\,(15 - x)\,(60 - x) \tag{5.240}$$

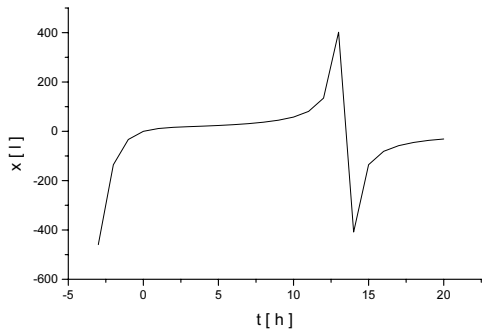
kde k, K sú konštanty. Použitím metódy separácie premených s počiatočnou podmienkou $x(0) = 0$:

$$\frac{60 - x}{15 - x} = 4e^{45kt} \tag{5.241}$$

Neznámu konštantu k určíme zo zadania $x(\frac{20}{60}h) = 6$:

$$x = 15\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}} \tag{5.242}$$

Z praktických dôvodov je nám jasné, že maximálny výťažok reakcie, ktorý reprezentujeme produktom C, musí byť ohraničený, pretože objemy látok $A(10l)$ a $B(20l)$ sú tiež konečné. Formálnou analýzov rovnice (5.242) však prídeme k záveru, že v čase t_{extrem}, pre ktorý platí $\left(\frac{2}{3}\right)^{3t_{extrem}} = 4$, objem $x \to \infty$. Našťastie tento fakt neodporuje našim predstavám, pretože $t_{extrem} < 0$, ale chemická reakcia prebieha v čase $t \geq 0$. Zároveň nemajú zmysel tie riešenia, pre ktoré $x < 0$.



obr. V.41

5.5.6 Model dravec a obeť.

V ďalšej časti sa pokúsme nájsť jednoduchý model na popis počtu dravcov (líšok) a ich obetí (zajacov) v populácii. Počet líšok v prírode narastá dovtedy,

pokiaľ budú mať dostatok potravy-zajacov. V určitom čase však nastane situácia, keď sa líšky premnožia a dôsledkom nedostatku zajacov ich počet začne klesať. Zhoršenie životných podmienok pre líšky, zlepší životné podmienky pre zajace, ktorých počet začne narastať. Nárast počtu zajacov zase vedie k obnove potravy pre líšky, ktorým sa znovu začne dariť. Celý cyklus sa zopakuje. Predpokladajme že počet líšok v populácii je L a zajacov Z, potom:

$$\frac{dZ}{dt} = -Z(L - L_0)\alpha \tag{5.243}$$

$$\frac{dL}{dt} = \beta(Z - Z_0)L \tag{5.244}$$

kde Z_0 a L_0 sú rovnovážne počty líšok a zajacov, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Sústavu rovníc rozreťazíme a zlinearizujeme nasledounou substitúciou:

$$L = L_0 + l \tag{5.245}$$

$$Z = Z_0 + z \tag{5.246}$$

Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že fluktuácie v počte zajacov l a v počte líšok z sú malé, v porovnaní s rovnovážnymi stavmi: $l \ll L_0$, $z \ll Z_0$:

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha Z_0 l \tag{5.247}$$

$$\frac{dl}{dt} = \beta L_0 z \tag{5.248}$$

Zderivovaním (5.247) a využitím (5.248):

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\alpha Z_0 \beta L_0 z \tag{5.249}$$

Počet líšok a zajacov v populácii osciluje s frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\alpha Z_0 \beta L_0} \tag{5.250}$$

5.6 Cvičenia

$\boxed{5.1^*}$ Uvažujme tri rovnaké náboje Q, umiestnené na priamke, vzdialené postupne od seba a. Krajné náboje sú upevnené, prostredný náboj je voľný. Vypočítajte jeho frekvenciu malých kmitov.

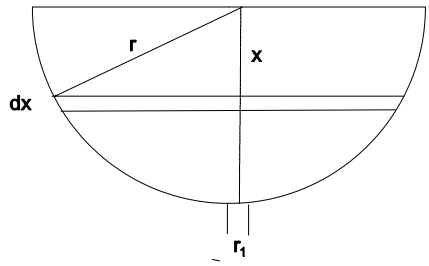
Riešenie: $\omega = \frac{Q}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 a^3 m}}$

$\boxed{5.2^*}$ Polohový vektor bodu A sa s časom mení podľa vzťahu $\vec{r} = \alpha t\,\vec{i} + \beta t^2\,\vec{j}$. Napíšte, po akej krivke sa pohybuje.

Riešenie: $y = \frac{\beta}{\alpha^2}\, x^2$

$\boxed{5.3^*}$ Za aký čas vytečie voda z nádoby tvaru polgule o priemere $d = 2m$ kruhovým prierezom s priemerom $r_1 = 0,2m$ na dne nádoby. Nádoba bola celá naplnená vodou.

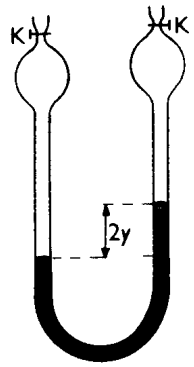
Riešenie: $dt = \frac{(r+x)\sqrt{(r-x)}}{\sqrt{2g}r_1^2}dx$



obr. V.42

$\boxed{5.4^*}$ Rýchlosť tečenia vody v rieke narastá kvadraticky z nuly na krajoch po rýchlosť u v strede rieky. Naprieč rieky sa pohybuje loď, vzhľadom na smer tečenia vody kolmo rýchlosťou v. Nájdite trajektóriu lode.

$\boxed{5.5^*}$ V trubici znázornenej na obrázku V.43 je stĺpec ortuti s hmotnosťou m a dĺžkou l. Určte periódu vlastných kmitov ortuťového stĺpca pri otvorených kohútoch K



obr. V.43

$\boxed{5.6.}$ $tgy\, dx - x \ln x\, dy = 0 \;\; y\,(e) = \frac{\pi}{2}$

Riešenie: $y = \arcsin\left(\ln x\right),\; x \in \langle e^{-1}, e\rangle$

$\boxed{5.7.}$ $\frac{dy}{dx} - y \sin x = \sin x \cdot \cos x$

Riešenie: $y = K \exp\left(-\cos x\right) - \cos x + 1$

$\boxed{5.8^*}$ Určte výchylku od zvislého smeru voľne padajúceho telesa z výšky h nad Zemou vplyvom Coriolisovej sily. Gravitačné pole považujte za homogénne.

Riešenie: $\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega g t \cos\varphi \Longrightarrow x = \frac{1}{3} g\omega t^3 \cos\varphi$

$\boxed{5.9.}$ Nájdite krivku, ktorá s x a y -ovou súradnicou ohraničuje plochu, úmernú dĺžke oblúka.

Riešenie: $\int\limits_0^x y dx = \int\limits_0^x \sqrt{1+y'^2}$, $y = \frac{a}{2}\left[\exp\left(\frac{x+a}{a}\right) + \exp\left(-\frac{x+a}{a}\right)\right]$

$\boxed{5.10.}$ Použitím nekonečného radu nájdite približné riešenie rovnice $y' = \exp x - y^2$

Riešenie: $y = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{5x^4}{4!} + ...$

$\boxed{5.11.^*}$ Nájdite polohu telesa, ak jeho zrýchlenie je nepriamoúmerné času t.

Riešenie: $x = k\left(t\ln t - t\right) + c_1 t + c_2$

$\boxed{5.12.}$ $y''^2 = 4\left(y' - 1\right)$

Riešenie: $y = \frac{(x+A)^3}{3} + x + 8$

$\boxed{5.13.}$ $y - 2y' + 2y = 4\exp x \sin x$

Riešenie: $y = a\exp x\cos x + B\exp x\sin x - Bx\exp x\cos x$

$\boxed{5.14.}$ $y' = \frac{x}{y}$

Riešenie: $y = \pm\sqrt{c + x^2}$

$\boxed{5.15.}$ $y' = y^2 + 1$

Riešenie: $y = \tan\left(x + c\right)$

$\boxed{5.16.}$ $x^3 y' - 2y = 0$

Riešenie: $y = c_1 exp\frac{-1}{x^2}$

$\boxed{5.17.}$ $x^2\left(y^3 + 5\right)dx + \left(x^3 + 5\right)y^2 dy = 0$ $y\left(0\right) = 1$

Riešenie: $\left(x^3 + 5\right)\left(y^3 + 5\right) = 30$

$\boxed{5.18.}$ $y'' + n^2 y = cos\left(mx\right)$

Riešenie: $y = A\cos nx + B\sin nx + \frac{\cos mx}{n^2 - m^2}$

$\boxed{5.19.}$ $y'' + y = \sin x$

Riešenie: $y = A\cos x + B\sin x - \frac{x}{2}\cos x$

$\boxed{5.20.}$ $y'' + 2y' = x$

Riešenie: $y = c_1 + c_2\exp\left(-2x\right) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2$

$\boxed{5.21.}$ $y'' - 2y' + y = \left(x + 1\right)\exp\left(2x\right)$

Riešenie: $y = \left(c_1 x + c_2\right)\exp x + \left(x + 1\right)\exp 2x$

$\boxed{5.22.}$ $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$

Riešenie: $y = \exp\left(-x\right)\left(c_1\cos 2x + c_2\sin x\right) + \frac{1}{5}\left(2\cos x + \sin x\right)$

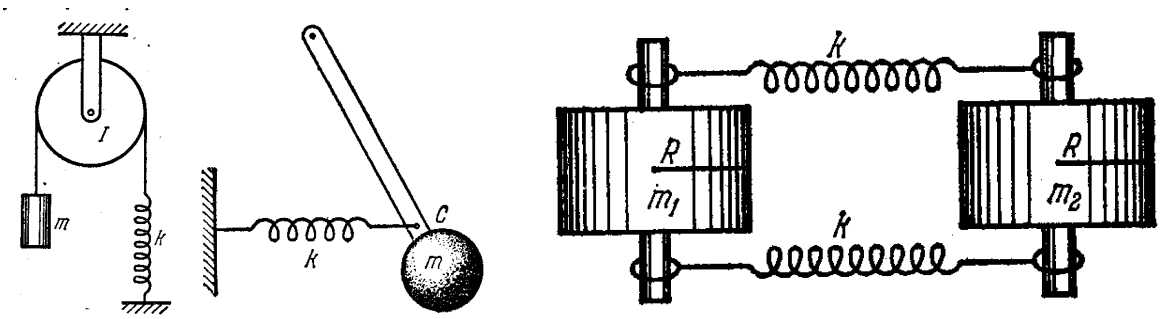
$\boxed{5.23.}$ $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$
Riešenie: $y = c_1 cosx + c_2 \sin x + \frac{1}{2\cos x}$

$\boxed{5.24.}$ $y'' + 4y = x \sin x$
Riešenie: $y = \left(A - \frac{1}{8}x^2\right)\cos 2x + \left(B + \frac{1}{16}x\right)\sin 2x$

$\boxed{5.25.}$ $y'' - y = x \exp(-x)$
Riešenie: $y = c_1 \exp x + \left(c_2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2\right)\exp(-x)$

$\boxed{5.26.^*}$ Nájdite frekvenciu malých kmitov častice v poli $U(x) = V\cos(\alpha x) - Fx$.
Riešenie: $\omega^2 = \frac{V\alpha^2}{m}\sqrt{1 - \left(\frac{F}{V\alpha}\right)^2}$, minimum $U(x)$ existuje pre $F < V\alpha$

$\boxed{5.27.^*}$ Vypočítajte periódu malých kmitov nasledovných sústav



obr. V.44a obr. V.44b obr. V.44c

Riešenie: $2\pi\sqrt{\frac{I/R^2+M}{K}}$, $2\pi\sqrt{\frac{I}{mga+ka^2}}$, $2\pi\sqrt{\frac{3m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}$

$\boxed{5.28.}$ Vypočítajte periódu kmitov pologule s polomerom R.
Riešenie: $U = mgx_T(1-\cos\varphi)$, $T = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5} - \frac{3}{4}\cos\varphi\right)mR^2\dot{\varphi}^2$, teda $\omega = \sqrt{\frac{5}{6}\frac{g}{R}}$.

Kapitola 6

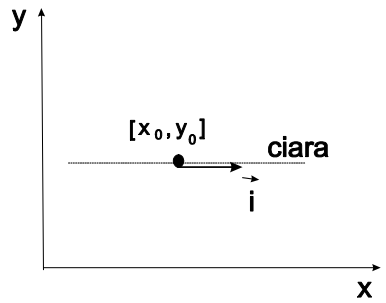
Súradnicové systémy

V mnohých fyzikálnych situáciach nie je vhodné charakterizovať polohu v kartézskych súradniciach. Ide predovšetkým o prípady, ktoré vykazujú osovú alebo stredovú súmernosť. Skôr ako si uvedieme a podrobne popíšeme rôzne typy sústav, zamyslime sa nad spôsobom konštrukcie *bázových vektorov, objemových, dĺžkových elementov* v kartézskej súradnicovej sústave, ktorá je nám dôverne známa. Získané poznatky využijeme pri hľadaní týchto základných charakteristík aj v iných sústavách.

Bázové vektory. Bázové vektory sú vždy viazané ku konkrétnej súradnici. $x - ovej$ súradnici zodpovedá bázový vektor $\vec{e}_x = \vec{i}$, $y - ovej$ $\vec{e}_y = \vec{j}$ a $z - ovej$ $\vec{e}_z = \vec{k}$. Ak chceme napr. v bode (x_0, y_0, z_0) nájsť smer bázového vektora $\vec{e}_x = \vec{i}$, zostrojíme čiaru, ktorá vznikne fixovaním všetkých súradníc okrem $x - ovej$:

$$x \neq konšt, y = y_0, z = z_0$$

a skonštruujeme k nej dotyčnicu (obr. VI.1).



obr. VI.1

Bázový vektor orientujeme v smere nárastu veličiny x. Rovnakým spôsobom nájdeme aj ostatné vektory $\vec{e}_y$,$\vec{e}_z$.

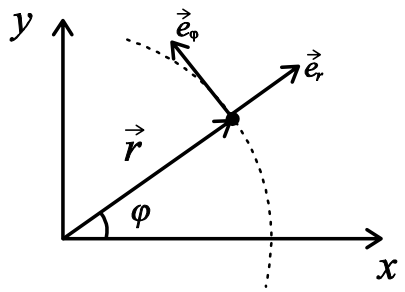
Plošné a objemové elementy. Veľkosť plošného alebo objemového elementu určíme tak, že infinitenzimálne zmeníme všetky súradnice

$$x \to x + dx, \;\; y \to y + dy, \;\; z \to z + dz \tag{6.1}$$

a vypočítame plochu, resp objem vzniknutého obrazca: $dS = dxdy$, $dV = dxdydz$. Podľa rovnakých algoritmov budeme konštruovať bázové vektory, plošné a objemové elementy aj v iných sústavách.

6.1 Polárna súradnicová sústava.

Poloha bodu v tejto sústave je daná veľkosťou polohového vektora r a polárnym uhlom φ. Vektory $\vec{e}_r$ a $\vec{e}_\varphi$ ležia v rovine určenej osami x a y.



obr. VI.2

Z obr. VI.2 ľahko odvodíme vzťah medzi kartézkymi a polárnymi súradnicami:

$$x = r\cos\varphi \tag{6.2}$$
$$y = r\sin\varphi \tag{6.3}$$

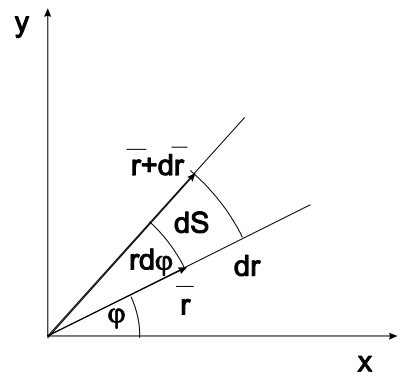
Bázové vektory. Bázový vektor $\vec{e}_r$ ($\vec{e}_\varphi$) zostrojíme pomocou dotyčnice k čiare $r \neq konšt, \varphi = konšt$ resp.$r = konšt, \varphi \neq konšt.$:

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \tag{6.4}$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \tag{6.5}$$

Zderivovaním báz podľa času:

$$\dot{\vec{e}}_r = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{i} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{j} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \tag{6.6}$$
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{i} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{j} = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r \tag{6.7}$$

Všimnime si, že vektory $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ tvoria *ortonormovanú* bázu - sú jednotkové (normované), a sú navzájom kolmé (ortogonálne).



obr. VI.3

Veľkosť plošného elementu nájdeme infinitenzimálnym zväčšením parametrov $d\varphi$ a dr (obr. VI.3):

$$dS = r d\varphi dr$$

Zderivovaním polohového vektora $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$ a využitím rovníc (6.6),(6.7) odvodíme rýchlosť a zrýchlenie v nových bázach:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{e}_r + r\,\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{e}_r + r\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi \tag{6.8}$$

Z čoho pre jednotlivé súradnice vyplýva:

$$v_r = \frac{dr}{dt} \tag{6.9}$$

$$v_\varphi = \omega r = \frac{d\varphi}{dt}\,r \tag{6.10}$$

Analogicky ako pri rýchlosti

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\,\vec{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi\right) = \\
&= \frac{d^2r}{dt^2}\,\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\,\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi + r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\vec{e}_\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\,\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \\
&= \frac{d^2r}{dt^2}\,\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi + r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\vec{e}_\varphi - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\vec{e}_r = \\
&= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\,\vec{e}_r + \left[2\,\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\,\vec{e}_\varphi
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Z čoho pre jednotlivé súradnice vektora $\vec{a}$ v novej báze:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \tag{6.12}$$

$$a_\varphi = 2\,\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{6.13}$$

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ Dokážte, že pri centrálnych pohyboch polohový vektor $\vec{r}$ opíše za jednotku času rovnakú plochu.

Riešenie: Pri centrálnych pohyboch sila pôsobiaca na teleso je rovnobežná s polohovým vektorom a preto tangenciálna zložka výsledného zrýchlenia je nulová $\vec{a}_\varphi = \vec{0}$. Podľa rovnice (6.13) :

$$2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt} = 0 \tag{6.14}$$

$$2\frac{dr}{r} = -\frac{d\omega}{\omega} \tag{6.15}$$

$$r^2\omega = konšt \tag{6.16}$$

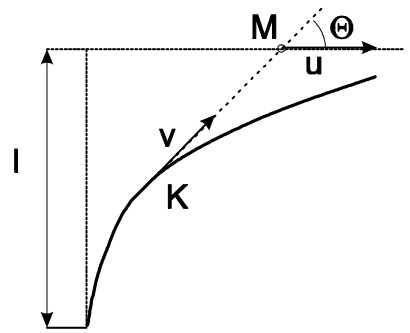
Veľkosť plochy, ktorú opíše vektor $\vec{r}$ za jednotku času vypočítame pomocou vektorového súčinu a rovnice (6.10):

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{|\vec{r}\times d\vec{r}|}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times(\vec{v}_\varphi + \vec{v}_r)\right| = \\ &= \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}_\varphi\right| = \frac{1}{2}r^2\omega\end{aligned}$$

Využitím (6.16) zistíme, že plošna rýchlosť je konštantná. ♢

$\boxed{\text{Príklad 2}}$ Myš beží po priamke rýchlosťou u. Naháňa ju mačka rýchlosťou v. Za akú dobu ju dohoní, ak ich počiatočná vzdialenosť je l a na začiatku $\vec{v} \perp \vec{u}$. Do akej vzájomnej vzdialenosti sa priblížia, ak $u = v$?

Riešenie: Pohyb budeme vyšetrujme v polárnej súradnicovej sústave, ktorej počiatok stotožníme s polohou mačky podľa obr. VI.4



obr. VI.4

Myš sa vzhľadom na mačku pohybuje relatívnou rýchlosťou $\vec{w} = -\vec{v} + \vec{u}$, ktorú rozložime podľa (6.9), (6.10) na dve zložky:

$$w_r = \frac{dr}{dt} = (-\vec{v} + \vec{u})\cdot\vec{e}_r = -v + u\cos\theta \tag{6.17}$$

$$w_\varphi = \frac{d\theta}{dt}r = (-\vec{v} + \vec{u})\cdot\vec{e}_\varphi = -u\sin\theta \tag{6.18}$$

Prvú rovnicu vynásobime $[v + u\cos\theta]$, pripočítame k nej druhú rovnicu umocnenú na druhú, v ktorej však výraz $u^2\sin^2\theta$ nahradíme $u\sin\theta\left(-\dot{\theta}\,r\right)$:

$$\dot{r}\,(u\cos\theta + v) - r\dot{\theta}\,u\sin\theta = u^2 - v^2 \tag{6.19}$$

$$\frac{d}{dt}\left[r\,(u\cos\theta + v)\right] = u^2 - v^2 \tag{6.20}$$

Preintegrujme obe časti rovnice cez čas v hraniciach 0 a t a dosaďme počiatočné podmienky $r\,(0) = l$, $\theta\,(0) = \pi/2$:

$$r\,(u\cos\theta + v) - vl = \left(u^2 - v^2\right)t \tag{6.21}$$

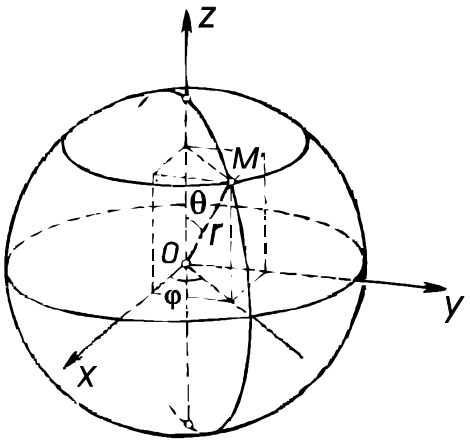
Mačka dobehne myš vtedy, keď $r = 0 \Longrightarrow t = -vl/\left(u^2 - v^2\right)$. V prípade, ak $v = u$ z rovnice (6.20) $r\,(u\cos\theta + v) = konšt = lv$ [1]mačka sa priblíži k myši na minimálnu vzdialenosť

$$r_{\min} = \frac{lv}{u+v} = \frac{l}{2}$$

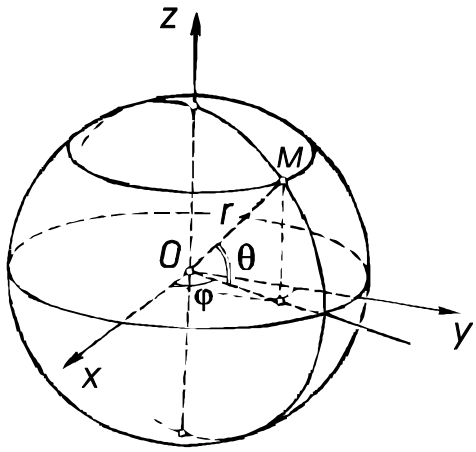
$\diamondsuit$

6.2 Sférická súradnicová sústava

V sférickom súradnicovom systéme je poloha bodu zadaná polárnym uhlom φ, azimutálnym uhlom ϑ a veľkosťou polohového vektora $\vec{r}$. Vyskytujú sa dve možnosti ich definície - uhol ϑ sa určuje buď od zvislice alebo od rovníka (napr. pri zemepisnej šírke).



obr. VI.5a



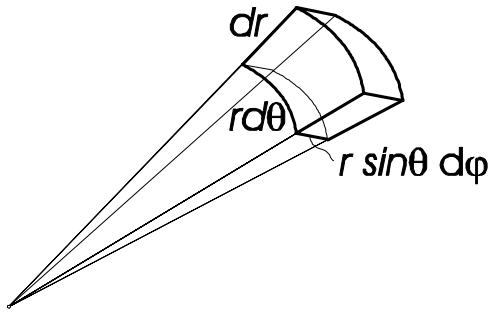
obr. VI.5b

[1]Veľkosť konštanty sme určili z počiatočných podmienok dosadením $\theta = \frac{\pi}{2}$

Je užitočné zvyknúť si na obe definície, i keď vo väčšine prípadov sa stretneme s prvou alternatívou, pre ktorú uvedieme aj príslušné vzťahy:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{6.22}$$

Infinitenzimálnou zmenou súradníc vytvoríme objemový element, ktorého veľkosť ľahko vypočítame (obr. VI.6).



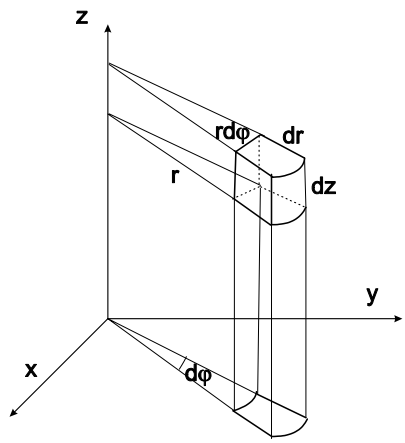
obr. VI.6

$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$. Pomocou geometrickej predstavy je možné určiť zložky rýchlosti. Predpokladajme, že za čas Δt sa teleso presunulo v priestore tak, že $\varphi \to \varphi + \Delta\varphi$, $\theta \to \theta + \Delta\theta$, $r \to r + \Delta r$. Z obrázku VI.6 vyplýva:

$$\begin{aligned} v_r &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \dot{r} \\ v_\varphi &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s_\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{r\sin\theta\Delta\varphi}{\Delta t} = r\sin\theta\,\dot{\varphi} \\ v\theta &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r\,\dot{\theta} \\ v &= \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\left(\dot{r}\right)^2 + \left(r\sin\theta\,\dot{\varphi}\right)^2 + \left(r\,\dot{\theta}\right)^2} \end{aligned}$$

6.3 Cylindrická súradnicová sústava

Cylindrická sústava vznikne doplnením polárnej sústavy r, φ o kartézsku súradnicu z (obr. VI.7)



obr. VI.7

Vzťah medzi cylindrickými a kartézskymi súradnicami je:

$$x = r\cos\varphi \tag{6.23}$$
$$y = r\sin\varphi \tag{6.24}$$
$$z = z \tag{6.25}$$

Podobným postupom ako pri analyzovaní sférickej sústavy by sme sa dopracovali k nasledovným užitočným vzťahom (obr. VI.7):

$$\begin{aligned}
v_r &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \dot{r}\\
v_\varphi &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s_\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\,\dot{\varphi}\\
v_z &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s_z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \dot{z}\\
v &= \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\vartheta^2} = \sqrt{\left(\dot{r}\right)^2 + \left(r\,\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\dot{z}\right)^2}\\
dV &= r d\varphi dr dz
\end{aligned}$$

6.4 Cvičenia

$\boxed{6.1^*}$ Teleso sa pohybuje v kartézskych súradniciach po trajektórii

$$x = 2a\cos^2\frac{kt}{2} \qquad y = a\sin kt$$

Prepíšte túto závislosť ako funkciu polárnych súradníc od času.

Riešenie: $r = \sqrt{x^2+y^2} = a\sqrt{2\left(1+\cos kt\right)}$, $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{y}{x} = \frac{\sin kt}{1+\cos kt}$

$\boxed{6.2.}$ Napíšte kinetickú energiu $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$ v polárnych, sférických a cylindrických súradniciach.

Riešenie: $\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2\right)$, $\frac{1}{2}m\left(\dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2 r^2 + \dot{r}^2\right)$

$\boxed{6.3^*}$ Teleso sa pohybuje v kartézskych súradniciach po trejektórii

$$x = R\cos^2\frac{kt}{2} \qquad y = \frac{R}{2}\sin kt \qquad z = R\sin\frac{kt}{2}$$

Prepíšte túto závislosť ako funkciu sférických súradníc od času.

Riešenie: $r = R$, $\varphi = \frac{kt}{2}$, $\vartheta = \frac{kt}{2}$

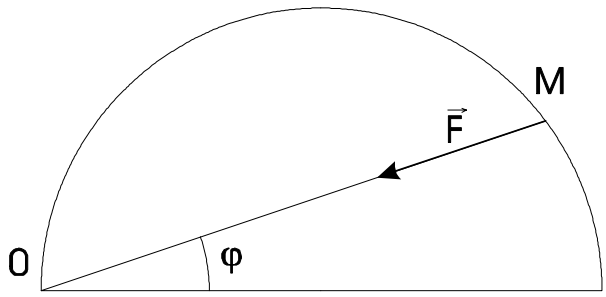
$\boxed{6.4^*}$ Teleso sa pohybuje v rovine. Jeho tangenciálne a normálové zrýchlenie sú konštanty a a b. Nájdite rovnicu trajektórie v polárnych súradniciach.

Riešenie: $r = r_0 e^{\frac{2a}{b}(\varphi-\varphi_0)}$

$\boxed{6.5^*}$ Mucha sa približuje k lampe zo vzdialenosti r_0 tak, že jej rýchlosť zviera so spojnicou k lampe konštantný uhol α. Nájdite trajektóriu pohybu.

Riešenie: $r(\varphi) = r_0 \exp(\frac{-\varphi}{\operatorname{tg}\alpha})$

$\boxed{6.6^*}$ Teleso M hmotnosti m je priťahované (neznámou) centrálnou silou $\vec{F}(r)$ do bodu O, vďaka čomu sa pohybuje po kružnici (viď obr. VI.8.) s konštantnou plošnou rýchlosťou σ. Nájdite závisloť $\vec{F}(r)$.



obr. VI.8

Riešenie: $F = \frac{32ma^2\sigma^2}{r^5}$

$\boxed{6.7^*}$ Teleso sa pohybuje po lemniskáte $r^2 = a\cos 2\varphi$ s počiatočnými podmienkami $r(0) = r_0$, $v(0) = v_0$, $\measuredangle(\vec{r}_0, \vec{v}_0) = \alpha$. Vypočítajte silu pôsobiacu na teleso.

Riešenie: $F = \frac{3ma^2}{r^7}\, r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha$

$\boxed{6.8^*}$ Teleso hmotnosti m sa pohybuje pod vplyvom centrálnej sily tak, že jeho rýchlosť sa mení podľa vzťahu $v = \frac{\alpha}{r}$, kde α je konštanta. Určte trajektóriu pohybu a silové pole $F(r)$.

Riešenie: trajektóriou je logaritmická špirála, $F = \frac{m\alpha^2}{r^2}$.

$\boxed{6.9^*}$ Teleso s pohybuje v smere osi z rýchlosťou v po špirále, ktorej polomer r a uhol φ v rovine xy sa s časom mení nasledovne: $r = a\exp(-\alpha t)$, $\varphi = \omega t$. Určte zložky a veľkosi vektorov $\vec{v}$, $\vec{a}$

Kapitola 7

Krivkové a viacrozmerné integrály

Motivačné príklady Vo fyzike a najmä v mechanike sa často stretávame s úlohami, ktoré vedú ku krivkovým alebo viacrozmerným integrálom. Uveďme aspoň pár príkladov.

- Predpokladajme, že máme vypočítať hmotnosť nehomogénneho telesa s hustotou $\rho(x, y, z)$. Teleso si rozdelíme na infinitenzimálne elementy s objemom dV a hmotnosťou $dm = \rho(x, y, z)\, dV = \rho(x, y, z)\ dx\, dy\, dz$ a vzájomne ich sčítame: $M = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\ dx\, dy\, dz$

- častokrát sa pri popise pohybu telesa snažíme nájsť bod s takou vlastnosťou, že keby v ňom pôsobila tiažová sila $m\overrightarrow{g}$, potom by jej moment vzhľadom na začiatok súradnicového systému bol rovnaký. Tento bod sa nazýva ťažisko:

$$\overrightarrow{r}_T \times (\overrightarrow{g} m) = \int\limits_m \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{g} dm \Longrightarrow \overrightarrow{r}_T = \frac{1}{m} \int\limits_m \overrightarrow{r} dm$$

  Ak napríklad poznáme dĺžkovú hustotu telesa ρ_l potom hmotnostný element $dm = \rho_l\ dl$ a integrál sa počíta cez krivku určenú telesom. Ak poznáme plošnú ρ_s alebo objemovú hustotu ρ_V po dosadení hmotnostných elementov $dm = \rho_s\ dS = \rho_S\ dx\, dy$, $dm = \rho_V\ dV = \rho_V\ dx\, dydz$ dostaneme tzv. plošné a objemové integrály

- Nakoniec si ešte pripomeňme vzťahy pre výpočet zložiek tenzora zotrvačnosti z kapitoly matice, ktoré podľa spôsobu zadania hmotnosti telesa vedú

k viacrozmerným integrálom.

$$I_{11} = \int \left(y^2 + z^2\right) dm \qquad I_{12} = I_{21} = -\int xy\, dm \tag{7.1}$$

$$I_{22} = \int \left(x^2 + z^2\right) dm \qquad I_{23} = I_{32} = -\int yz\, dm \tag{7.2}$$

$$I_{33} = \int \left(x^2 + y^2\right) dm \qquad I_{31} = I_{13} = -\int xz\, dm \tag{7.3}$$

7.1 Krivkové integrály

Vo fyzike najmä pri výpočte ťažísk a práce sa stretneme s dvomi typmi krivkových integrálov:

- $\int_\Gamma f(x, y, z)\, ds$ kde ds reprezentuje dĺžkový element krivky Γ
- $\int_\Gamma \vec{F}\, d\vec{l}$

Integrál počítame klasickým spôsobom: Krivku Γ rozsekáme na elementárne úseky ds resp. $d\vec{l}$ a na každom z nich budeme považovať podintegrálnu funkciu za konštantnú. Na úsekoch určíme jednotlivé súčiny $f(x, y, z)\, ds$, resp. $\vec{F}\, d\vec{l}$, ktoré navzájom posčítavame. Určité integrály $\int f(x)\, dx$ (kapitola II). boli tiež krivkovými integrálmi ale po špeciálnej krivke $y = 0$. Vo všeobecnosti sú však krivky Γ podstatne zložitejšie

Majme napríklad jednoduchú krivku zadanú parametricky:

$$x = \varphi(t) \quad y = \chi(t) \quad z = \psi(t)$$

Po jej zdiferencovaní

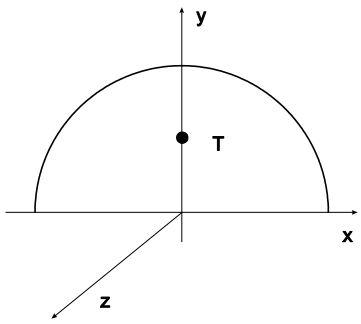
$$dx = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} dt \quad dy = \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} dt \quad dz = \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} dt \tag{7.4}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \tag{7.5}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi(t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(t)}{\partial t}\right)^2} |dt| \tag{7.6}$$

Dosadením (7.4), (7.5) do pôvodných integrálov dostaneme integrál jednej premenej t, ktorý už riešiť vieme. Parametrizácia krivky vytvára z krivkových integrálov "obyčajné integrály" a preto je kľúčom k ich riešeniu. Uveďme aspoň niekoľko príkladov:

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ Vypočítajte súradnice ťažiska hmotnej polkružnice, s polomerom R a dĺžkovou hustotou $\rho = konšt$ (obr. VII.1).



obr. VII.1

Riešenie: Zo symetrie úlohy je zrejmé, $x_t = 0$, y-ovú zložku ťažiska vypočítame podľa vzťahu:

$$y_t = \frac{\int_\Gamma y\rho\, dl}{M}$$

v ktorom integračna krivka bude polkružnica. Ak za parameter zvolíme uhol φ, potom:

$$x = R\cos\varphi \qquad dx = -R\sin\varphi\, d\varphi \tag{7.7}$$

$$y = R\sin\varphi \qquad dy = R\cos\varphi\, d\varphi \tag{7.8}$$

kde $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$:

$$y_t = \frac{\int_\Gamma y\rho\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{M} = \frac{\int\limits_0^\pi \rho R\sin\varphi R\, d\varphi}{\rho\pi R} = \frac{2R}{\pi} \tag{7.9}$$

Krivku sme mohli parametrizovať aj iným spôsobom, napríklad podľa premennej x: Keďže $x^2 + y^2 = R^2$ potom:

$$x = t \qquad dx = dt \tag{7.10}$$

$$y = \sqrt{R^2 - t^2} \qquad dy = -\frac{tdt}{\sqrt{R^2 - t^2}} \tag{7.11}$$

$$y_t = \frac{\int_\Gamma y\rho\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{M} = \frac{R\int\limits_{-R}^{R} \rho dt}{\rho\pi R} = \frac{2R}{\pi} \tag{7.12}$$

Poloha ťažiska, a teda hodnota krivkového integrálu, nemôže závisieť od spôsobu parametrizácie krivky. *Rôzne parametrizácie tej istej krivky vedú k rovnakým výsledkom.* ♢

$\boxed{\text{Príklad 2}}$ Vypočítajte prácu, ktorú vykonala sila $F\left[xy, -2, y^2 - x^2\right]$, keď premiestnila teleso z bodu $A\left[0, 0, 5\right]$ do bodu $B\left[1, 1, 5\right]$ po parabole a po priamke.

Riešenie: Za parameter paraboly $y = x^2$ zvoľme premennú x. Potom

$$x = t \qquad dx = dt \tag{7.13}$$
$$y = t^2 \qquad dy = 2t\,dt \tag{7.14}$$
$$z = 5 \qquad dz = 0 \tag{7.15}$$

Práca po krivke je daná vťahom:

$$A = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \int_\Gamma \left(t^3, -2, t^4 - t^2\right) \cdot (dt, 2tdt, 0) = \int_0^1 \left(t^3 - 4t\right)\, dt = -\frac{7}{4} \tag{7.16}$$

Parametrizujme druhú trajektóriu-priamku opäť podľa premennej x:

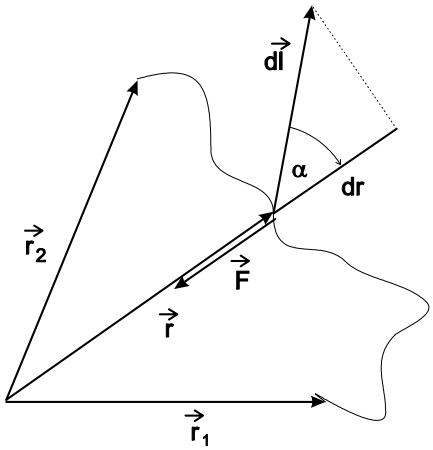
$$x = t \qquad dx = dt \tag{7.17}$$
$$y = t \qquad dy = dt \tag{7.18}$$
$$z = 5 \qquad dz = 0 \tag{7.19}$$

a zodpovedajúca práca

$$A = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\vec{l} = \int_\Gamma \left(t^2, -2, t^2 - t^2\right) \cdot (dt, dt, 0) = \int_0^1 \left(t^2 - 2\right)\, dt = -\frac{5}{3} \tag{7.20}$$

Práce vykonané po rôznych dráhach, ktoré sa začínajú a končia v tom istom bode, nemusia byť rovnaké. ♢

$\boxed{\text{Príklad 3}}$ Vypočítajte prácu, ktorá sa vykoná v gravitačnom poli Zeme pri priemiestnení telesa s hmotnosťou m z bodu $\overrightarrow{r_1}$ do $\overrightarrow{r_2}$ po rôznych krivkách



obr. VII.2

Riešenie: Skôr ako si zvolíme tvar krivky, upravme vzťah pre výpočet práce:

$$A = \int_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \int_{\Gamma} -\kappa \frac{Mm}{r^2} \frac{\overrightarrow{r}}{r} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} -\kappa \frac{Mm}{r^2} \cos\alpha \, dl \tag{7.21}$$

kde M je hmotnosť Zeme, $\kappa-$gravitačná konštanta. Z obr. VII.2. vyplýva, že zmena dĺžky polohového vektora $dr = dl \cos\alpha$:

$$A = \int_{\Gamma} -\kappa \frac{Mm}{r^2}.dr \tag{7.22}$$

Práca je funkciou jedinej premenej r a nezávisí od voľby krivky, ktorá spája body s polohovým vektorom $\overrightarrow{r_1}$ a $\overrightarrow{r_2}$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} -\kappa \frac{Mm}{r^2}.dr = -\kappa Mm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \tag{7.23}$$

$\diamondsuit$

Silové polia, kde práca nezávisí od trajektórie, budeme nazývať *konzervatívnymi.* Aby sme v takýchto poliach nemuseli vždy počítať prácu, každému bodu $\overrightarrow{r}$ v priestore priradíme špeciálnu funkciu $U(x)$ tak, že pre ľubovoľnú dvojicu bodov bude platiť:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l} = U(\overrightarrow{r}_1) - U(\overrightarrow{r}_2) \tag{7.24}$$

Funkciu $U(\overrightarrow{r})$ nazveme *potenciálna energia.* Pokúsme sa na základe vlastnosti (7.24) nájsť matematickú formulu pre výpočet tejto funkcie. Pri výpočte práce A zvoľme krivky spájajúce body $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_1$ tak, aby prechádzali cez bod P_{ref}. : Veľkosť práce A tým nezmeníme, pretože všetky trajektórie sú rovnocenné:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_{ref}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} + \int_{\overrightarrow{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r}_2} \overrightarrow{F} \cdot d\vec{l} = \\ &= \left[-\int_{\overrightarrow{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r}_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} \right] - \left[-\int_{\overrightarrow{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r}_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} \right] \end{aligned} \tag{7.25}$$

Porovnaním so vzťahom (7.24) pre potenciálnu energiu dostaneme:

$$U(\overrightarrow{r}) = -\int_{\overrightarrow{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} \tag{7.26}$$

Potenciálna energia U nie je jednoznačne zadaná a závisí od polohy refernečného bodu P_{ref}. Samotná potenciálna energia nemá žiadny fyzikálny význam, iba ich rozdiel, ktorý zodpovedá práci A.

$\boxed{\text{Príklad 4}}$ Nájdite potenciálnu energiu vektorového poľa $\overrightarrow{F} = (2y, 2x + 3z, 3y)$

Riešenie: Najjednoduchšia krivka, ktorá spája dva body $\overrightarrow{r}_{ref}(x_{ref}, y_{ref}, z_{ref})$ a $\overrightarrow{r}(x, y, z)$ je priamka:

$$\begin{aligned} x' &= x_{ref} + t(x - x_{ref}) & dx' &= xdt \\ y' &= y_{ref} + t(y - y_{ref}) & dy' &= ydt \\ z' &= z_{ref} + t(z - z_{ref}) & dz' &= zdt \end{aligned}$$

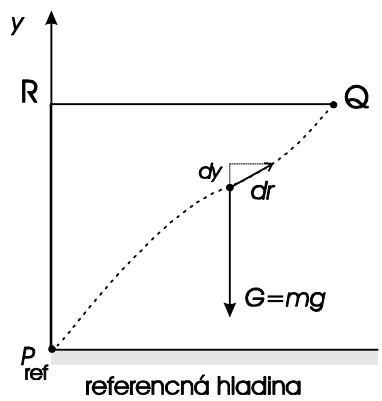
Pre jednoduchosť zvoľme referenčný bod $P_{ref}(0, 0, 0)$. Dosadením do (7.26):

$$\begin{aligned} U(\overrightarrow{r}) &= -\int_{\overrightarrow{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = -\int_0^1 [(2yx) + (2x + 3z)y + 3yz]\, dt = \\ &= -2xy - 3yz \end{aligned}$$

V kapitole VIII. sa vrátime ešte raz k tomuto príkladu a ukážeme si výpočet iným spôsobom. ♢

$\boxed{\text{Príklad 5}}$ Vypočítajte potenciálnu energiu U v homogénnom gravitačnom poli.

Riešenie: Pre jednoduchosť umiestnime referenčný bod do počiatku súradnicovej sústavy $P_{ref}[0, 0, 0]$. Tentokrát však zvoľme komplikovanejšiu krivku: po priamke z bodu $P_{ref}[0, 0, 0]$ do bodu $R[0, y, 0]$ a potom z bodu $R[0, y, 0]$ do $Q[x, y, z]$.



obr. VII.3

Tiažová sila je všade konštantná a podľa obr. VII.3. $\overrightarrow{G}(0, -mg, 0)$. Obe krivky parametrizujme:

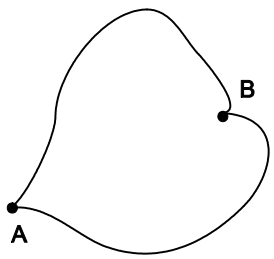
$$\begin{aligned} I &: \quad x' = 0 \quad y' = yt \quad z' = 0, \qquad d\overrightarrow{r} = (0, ydt, 0) \quad t \in < 0, 1 > \\ II &: \quad x' = xt \quad y' = y \quad z' = 0, \qquad d\overrightarrow{r} = (xdt, 0, 0) \quad t \in < 0, 1 > \end{aligned}$$

Potenciálna energia v bode (x, y, z) :

$$\begin{aligned} U(\overrightarrow{r}) &= -\int_{\overrightarrow{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = -\int_{P_{ref}}^{R} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} - \int_{R}^{Q} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \\ &= -\int_{0}^{1} (-mg)\, y\, dt - 0 = mgy \end{aligned}$$

Hodnota y reprezentuje výšku telesa nad referenčnou hladinou. ♢

Zistili sme, že konzervatívne polia majú špecialne vlastnosti, pretože vykonaná práca sa dá v nich počítať z rozdielu potenciálnej energie.



obr. VII.4

Mali by sme preto nájsť jednoduché kritérium na rozlíšenie konzervatívnych polí od nekonzervatívnych. Keďže v konzervatívnych poliach práca nezávisí od trajektórie, potom :

$$\begin{aligned} \int_{A\to B} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} &= -\int_{B\to A} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} \\ \int_{A\to B} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} + \int_{B\to A} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} &= \oint \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} = 0 \end{aligned}$$

Podmienkou konzervatívnosti je nulovosť práce po ľubovoľnej uzavretej krivke: [1]

7.2 Viacrozmerné integrály

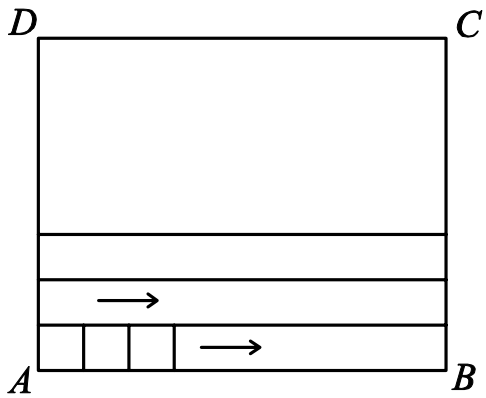
Pod viacrozmernými integrálmi budeme rozumieť integrály funkcií niekoľkých premenných.

$$I = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x, y)\, dx\, dy \tag{7.27}$$

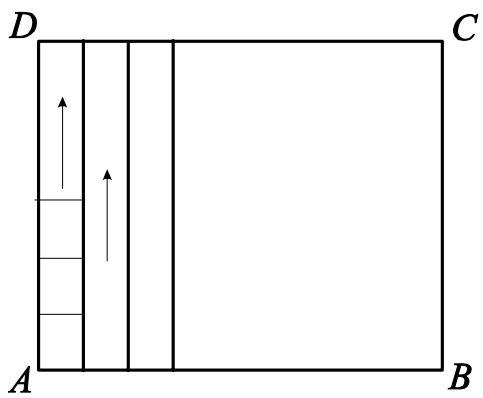
[1] Krúžok v integrále $\oint$ vyjadruje krivkový integrál po uzavretej krivke

Oblasť Ω, nad ktorou integrujeme, nazývame integračným oborom a býva zadaná buď vo forme intervalu alebo množiny. Spôsob výpočtu je podobný s výpočtom integrálov funkcie jednej premennej. Oblasť Ω sa rozdelí na infinitenzimálne plochy s obsahom $dxdy$, ktoré sa prenásobia hodnotou funkcie $f(x,y)$ a vzájomne sa sčítajú. Predpokladajme, že integračná oblasť má tvar obdĺžnika Ω : $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Po jej rozdelení môžeme sčítavať jednotlivé príspevky $f(x,y)\,dx\,dy$ dvomi spôsobmi. Najskôr prejdeme cez štvorčeky "vodorovne" a potom postúpime na vyšší pás (obr.VII.5a):

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] \tag{7.28}$$



obr. VII.5a



obr. VII.5b

Na výsledku sa nič nezmení, keď si zvolíme opačnú stratégiu: najskôr sčítame príspevky od zvislých elementov a postupne budeme prechádzať do ďalších radov (obr.VII.5b):.

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right]$$

Musíme však dbať na to, aby sme na žiadnu oblasť $dx\,dy$ nezabudli.

$\boxed{\text{Príklad 6}}$ Vypočítajte hmotnosť obdĺžnika s vrcholmi $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$, $D(0,2)$ s plošnou hustotou $\sigma(x,y) = xy$

Riešenie: Rozdeľme obdĺžnik na infinitenzimálne elementy s plochou $dx\,dx$ a hmotnosťou $dm = \sigma(x,y)\,dx\,dy$. Celkovú hmotnosť telesa dostaneme ich sčítaním.$m = \int_0^1 \int_0^2 \sigma(x,y)\,dx\,dy$.

Stratégia 1: (sčítavame najskôr"vodorovné"elementy)

$$m = \int_0^1 \int_0^2 \sigma(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dy \left[\int_0^1 xy\,dx \right] = \int_0^2 dy \left[\frac{1}{2}y \right] = 1$$

Stratégia 2: (sčítavame najskôr"zvislé"elementy).

$$m = \int_0^1 \int_0^2 \sigma(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \left[\int_0^2 xy\, dy \right] = \int_0^1 dx\, [2x] = 1$$

♢

Nie vždy oba spôsoby vedú k integrálom, ktoré vieme analyticky riešiť. V takom prípade použijeme tú stratégiu, ktorá vedie k cieľu.

Príklad 7 Vypočítajte hmotnosť obdĺžnika $0 \leqslant x \leqslant 1$, $2 \leqslant y \leqslant 3$ s plošnou hustotou $\sigma(x,y) = x^y$.

Riešenie: **Stratégia 1:**

$$m = \int_0^1 \int_2^3 x^y dx dy = \int_0^1 dx \int_2^3 x^y\, dy = \int_0^1 dx \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_2^3 = \int_0^1 dx \left(\frac{x^3 - x^2}{\ln x} \right)$$

Určitý integrál nedokážeme vyriešiť, skúsme zmeniť poradie integrovania.

Stratégia 2:

$$\begin{aligned} m &= \int_2^3 \int_0^1 x^y dx dy = \int_2^3 dy \int_0^1 dx x^y = \int_2^3 dy \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 = \\ &= \int_2^3 dy \left(\frac{1}{y+1} \right) = [\ln|y+1|]_{y=2}^{y=3} = \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vidíme, že prvý spôsob sčítavania elementov neviedol k cieľu, druhý však bol úspešný. ♢

Ak je podintegrálna funkcia $f(x,y)$ súčinom dvoch funkcií $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$, pôvodný integrál sa počíta ako súčin dvoch integrálov:

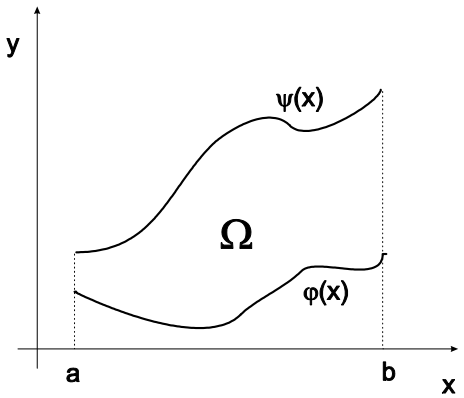
$$\int_a^b \int_c^d f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy = \left[\int_a^b dx f_1(x) \right] \left[\int_c^d dy f_2(y) \right] \tag{7.29}$$

Príklad č.6 sme mohli riešit priamo podľa tohto vzťahu:

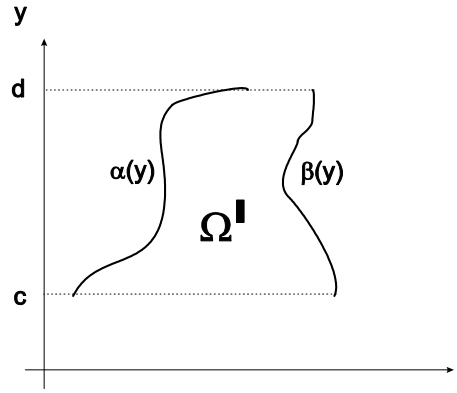
$$m = \int_0^1 \int_0^2 \sigma(x,y)\, dx\, dy = \left[\int_0^2 y dy \right] \cdot \left[\int_0^1 x dx \right] = 1$$

Výpočet integrálov na množine V praxi sa často stretneme so situáciou, keď sú hranice jednej premennej závislé od inej: Predpokladajme, že integračná oblasť Ω (Ω') je množinou bodov, ktoré spĺňajú nasledovnú nerovnosť:

$$\begin{aligned} \Omega &: \; a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \\ \Omega' &: \; \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y), c \leqslant y \leqslant d \end{aligned}$$



obr. VII.6a



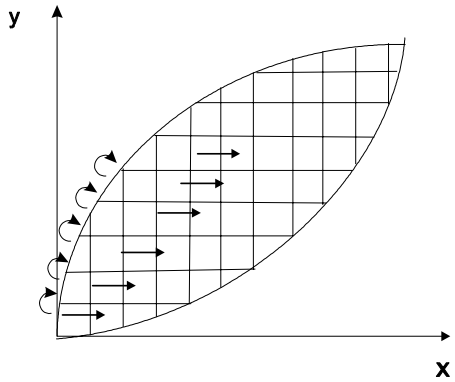
obr. VII.6b

Najskôr integrujeme cez premennú y resp. x a až potom cez číselnú hranicu:

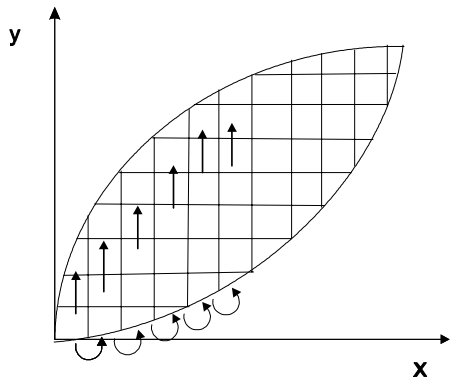
$$\iint_{\Omega} f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x,y) \right] \tag{7.30}$$

$$\iint_{\Omega'} f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} dx f(x,y) \right] \tag{7.31}$$

$\boxed{\text{Príklad 8}}$ Vypočítajte hmotnosť plôšky s plošnou hustotou $\sigma(x,y) = xy$. Teleso je ohraničené dvoma krivkami: $f_1 = x^2$ a $f_2 = \sqrt{x}$ pričom $x \in \langle 0, 1 \rangle$



obr. VII.7a



obr. VII.7b

Riešenie: Nájdime analytické vyjadrenie integračného oboru: $\Omega : 0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$ a dosaďme do vzťahu pre výpočet hmotnosti (7.30):

$$m = \iint_{\Omega} \sigma(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\, xy \right] = \frac{1}{12}$$

Integračnú oblasť Ω sme mohli vyjadriť aj opačne, prostredníctvom premennej $x : \sqrt{y} \leqslant x \leqslant y^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ a integrovať podľa (7.31).

$$m = \iint_{\Omega} \sigma(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dy \left[\int_{y^2}^{\sqrt{y}} dx\, xy \right] = \frac{1}{12}$$

$\diamondsuit$

Substitučná metóda pri integráloch viacerých premenných. V mnohých fyzikálnych úlohách je vhodnejšie a oveľa efektívnejšie použiť iné súradnicové systémy, ako kartézke (viď kapitola VI). Vtedy je nutné celý integrál, včetne objemových $dxdydz$ resp plošných elementov $dxdy$ ako aj integračného oboru, pretransformovať do nových súradníc.:

$\boxed{\text{Príklad 9}}$ Vypočítajme moment zotrvačnosti homogénneho disku s polomerom R vzhľadom na $z - ovú$ os:

Riešenie: Integračný obor v kartézkej sústave $\Omega : -R \leqslant x \leqslant R$, $-\sqrt{R^2 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}$ a pre moment zotrvačnosti:

$$I_{zz} = \iint \left(x^2 + y^2\right) \sigma\, dx\, dy$$

Pretransformujme celý integrál do polárnych súradníc[2]:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \qquad\qquad y = r\sin\varphi \\ dxdy &\rightarrow rdrd\varphi \end{aligned}$$

[2] V kartézkej sústave je riešenie zdĺhavé a komplikované, lebo integračná oblasť nie je intervalom ale množinou.

$$I_{zz} = \iint \left(x^2 + y^2\right) \sigma dx\, dy = \sigma \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\, \left(x^2 + y^2\right) =$$

$$= 2\sigma \int_{-R}^{R} dx \left[x^2\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{\left(R^2 - x^2\right)^{3/2}}{3} \right] = \frac{1}{2} M R^2$$

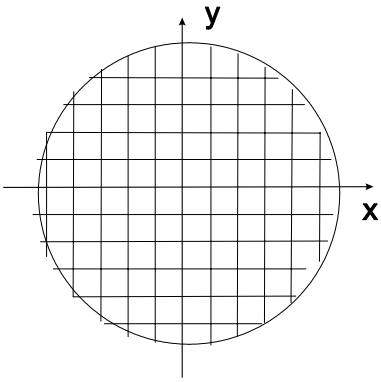
Integračná oblasť $\Omega : 0 \leqslant r \leqslant R, \;\; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ je vlastne interval a preto integrovať môžeme v ľubovoľnom poradí:.

$$I_{zz} = \iint \left(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi\right) \sigma r dr d\varphi = \iint \sigma r^3 dr d\varphi \tag{7.32}$$

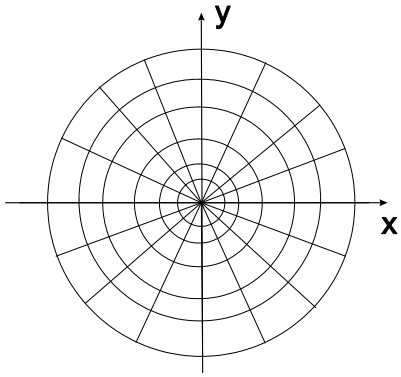
$$I_{zz} = \sigma \int_0^R dr r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^R r^2 \left[2\pi r dr \sigma\right] = \frac{1}{2} M R^2 \tag{7.33}$$

$$I_{zz} = \sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r^3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{R^4}{4}\sigma\right] = \frac{1}{2} M R^2 \tag{7.34}$$

Všimnime si, že v hranatej zátvorke rovnice (7.33) vystupuje moment zotrvačnosti obruče s polomerom r a hrúbkou dr. Príspevky k celkovému momentu zotrvačnosti sa najskôr počítajú po obvode a potom sa postupuje ďalej v radiálnom smere. V rovnici (7.34) ide o opačnú stratégiu: najskôr sčítavame elementy po hruhových úsekoch s uhlom $d\varphi$



obr. VII.8a

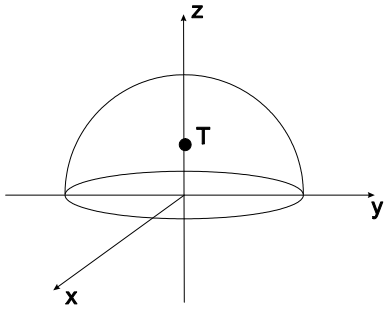


obr. VII.8b

.

$\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 10}}$ Vypočítajte súradnice ťažiska homogénnej polgule.



obr. VII.9

Riešenie: Pretransformujme vzťah pre výpočet ťažiska

$$z_T = \frac{\int z dm}{M} = \frac{\iiint z \rho dx dy dz}{\frac{2}{3}\pi R^3 \rho}$$

do sférických súradníc. Integračná oblasť v sférických súradniciach $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$ a objemový element: $dxdydz \to r^2 \sin\vartheta drd\varphi d\vartheta$:

$$\begin{aligned}
\iiint z\rho dxdydz &= \iiint \rho r \cos\vartheta r^2 \sin\vartheta drd\varphi d\vartheta = \\
&= \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho\pi \frac{R^4}{4} \\
z_T &= \frac{3}{8}R
\end{aligned}$$

Vzhľadom na symetriu úlohy $x_T = y_T = 0$ ♢

$\boxed{\text{Príklad 11}}$ Vypočítajte moment zotrvačnosti gule vzhľadom na os, prechádzajúcou jej stredom.

Riešenie: Integrál pre výpočet momentu zotrvačnosti vzhľadom na os z pretransformujme do sférických súradníc.

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int \left(x^2 + y^2\right) dm = \iiint \left(x^2 + y^2\right) \rho dxdydz = \\
&\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\pi} \left(r^2 \cos^2\varphi \sin^2\vartheta + r^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta\right) \rho r^2 \sin\vartheta drd\varphi d\vartheta \\
&= \frac{2}{5} mR^2
\end{aligned}$$

Mohli sme využiť symetriu telesa, z ktorej vyplýva rovnosť diagonálnych zložiek tenzora momentu zotrvačnosti:

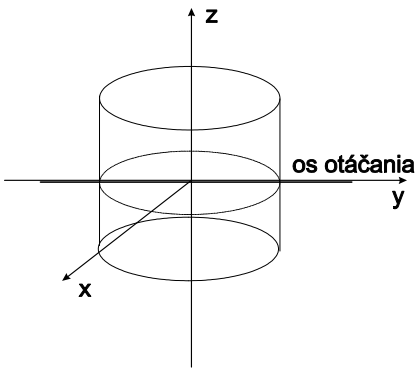
$$\begin{aligned}
I &= I_{zz} = I_{yy} = I_{zz} \\
I &= \int \left(x^2 + y^2\right) dm = \int \left(x^2 + z^2\right) dm = \int \left(y^2 + z^2\right) dm
\end{aligned}$$

Sčítaním týchto zložiek a využitím sférickej symetrie:

$$3I = 2 \int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm = 2\rho \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr = \frac{6}{5} mR^2$$

Odkiaľ $I = \frac{2}{5} mR^2$ ♢

$\boxed{\text{Príklad 12}}$ Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho valca vzhľadom na os, ktorá prechádza stredom valca a je kolmá na geometrickú os.



obr. VII.10

Riešenie: Zložku tenzora zotrvačnosti I_{xx} pretransformujme do cylindrickej sústavy:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \rho \iiint \left(y^2+z^2\right) dxdydz = \rho \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \left(r^2\sin^2\varphi + z^2\right) rdrd\varphi dz = \\ &= M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 13}}$ Nájdite hmotnosť dutej nehomogénnej gule s hustotou $\rho = Ar$, ktorej vnútorný polomer má veľkosť R_1, vonkajší R_2 a $A = konšt.$

Riešenie: Integrál pre výpočet hmotnosti pretransformujme do sférických súradníc.

$$m = \int \rho dV = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{R_1}^{R_2}\int\limits_0^{\pi} Arr^2 \sin\vartheta drd\varphi d\vartheta = A\pi\left(R_2^4 - R_1^4\right)$$

$\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 14}}$ Vypočítajte tenzor momentu zotrvačnosti homogénneho kvádra s rozmermi: $a \times b \times c$.

Riešenie: Pre zložku I_{zz} platí:

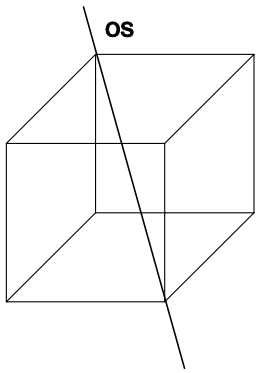
$$\begin{aligned} I_{zz} &= \iiint \left(x^2+y^2\right)\rho dxdydz = \\ I_{zz} &= \rho\left[\int\limits_{-a/2}^{a/2} x^2 \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy \int\limits_{-c/2}^{c/2} dz + \int\limits_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{-c/2}^{c/2} dz\right] = \\ &= \frac{M}{12}\left(a^2+b^2\right) \end{aligned}$$

Analogickými dopočítaním ďalších zložiek tenzora dostaneme:

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} \frac{M}{12}\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{12}\left(a^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12}\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix} \tag{7.35}$$

♢

$\boxed{\text{Príklad 15}}$ Určte moment zotrvačnosti homogénnej kocky vzhľadom na telesovú uhlopriečku.



obr. VII.11

Riešenie: Tenzor momentu zotrvačnosti kocky je tototožný s tenzorom zotrvačnosti kvádra z predchádzajúceho príkladu, pričom: $a = b = c$. Moment zotrvačnosti vzhľadom na uhlopriečku, ktorej smerový vektor $\overrightarrow{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ vypočítame podľa vzťahu (3.11) z kapitoly III.

$$\begin{aligned} I_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{M}{6}a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{6}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{6}a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{M}{6}a^2 \end{aligned}$$

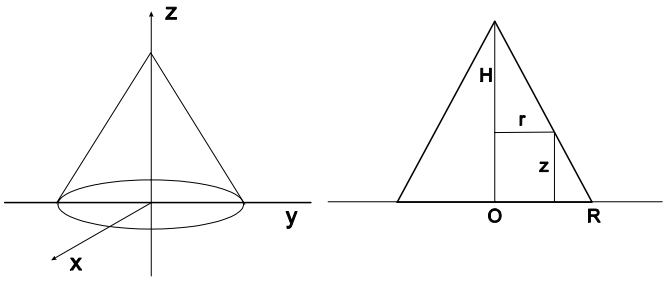
♢

$\boxed{\text{Príklad 16}}$ Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho kužeľa vzhľadom k priemeru podstavy.

Riešenie: Súradnicovú sustavu voľme podľa obrázka obr.VII.12. Pre zložku J_{xx} potom platí:

$$J_{xx} = \iiint\limits_V \left(y^2+z^2\right) \rho dx\, dy\, dz \tag{7.36}$$

Aby sme mohli integrál pretransformovať do cylindrickej sústavy nájdime rovnicu kužeľovej plochy.



obr. VII.12

Z obrázka VII.12 a z podobnosti trojuholníkov vyplýva:

$$\frac{z}{H} = \frac{R-r}{R}$$

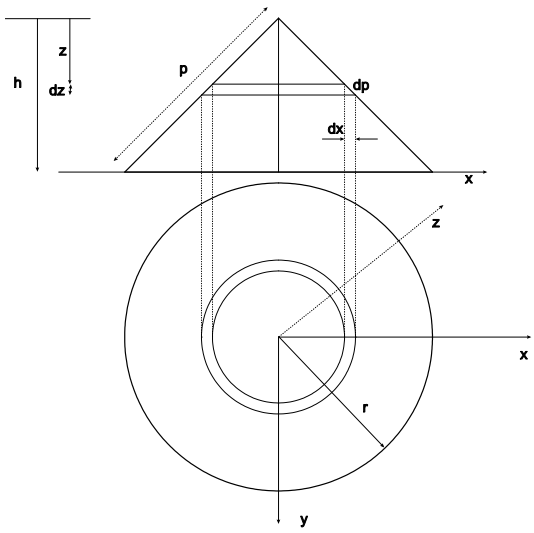
kde H je výška a R polomer podstavy. Pre integrál (7.36) po transformácii platí:

$$J_{yy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} r dr \int_0^{H\frac{R-r}{R}} \left(r^2 \sin^2\varphi + z^2\right) dz = \frac{\pi H R^2}{60}\left(2H^2 + 3R^2\right)$$

$\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 17}}$ Vypočítajte ťažisko plášťa rotačného kužela.

Riešenie: Vzhľadom na symetriu stačí vypočítať súradnice z ťažiska. Z podobnosti trojuholníkov na obrázku VII.12b:



obr. VII.12b

$$\begin{aligned} z &= \frac{h}{r}x \\ dz &= \frac{h}{r}dx \end{aligned}$$

Element povrchovej priamky má veľkosť:

$$dp = \sqrt{dx^2 + dz^2}$$

Dĺžka povrchovej priamky:

$$p = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Element plochy plášťa sa rovná:

$$\begin{aligned} dS &= 2\pi x\, dp = 2\pi x\sqrt{dz^2 + dx^2} = 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx = \\ &= 2\pi x\sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}\, dx = \frac{2\pi}{r}\sqrt{r^2 + h^2}x\, dx \end{aligned}$$

Pre ťažisko potom platí:

$$z_t = \frac{\int z\, dS}{\int dS} = \frac{\int\limits_0^r \frac{h}{r}\, x\, \frac{2\pi}{r}\sqrt{r^2 + h^2}x\, dx}{\frac{2\pi}{r}\sqrt{r^2 + h^2}\int\limits_0^r x\, dx} = \frac{2}{3}h$$

♢

$\boxed{\text{Príklad 18}}$ Vypočítajte integrál $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha x^2\right) dx$

Riešenie: Hodnota integrálu nezávisí od označenia premenných a preto:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha x^2\right) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha y^2\right) dy = I$$

Vynásobme tieto integrály navzájom a upravme ich podľa vzťahu (7.29)

$$\begin{aligned} I^2 &= \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha x^2\right) dx\right]\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha y^2\right) dy\right] = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\alpha\left(x^2 + y^2\right)\right] dx\, dy \end{aligned}$$

Pretransformujme celý integrál do polárnych súradníc

$$\begin{aligned} I^2 &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\alpha r^2\right) r dr d\varphi = \frac{\pi}{\alpha} \\ I &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \end{aligned}$$

♢

7.3 Cvičenia

$\boxed{7.1.}$ Vypočítajte $\iint xydxdy$ cez plochu ohraničenú parabolou $y^2 = x$ a priamkou $x = 2$.

Riešenie: 0

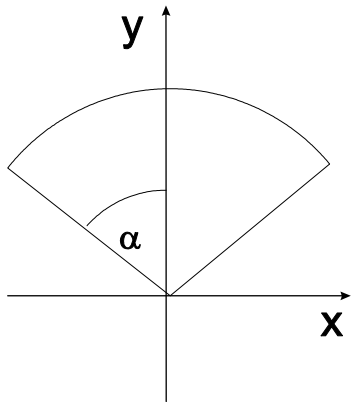
$\boxed{7.2.}$ Vypočítajte $\iint (x^2 + y)\, dxdy$ cez plochu ohraničenú parabolou $y = x^2$ a $y^2 = x$.

Riešenie: $\frac{33}{140}$

$\boxed{7.3^*}$ Vypočítajte objem, ťažisko a moment zotrvačnosti kužeľa s polomerom základne R a výškou h.

Riešenie: $z_t = \frac{3}{4}h$

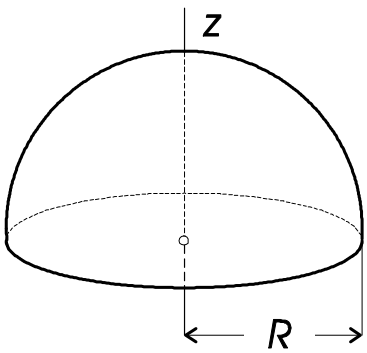
$\boxed{7.4^*}$ Vypočítajte ťažisko kruhového oblúka podľa obr. VII.13.



obr. VII.13

Riešenie: $y_t = R\frac{\cos\alpha}{\alpha}$

$\boxed{7.5^*}$ Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho polguľového plášťa hmotnosti M vzhľadom na os z na obrázku.



obr. VII.15

Riešenie: $I = \frac{2}{3}MR^2$

$\boxed{7.6^*}$ Vypočítajte momenty zotrvačnosti elipsoidu s hlavnými osami a, b, c.
Riešenie: $I_z = \frac{m}{5}\left(a^2 + b^2\right)$, $I_x = \frac{m}{5}\left(b^2 + c^2\right)$, $I_y = \frac{m}{5}\left(c^2 + a^2\right)$

$\boxed{7.7^*}$ Vypočítajme ťažisko obdĺžnika s vrcholmi $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$, $D(0,2)$ s plošnou hustotou $\sigma(x,y) = 1 + x + 2y$.
Riešenie: $\vec{r}_t = (11/21, 25/21)$.

$\boxed{7.8^*}$ Vypočítajte hmotnosť obdĺžnikovej dosky $a \times b$ s hrúbkou h, ak jej hustota je $\rho\left(x,y\right) = kx^2y$.

$\boxed{7.9^*}$ Vypočítajte hmotnosť tyče s dĺžkou a, prierezom S a hustotou $\rho\left(x\right) = kx^2$.

$\boxed{7.10^*}$ Vypočítajte ťažisko zvislo prerezaného homogénneho polvalca.

$\boxed{7.11^*}$ Vypočítajte ťažisko $\frac{1}{8}$ gule (prvý kvadrant).

$\boxed{7.12^*}$ Vypočítajte hmotnosť a tenzor momentu zotrvačnosti nehomogénnej gule s hustotou $\rho\left(r,\vartheta,\varphi\right) = c \cdot r^n$.

Kapitola 8

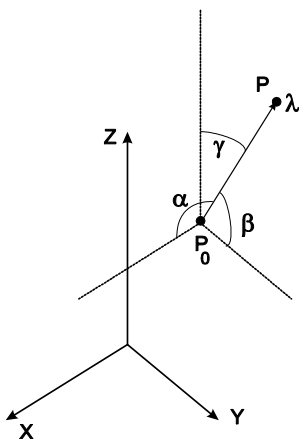
Základy vektorovej analýzy

Vo fyzike a matematike často pracujeme s veličinami, ktoré sú funkciami polohy. Ak každému bodu v priestore $\overrightarrow{r}$ priradíme číslo $f\left(\overrightarrow{r}\right)$ hovoríme, že v definovanom priestore je pole skalárnej veličiny f, ak bodom priradíme vektorovú funkciu

$$\vec{F}\left(\overrightarrow{r}\right) = F_x\left(x,y,z\right)\overrightarrow{i} + F_y\left(x,y,z\right)\overrightarrow{j} + F_z\left(x,y,z\right)\overrightarrow{k}$$

hovoríme o vektorových poliach. Môže ísť napríklad o teplotu v jednotlivých bodoch študovanej vzorky, alebo o rýchlosť prúdiacej kvapaliny v jednotlivých bodoch trubice. Skalárne a vektorové pole ktoré nezávisí explicitne na čase sa nazýva stacionárne. Vlastnosti polí je výhodné vyšetrovať metódami matematickej analýzy, ktorej základným pojmom je derivácia. Ide však skôr o derivácie smerové, umožňujúce analyzovať vlastnosti daného poľa v určitom smere.

Smerová derivácia Dôležitou charakteristikou skalárnych polí je rýchlosť zmeny funkcie poľa (napr. teploty) pri zmene polohy bodu P . Pre lepšiu názornosť analyzujme skalárne pole teplôt T.



obr. VIII.1

Nech v čase $t = 0$ vyštartuje z bodu P_0 auto, ktoré sa začne pohybovať v smere lúča λ, rýchlosťou $v = 1\,\frac{m}{s}$. Jeho poloha v čase t bude:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\cos\alpha \\ y &= y_0 + t\cos\beta \\ z &= z_0 + t\cos\gamma \end{aligned}$$

Teleso za čas t prejde dráhu[1] $\Delta r = vt = t$. Teplota T sa tým zmenila z hodnoty $T(P_0)$ na hodnotu $T(P)$. Priemerná rýchlosť tejto zmeny je:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{T(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - T(x_0, y_0, z_0)}{t} = \\ &= \frac{T(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - T(x_0, y_0, z_0)}{\Delta r} \end{aligned} \tag{8.1}$$

a okamžitá

$$\begin{aligned} &= \lim_{t\to 0}\bar{T} = \lim_{t\to 0}\frac{T(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - T(x_0, y_0, z_0)}{t} = \\ &= \lim_{\Delta r\to 0}\frac{T(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - T(x_0, y_0, z_0)}{\Delta r} = \qquad (8.2) \\ &= \lim_{\Delta r\to 0}\frac{T(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - T(\vec{r})}{\Delta r} \qquad (8.3) \end{aligned}$$

Uvedená rýchlosť nezávisí len od polohy bodu P_0 ale aj od smeru pohybu telesa a nazývame ju s*merová derivácia*. Ak by sa auto pohybovalo v smere osi x, za čas t prejde dráhu $\Delta x = 1t$. Limitným priblížovaním $\Delta x \to 0$ nájdeme okamžitú rýchlosť zmeny teploty v smere osi x :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{T(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - T(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \tag{8.4}$$

Podobne pre smery y a z:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{T(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - T(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y} \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{T(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - T(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z} \tag{8.6}$$

Posledné typy derivácii sa nazývajú *parciálne*. Ide vlastne o deriváciu podľa jednej premenej (ostatné premenné sú zafixované). Ak sa vrátime k nášmu autu a budeme chcieť vypočítať zmenu celkovej teploty prostredia dT pri jeho premiestnení z bodu P_0 do P, môžeme postupovať nasledovne: najskôr teleso

[1] Pre lepšiu prehľadnosť nebudeme písať jednotky. Ak však do ľubovoľného vzťahu dosadíme čísla v sústave SI, potom aj výsledná veličina vyjde v základných jednotkách SI.

posunieme v smere osi x o Δx, čomu zodpovedá zmena teploty o $dT_x = \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x$, potom v smere y a nakoniec v smere osi z a tieto parciálne zmeny teplôt sčítame:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial T}{\partial z}\Delta z \tag{8.7}$$

Celkovú zmenu dT nazývame totálnym diferenciálom funkcie dT.

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ Teplota v priestore je daná formulou $T = 2x^3 + 4y - z$. Určte rýchlosť jej zmeny v smere osi x, y a z v ľubovoľnom bode priestoru

Riešenie: Pre rýchlosť zmeny v jednotlivých smeroch platí: $\frac{\partial T}{\partial x} = 6x^2$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 4$, $\frac{\partial T}{\partial z} = -1$ $\diamondsuit$

Vo fyzike sa často stretávame s funkciami viacerých premenných, pričom to nemusia byť nevyhnutne súradnice x, y, z. Ak chceme napr. určiť odpor rezistora R pomocou Ohmovho zákona $R(U, I) = \frac{U}{I}$ potom chybu, ktorej sa pri meraní dopustíme, môžeme vypočítať na základe analógie so vzťahom (8.7):

$$dR = \frac{\partial R}{\partial I}\Delta I + \frac{\partial R}{\partial U}\Delta U$$

$\boxed{\text{Príklad 2}}$ Doba kmitu matematického kyvadla sa počíta podľa vzťahu $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Určte, ako sa zmení doba kmitu kyvadla, ak sa jeho dĺžka zmenila o $\Delta l = a$ a tiažové zrýchlenie dôsledkom zmeny nadmorskéj výšky o $\Delta g = b$?

Riešenie: Pretože hodnoty a a b považujeme za dostatočne malé, potom zmenu doby kmitu stotožníme s diferenciálom funkcie T :

$$\Delta T \approx dT = \frac{\partial T}{\partial l}\Delta l + \frac{\partial T}{\partial g}\Delta g$$

Po vykonaní parciálnych derivácii:

$$\Delta T = \frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{lg}}}\left(a - \frac{l}{g}b\right)$$ $\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 3}}$ Vypočítajte približnú hodnotu výrazu $b = 0,97^{2,02}$

Riešenie: Uvažujme funkciu dvoch premenných $f(x_1, x_2) = (x_1)^{x_2}$ v bode $[1, 2]$. Hodnota tejto funkcie sa pri zmene $\Delta x_1 = -0,03$ a $\Delta x_2 = 0,02$ zmení približne o (8.7):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 = x_2 x_1^{x_2-1}\Delta x_1 + x_1^{x_2}\ln x_1 \Delta x_2 \sim 0,06$$

a teda:

$$b \sim f\,(1,2) + df = 1 - 0,06 = 0,94 \qquad \diamondsuit$$

8.1 Charakteristiky skalárnych a vektorových polí.

V nasledovných odstavcoch budeme vyšetrovať vlastnosti skalárnych a vektorových polí pomocou operácií gradientu, divergencie a rotácie.

8.1.1 Ekviskalárne plochy (čiary) a gradienty skalárnych polí

Skalárne polia f zobrazujeme pomocou ekviskalárnych plôch (čiar),. ktoré spájajú body s rovnakou hodnotou funkcie f:

$$f\,(x, y, z) = konšt$$

Rozdiel medzi každými dvoma susednými plochami si volíme zvyčajne konštantný a vhodný na prehľadné zobrazovanie poľa. Ekviskalárne plochy sa vzájomne nepretínajú, ale môžu mať rôzne geometrické tvary.

Príklad 4 Nájdite ekviskalárne plochy potenciálu bodového náboja.

Riešenie: Pre potenciál platí $V = -\chi\frac{m}{r}$ a ekviskalárne plochy budú guľové. $\diamondsuit$

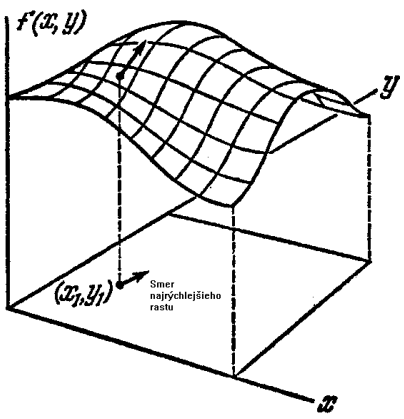
Ak v priestore posunieme teleso z bodu $\vec{r}$ o vektor $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, potom sa skalárna veličina zmení o dT (8.7), čo zapíšme pomocou skalárneho súčinu:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \cdot d\vec{r} = \nabla T \cdot d\vec{r} \tag{8.8}$$

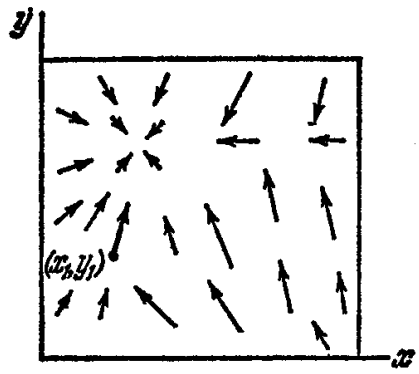
Výraz v zátvorke je vektor, ktorý budeme nazývať gradient poľa T

$$\operatorname{grad} T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} \tag{8.9}$$

Získame ho aplikovaním "nabla" operátora $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ na príslušnú skalárnu funkciu. Gradient vyjadruje smer *najväčšieho nárastu skalárnej funkcie* $\frac{dT}{|d\vec{r}|}$



obr. VIII.2a



obr. VIII.2b

Vidieť to priamo zo vzťahu (8.8):

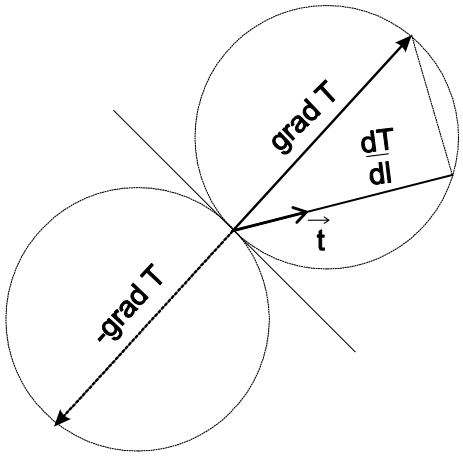
$$\frac{dT}{|d\vec{r}|} = |\nabla T| \cos\varphi \tag{8.10}$$

podľa ktorého funkcia najrýchlejšie rastie, keď $\cos\varphi = 1$, čo znamená $d\vec{r} \| \operatorname{grad} T$[2]. Ďalšou významnou vlastnosťou je *kolmosť gradientu na ekviskalárne plochy.* Hodnota funkcie na týchto plochách je konštantná $\Longrightarrow dT = 0 \Longrightarrow \nabla T \cdot d\vec{r} \equiv 0 \Rightarrow \nabla T \perp d\vec{r}$. Pri infinitenzimálnom posune $|d\vec{r}| \to 0$, ľavá strana rovnice (8.3) je totožná s (8.10) a vyjadruje smerovú deriváciu.

$$\frac{dT}{ds} = grad\, T \cdot \vec{t}\,(s) \tag{8.11}$$

kde $\vec{t}$ určuje smer, v ktorom sa derivácia počíta.

[2]Na obr. VIII.2a je pre ilustráciu znázornená funkcia dvoch premenných $f(x, y)$, ktorá je reprezentovaná plochou. Na obr. VIII.2b sú znázornené vektory $\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$ zobrazujúce smer najrýchlejšej zmeny skalárnej funkcie $f(x, y)$.



obr. VIII.3

Pre operátor $\vec{\nabla}$ platia podobné matematické operácie ako pre deriváciu skalárnych funkcií[3]:

$$\vec{\nabla}(f_1 + f_2) = \vec{\nabla} f_1 + \vec{\nabla} f_2 \tag{8.12}$$

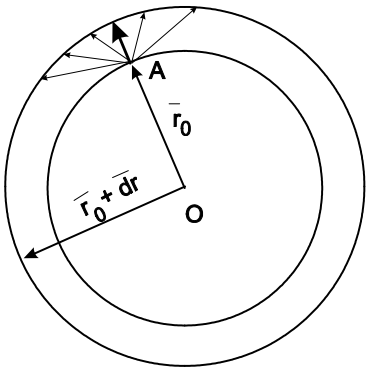
$$\vec{\nabla}(f_1 f_2) = f_1 \vec{\nabla} f_2 + f_2 \vec{\nabla} f_1 \tag{8.13}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{1}{f_2^2}\left(f_2 \vec{\nabla} f_1 - f_1 \vec{\nabla} f_2\right) \tag{8.14}$$

Vo fyzike sa často stretneme so sféricko-symetrickými poliami, ktoré majú tú vlastnosť, že skalárna funkcia závisí len od veľkosti polohového vektora $\vec{r}$. Pre gradient $f(r)$ potom platí [4]:

$$\vec{\nabla} f(r(x,y,z)) = \left[\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\right] = \frac{df}{dr}\left[\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right] = \frac{df}{dr}\frac{\vec{r}}{r} \tag{8.15}$$

Výsledok je logický. Ekviskalárne plochy sú guľové. Nech sfére s polomerom r_0 zodpovedá konštantná hodnota $f(r_0)$ a sfére so niečo väčším polomerom $r_0 + dr$ hodnota $f(r_0 + dr)$. (obr. VIII.4)



obr. VIII.4

[3] operátor je lineárny

[4] Uvedomme si že vektor $\vec{r} = (x, y, z)$ má veľkosť $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a skutočnosť $\frac{\partial}{\partial x} r = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \frac{x}{r}$, podobne $\frac{\partial}{\partial y} r = \frac{y}{r}$ a $\frac{\partial}{\partial z} r = \frac{z}{r}$. Pri výpočte využime pravidlá o derivovaní zloženej funkcie.

Smer najrýchlejšej zmeny funkcie f musí byť totožný so smerom polohového vektora $\overrightarrow{r}$ a jej veľkosť je $\frac{df}{dr}$

Využitie gradientov vo fyzike:

Určenie silového poľa z potenciálov. V kapitole krivkové integrály sme zavádzali vzťah pre výpočet práce v konzervatívnych poliach (8.8):

$$A = \int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = U\left(\overrightarrow{r}_1\right) - U\left(\overrightarrow{r}_2\right) = \int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_2} -dU \tag{8.16}$$

Podľa (8.8):

$$\int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_2} -dU = \int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_2} -\overrightarrow{\nabla} U \cdot d\overrightarrow{r} \tag{8.17}$$

$$\overrightarrow{F} = -gradU \tag{8.18}$$

Pole potenciálnej energie $U(\vec{r})$ obsahuje všetku informáciu o sile $\vec{F}$. Záporné znamienko vystupujúce v tejto rovnici vyjadruje, že sila v danom poli pôsobí na teleso tak, aby čo najrýchlejšie klesla jeho potenciálna energia.

$\boxed{\text{Príklad 5}}$ Nájdite silu pôsobiacu v gravitačnom poli:

Riešenie: Pre potenciálnu energiu $U = -\chi\frac{mM}{r}$, $\overrightarrow{F} = -grad\,U$. Skalárne pole je sféricky symetrické, takže podľa (8.15) $\overrightarrow{F} = -grad\,U = -\chi\frac{mM}{r^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r}$. ♢

Vzťah (8.17) sa dá použiť aj opačne:

$\boxed{\text{Príklad 6}}$ Nájdite potenciálnu energiu vektorového poľa $\overrightarrow{F} = (2y, 2x + 3z, 3y)$

Riešenie: Dosadením do (8.17) získame trojicu parciálnych diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned}
2y &= -\frac{\partial}{\partial x}U \quad &\Rightarrow \quad U = -2yx + c_1(y,z)\\
2x + 3z &= -\frac{\partial}{\partial y}U \quad &\Rightarrow \quad U = -2xy - 3zy + c_2(x,z)\\
3y &= -\frac{\partial}{\partial z}U \quad &\Rightarrow \quad U = -3yz + c_3(x,y)
\end{aligned}$$

Vo všetkých troch riadkoch je tá istá funkcia U a preto

$$U = -3yz - 2xy + konš$$

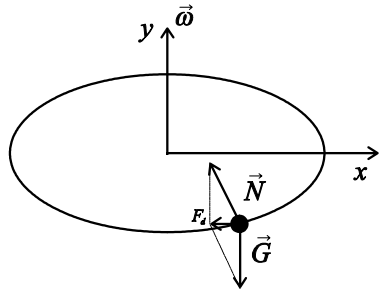
♢

Určovanie rovnovážnych polôh pomocou Lagrangeových funkcií prvého druhu. Kolmosť gradientu na ekviskalárne plochy sa dá výhodne použiť pri hľadaní rovnováznych polôh telies, viazaných určitými väzbami.

Príklad 7 Pohyb guličky je viazaný na elipsu s poloosami a, b :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8.19}$$

ktorá sa otáča okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou ω. Nájdite rovnovážnu polohu guličky.



obr. VIII.5

Riešenie: Vyšetrujme pohyb guličky z hľadiska neinerciálnej vzťažnej sústavy, v ktorej je teleso v rovnováhe. Na guličku pôsobia tri sily: gravitačná $\vec{G} = (0, -mg)$ tlaková sila drôtu $\vec{N}$, a odstredivá $\vec{F}_d = (m\omega^2 x, 0)$, kde x zodpovedá aktuálnemu polomeru krivosti dráhy, po ktorej sa otáča gulička. Ak zadefinujeme v priestore potenciálnu funkciu U :

$$U(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \tag{8.20}$$

potom elipsu (8.19) možno považovať za ekviskalárnu krivku s hodnotou $U = 0$, na ktorú musí byť vektor $\vec{N}$ kolmý. Má smer gradientu:

$$\vec{N} = \lambda \operatorname{grad} U = \lambda \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2} \right)$$

Z podmienky rovnováhy $\vec{F} = \vec{0}$ vyplýva:

$$\lambda \frac{2x}{a^2} + m\omega^2 x = 0 \tag{8.21}$$

$$\lambda \frac{2y}{b^2} - mg = 0 \tag{8.22}$$

Riešením (8.20), (8.21), (8.22) získavame dva korene

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \qquad y_1 = \pm b \\ x_2 &= \pm\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\, a \qquad y_2 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{g}{\omega^2} \end{aligned} \tag{8.23}$$

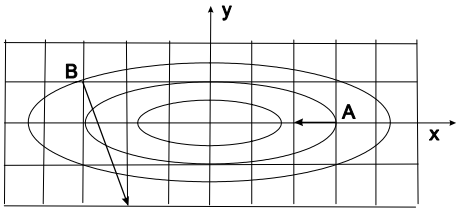
Prvý koreň udáva síce rovnovážnu, ale nestabilnú polohu. ♢

$\boxed{\text{Príklad 8}}$ Predstavte si, že nadmorská výška kopca je daná funkciou $h(x,y) = 5\exp\left[-x^2 - 9y^2\right]$. Nájdite kolmé vektory k vrstevniciam v bodoch so súradnicami $A = [3,0]$, $B = [-3,1]$

Riešenie: Vrstevnice sú také krivky, pre ktoré $h(x,y) = 5\exp\left[-x^2 - 9y^2\right] = const$. Tento vzťah je možné upraviť na rovnicu elipsy: $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + y^2 = const$. Kolmice k vrstevniciam v ľubovoľnom bode sú

$$\overrightarrow{n} = grad\, h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = 5\exp\left[-x^2 - 9y^2\right](-2x, -18y) \sim (-x, -9y)$$

Nepodstatné konštanty sme vynechali, pretože menia veľkosti vektorov a nie ich smery. $\overrightarrow{n}_A \sim (-1,0)$, $\overrightarrow{n}_B \sim (1,-3)$

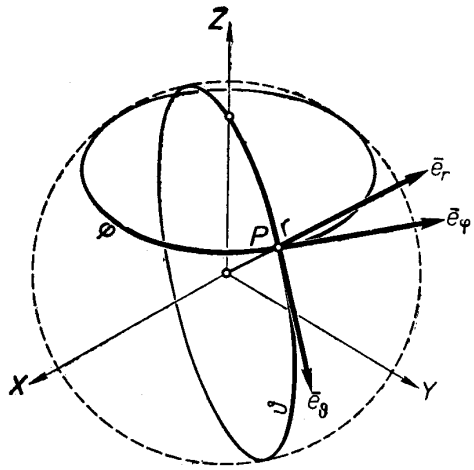


obr. VIII.6

$\diamondsuit$

Niekedy je vhodné vyjadriť operátor gradientu v inej súradnicovej sústave ako v kartézkej. Gradient je vektor invariantný vzhľadom na voľbu súradnicovej sústavy. Stačí preto nájsť jeho zložky v nových bázach. Podľa rovnice (8.11) smerová derivácia zodpovedá priemetu gradientu do smeru jednotkového vektora $\overrightarrow{t}$. Ak zvolíme krivku, ktorej vektor $\overrightarrow{t}$ bude totožný s bázovým vektorom, potom smerová derivácia zodpovedá práve zložkám gradientu v nových bázach.

sférická súradnicová sústava:



obr. VIII.7

$$
\begin{aligned}
(grad\,U)_\varphi &= \left(\frac{dU}{ds}\right)_{r=konš,\vartheta=konšt} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{U(r,\varphi+\Delta\varphi,\vartheta)-U(r,\varphi,\vartheta)}{r\sin\vartheta\Delta\varphi} = \\
&= \frac{1}{r\sin\vartheta}\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{U(r,\varphi+\Delta\varphi,\vartheta)-U(r,\varphi,\vartheta)}{\Delta\varphi} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\varphi} \\
(grad\,U)_r &= \left(\frac{dU}{ds}\right)_{\varphi=konš,\vartheta=konšt} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{U(r+\Delta r,\varphi,\vartheta)-U(r,\varphi,\vartheta)}{\Delta r} = \\
&= \frac{\partial U}{\partial r} \\
(grad\,U)_\vartheta &= \left(\frac{dU}{ds}\right)_{\varphi=konš,r=konšt} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{U(r,\varphi,\vartheta+\Delta\vartheta)-U(r,\varphi,\vartheta)}{r\Delta\vartheta} = \\
&= \frac{1}{r}\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{U(r,\varphi+\Delta\varphi,\vartheta)-U(r,\varphi,\vartheta)}{\Delta\vartheta} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\vartheta} \\
grad\,U &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\overrightarrow{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\overrightarrow{e}_\vartheta \qquad (8.24)
\end{aligned}
$$

Analogickým spôsobom by sme dosiahli nasledovné vzťahy:

cylindrická sústava

$$grad\,U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\overrightarrow{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{\partial U}{\partial z}\overrightarrow{e}_z \qquad (8.25)$$

polárna sústava

$$grad\,U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\overrightarrow{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{e}_r \qquad (8.26)$$

Zložky gradientu do jednotlivých smeroch sme mohli získať využitím vlastnosti skalárneho súčinu:

Ak $\overrightarrow{\nabla}U = \overrightarrow{\nabla}_r\vec{e}_r + \overrightarrow{\nabla}_\varphi\vec{e}_\varphi$ potom

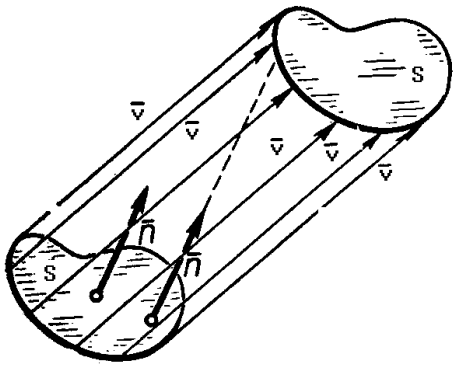
$$
\begin{aligned}
\nabla_r U &= \vec{\nabla}U\cdot\vec{e}_r = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}\right)\cdot\left(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\varphi = \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\sin\varphi = \frac{\partial U}{\partial r}
\end{aligned}
$$

Analogicky pre druhú zložku:

$$\nabla_\varphi = \vec{\nabla}U\cdot\vec{e}_\varphi = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}\right)\cdot\left(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right) = \ldots = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}$$

8.1.2 Divergencia vektorových polí

Divergencia patrí medzi základné pojmy teórie polí a jej geometrický význam si vysvetlíme pomocou hydrodynamickej analógie. Budeme vyšetrovať tok kvapaliny v potoku a každému bodu priradíme vektor jej rýchlosti $\vec{v}$.



obr. VIII.8

Do kvapaliny umiestnime infinitenzimálnu plochu dS s normálou $\overrightarrow{n}$.[5] Cez túto plochu za čas dt pretečie taký objem kvapaliny dV, ktorý sa rovná objemu šikmého valca s rovnobežnými podstavami[6]:

$$\begin{aligned} dV &= dSvdt\cos\varphi \\ \frac{dV}{dt} &= d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} \end{aligned} \tag{8.27}$$

Ak je uhol φ[7] je ostrý, hodnoty dV sú kladné a kvapalina vteká cez plochu do valca, ak je uhol φ tupý, hodnoty sú záporné a kvapalina vyteká cez plochu. Pri komplikovanejších a väčších plochách Σ, na ktorých vektor $\overrightarrow{v}$ nie je konštantný, celkové množstvo pretečenej kvapaliny za jednotku času dostaneme integrovaním:

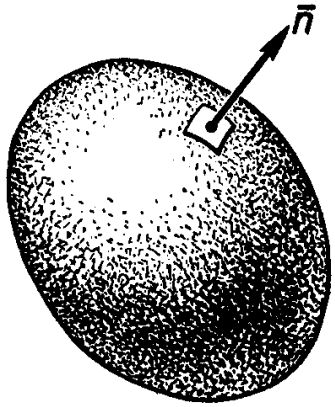
$$\frac{dV}{dt} = \iint_{\Sigma} d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} \tag{8.28}$$

Veličinu (8.28) nazveme tokom vektora $\overrightarrow{v}$ cez plochu Σ. Predpokladajme, že v potoku sa nachádza bod P_0, ktorý obklopíme uzavretou plochou σ. Elementárne vektory $d\vec{S}$ orientujme v smere vonkajších normál.

[5] V ďalšom texte budeme pracovať s vektorom plochy $d\vec{S}$, ktorého veľkosť je rovný danej ploche a je orientovaný v smere normály $\vec{n}$

[6] Valec má výšku $vdt\cos\varphi$, pričom φ je uhol medzi vektorom rýchlosti $\overrightarrow{v}$ a normálou $\overrightarrow{n}$ na plochu dS

[7] φ je uhol medzi normálou na plochu a vektorom rýchlosti $\vec{v}$.



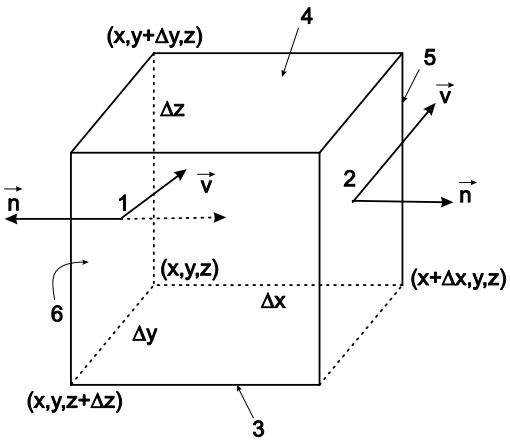
obr. VIII.9

Ak do objemu V_Σ ohraničeného plochou Σ vtečie za jednotku času rovnaké množstvo kvapaliny ako z nej vytečie, potom tok bude nulový. Ak sa však v uzavretom objeme nachádza zdroj kvapaliny (napr. prameň, topiaca sa ľadová kryha) potom cez plochu pretečie za jednotku času viac kvapaliny ako pritečie a tok bude kladný. Z uvedeného vyplýva, že tok poľa cez limitný objem V_Σ by mohol v teórii polí reprezentovať užitočnú veličinu, ktorá by poskytovala informáciu, či v danom bode je zdroj (žriedlo) kvapaliny alebo nie je[8]. Zaveďme takúto veličinu a nazvime ju divergencia:

$$div\,\overrightarrow{v} = \lim_{V_\Sigma \to 0} \frac{1}{V_\Sigma} \oint\limits_{\Sigma} d\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{v} \tag{8.29}$$

Polia, pre ktoré $div\,\overrightarrow{v} > 0$, sa nazývajú žriedlové, polia s $div\,\overrightarrow{v} < 0$ sú norové a pre $div\,\overrightarrow{v} = 0$ sú bezžriedlové. Definícia divergencie je síce názorná, ale neumožňuje priamy výpočet. Počítanie takejto limity je nepraktické a preto sa pokúsime nájsť jednoduchší spôsob. Pri limitnom zmenšovaní objemu V sa postupne stráca rozdiel medzi rôznymi počiatočnými tvarmi objemových útvarov V. Zoberme preto špeciálny prípad infinitenzimálnej kvádra podľa obrázka VIII.10 a vypočítajme tok cez jej povrch.

[8] Limitným zmenšovaním objemu V_Σ sa dostaneme k bodu P_0



obr. VIII.10

Dostaneme ho spočítaním tokov cez každú zo šiestich stien. najprv uvažujme o protiľahlých stenách 1 a 2[9] :

$$N_{1,2} = \iint_2 d\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{v} + \iint_1 d\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{v} \tag{8.30}$$

$$= \left[v_x \left(x + \Delta x, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2} \right) - v_x \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \cdot \cdot \Delta y \Delta z \tag{8.31}$$

Predelením rovnice Δx a vykonaním limitného prechodu $\Delta x \to 0$, výraz v hranatej zátvorke zodpovedá parciálnej derivácii:

$$\iint_{1,2} d\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \tag{8.32}$$

Zopakovaním postupu pre ostatné páry stien pre celkový tok dostaneme výraz[10]:

$$\oint_{kváder} d\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{v} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \tag{8.33}$$

$$\lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{kváder} d\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{v} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \tag{8.34}$$

Porovnaním (8.34) s definíciou divergencie (8.29) je zrejmé, že pre zavedenú veličinu-divergenciu platí:

$$div \overrightarrow{v} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} \tag{8.35}$$

[9] Pretože uvažujeme o malom kvádre, môžeme hodnoty vektorov na stenách aproximovať hodnotami v strede kocky. Pre prvú stenu platí: $\overrightarrow{v} = [v_x(1), v_y(1), v_z(1)]$, $d\overrightarrow{S} = (-\Delta y \Delta z, 0, 0)$, pre druhú stenu: $\overrightarrow{v} = [v_x(2), v_y(2), v_z(2)]$, $d\overrightarrow{S} = (\Delta y \Delta z, 0, 0)$. Vektory plochy sú orientované von z objemu.

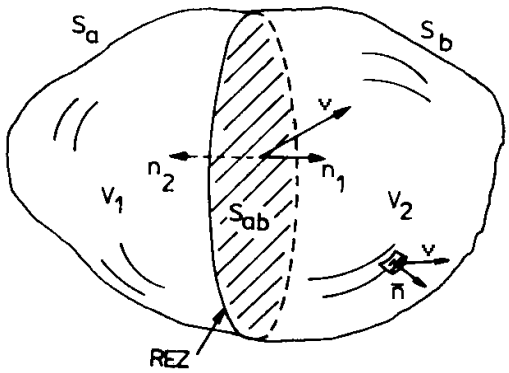
[10] Objem kvádra $\Delta x \Delta y \Delta z = dV$

$\boxed{\text{Príklad 9}}$ Rýchlosť kvapaliny v rieke sa mení podľa rovnice $\vec{v} = (3x^2, 2x+y, z)$. Ak dosadíte súradnice x, y, z v metroch, rýchlosť výjde v $m\,s^{-1}$. Nájdite také miesto v potoku, v ktorom nie je žriedlo kvapaliny

Riešenie: Kvapalina nemá žriedlo v tých miestach, pre ktoré $div\,\vec{v} = 0$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] = 6x + 2 = 0 \\ x &= -\frac{1}{3}\,m \end{aligned}$$

Majme uzavretú plochu S, ktorá ohraničuje objem V. Rozdeľme objem V ľubovoľným rezom na dve časti.



obr. VIII.11

Dostaneme tak dve uzavreté plochy a dva objemy. Objem $V_1(V_2)$ ohraničuje plocha $S_1(S_2)$, ktorá pozostáva z časti pôvodnej plochy $S_a(S_b)$ a z plochy rezu $S_{ab}(S_{ba})$. Sčítaním tokov cez parciálne plochy S_1 a S_2 zistíme, že tok cez pôvodnú plochu S[11] je rovný sume tokov cez plochy parciálne:

$$\iint_{S_a} d\vec{S}_1 \cdot \vec{v} + \iint_{Sab} d\vec{S}_1 \cdot \vec{v} + \iint_{S_b} d\vec{S}_2 \cdot \vec{v} + \iint_{S_{ba}} d\vec{S}_2 \cdot \vec{v} \tag{8.36}$$

$$= \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{v} \tag{8.37}$$

Ľubovoľný útvar sa dá vytvoriť naskladaním parciálnych uzavretých plôch v tvare infinitenzimálnych kociek:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{v} = \sum_i \oint_{kocka} d\vec{S} \cdot \vec{v} = \sum_i div\,\vec{v}\,dV_i = \iiint div\,\vec{v}\,dV$$

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{v} = \iiint div\,\vec{v}\,dV \tag{8.38}$$

Rovnica (8.38) sa nazýva **Gaussova veta**. ♢

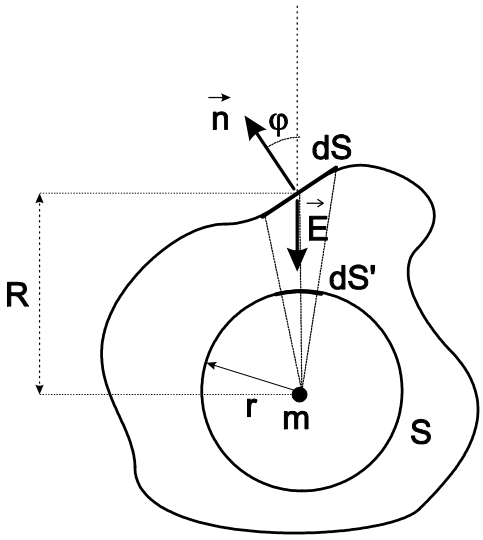
[11] Všimnite si, že v oblasti rezu $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2$ a preto $\iint_{Sab} d\vec{S}_1 \cdot \vec{v} = -\iint_{Sab} d\vec{S}_2 \cdot \vec{v}$. Pripomíname, že plošné elementy pri uzavretých plochách sú orientované von z telesa

Gaussov zákon. Skúmajme tok intenzity gravitačného poľa uzavretou plochou S.

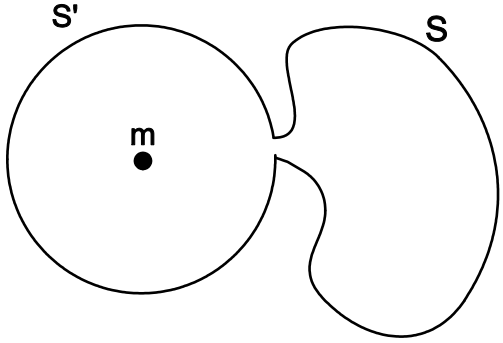
i) Umiestnime do stredu guľovej plochy s polomerom r hmotný bod s hmotnosťou m a vypočítajme tok[12]:

$$\oint_S \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \oint_S \varkappa \frac{m}{r^2} dS = \varkappa \frac{m}{r^2} \oint_S dS = -\varkappa 4\pi m \tag{8.39}$$

ii) Ak plocha má všeobecný tvar S, potom obklopíme hmotný bod guľovou plochou S' s takým polomerom, aby celá bola vo vnútri objemu (obr. VIII.12a). Spojme čiarami hmotný bod s okrajmi infinitenzimálnej plochy dS. Vzniknutý kužeľ vytne na guľovej ploche S' element dS'. Tok plochou dS je $d\Phi = \overrightarrow{E}(R) \cdot d\overrightarrow{S} = E(R)\, dS \cos\varphi$, tok cez plochu dS' bude $d\Phi' = E(r)\, dS'$, pritom $\frac{E(r)}{E(R)} = \frac{R^2}{r^2}$ a $\frac{dS'}{dS} = \frac{r^2 \cos\varphi}{R^2}$. Vzájomným porovnaním vyplynie: $d\Phi = d\Phi'$ a preto celkové toky cez obe plochy sú rovnaké: $\Phi = \varkappa 4\pi m$



obr. VIII.12a



obr. VIII.12b

iii) Výsledok nemožno ešte automaticky použiť pre prípad, keď hmotný bod je umiestnený mimo plochy S. Použijeme pomocnú guľovú plochu S' s takým polomerom, aby sa obe plochy takmer dotýkali (obr. VIII.12b). Podľa predchádzajúcich analýz tok plochou $S + S'$ ako aj dielčou plochou S' bude rovný $\Phi = \varkappa 4\pi m$, tok spojovacou časťou možno zanedbať. Tok plochou S je teda nulový.

iv) Zovšeobecníme tieto výsledky pre ľubovoľné rozmiestnenie a počty hmotných bodov. Výsledná intenzita na ploche S bude určená superpozíciou

[12] $\vec{E}$ je vektor intenzity a smeruje do stredu zeme: $\vec{E} . \uparrow\downarrow d\vec{S}$

intenzít od jednotlivých hmotných bodov:

$$\Phi = \oint_S \left(\overrightarrow{E}_1 + \overrightarrow{E}_2 + ... \overrightarrow{E}_N \right) \cdot d\overrightarrow{S} = -\varkappa 4\pi \sum m_i \tag{8.40}$$

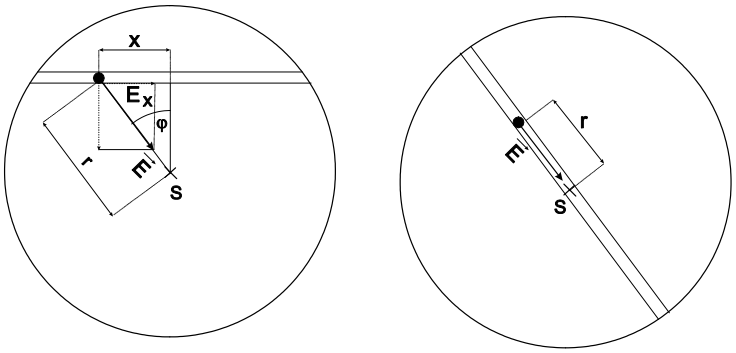
Tok teda závisí iba od celkovej hmotnosti pod integračnou plochou.

$\boxed{\text{Príklad 10}}$ Vypočítajte intenzitu gravitačného poľa vo vnútri Zeme. Predpokladajte, že jej hustota je konštantná. Do Zeme sme vyvŕtali dva tunely, jeden "vodorovný" a druhý prechádzajúci cez jej stred (obr. VIII.13). Pustili sme do nich telesá, ktoré začali vykonávať harmonický pohyb. Porovnajte ich periódy.

Riešenie: Pole je sféricky symetrické, preto množina bodov s rovnakou hodnotou intenzity bude mať tvar gúľových plôch. Vypočítajme tok cez takéto plochy a použime Gaussov zákon:

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_{guľa} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = -\varkappa 4\pi\rho \frac{4}{3}\pi r^3 \\ E 4\pi r^2 &= \varkappa 4\pi\rho \frac{4}{3}\pi r^3 \\ E &= \frac{4}{3}\varkappa\pi\rho r \end{aligned}$$

Intenzita gravitačného poľa vo vnútri Zeme sa mení so vzdialenosťou od jej stredu lineárne. Napíšme pohybovú rovnicu v smere osi x, najskôr pre guličku, ktorá sa nachádza vo "vodorovnom" tuneli:



obr. VIII.13

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -m\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho r \sin\varphi = -m\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho r\frac{x}{r} \\ \ddot{x} &= -\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho x \end{aligned}$$

čo zodpovedá harmonickému pohybu s uhlovou frekvenciou $\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho}$ a periódou:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho}}$$

Ak tunel bude prechádzať cez stred zeme, potom pohybová rovnica:

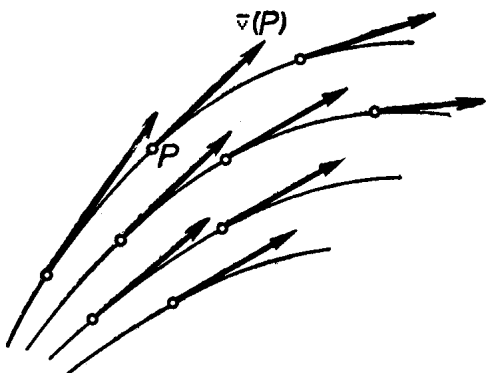
$$m\ddot{r} = -m\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho r$$

a pohyb bude opäť harmonický, s rovnakou periódou:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho}}$$

Perióda, ktorou teleso kmitá v tuneli, nezávisí od spôsobu jeho vyvŕtania. ♢

Podobne ako skalárne polia sme zobrazovali ekviskalárnymi plochami, grafické zobrazenie vektorových polí sa uskutočňuje pomocou tzv. čiar vektora (obr. VIII.14) .



obr. VIII.14

Vektor $\overrightarrow{v}$ má v každom bode vektorovej čiary smer dotyčnice, ktorá je súhlasne orientovaná s orientáciou vektora[13]. Je preto zrejmé, že pre rovnicu čiary platí[14]:

$$d\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \tag{8.41}$$

[13] Vo fyzike ste sa s nimi už stretli vo forme siločiar, magnetických indukčných čiar, prúdočiar a pod.

[14] Vektory $\overrightarrow{dr} \parallel \overrightarrow{v}$, kde $d\overrightarrow{r}$ je súčasťou čiary

Z čoho vyplýva:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{8.42}$$

$\boxed{\text{Príklad 11}}$ Nájdite tvar siločiary v elektrostatickom poli bodového náboja

Riešenie: Podľa (8.42) [15] $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. Riešením týchto diferenciálnych rovníc sú priamky prechádzajúce začiatkom.. ♢

$\boxed{\text{Príklad 12}}$ Odvoďte vzťah (8.42) na základe hydronynamickej analógie.

Riešenie: Vektorová čiara má v každom bode smer vektora rýchlostí: $\frac{dx}{dt} = v_x$, $\frac{dy}{dt} = v_y$, $\frac{dz}{dt} = v_z$.. Porovnaním dt dostaneme požadovanú rovnicu:

$$dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

♢

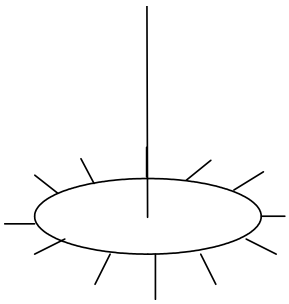
8.1.3 Rotácia vektorových polí

Cirkulácia vektora Pod cirkuláciou vektorového poľa $\vec{v}$ budeme rozumieť integrál po uzavretej krivke Γ

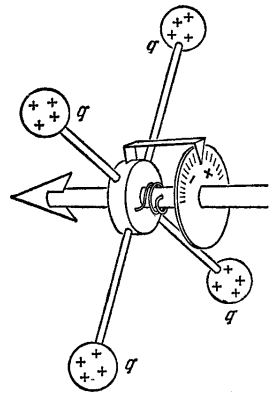
$$L = \oint_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{l} \tag{8.43}$$

Vektorový diferenciálny element $d\vec{l}$ má smer dotyčnice ku krivke. Jeho orientácia je daná dohodou o zmysle obchádzania krivky, napr. proti smeru hodinových ručičiek. Cirkulácia bude tým väčšia, čím sa orientácia vektora $\vec{v}$ bude viac blížiť k dotyčnici $d\vec{l}$. Na lepšie pochopenie fyzikálneho zmyslu cirkulácii využijeme opäť hydrodynamickú analógiu. Predstavme si, že integračnou krivkou je kružnica. Nech táto kružnica reprezentuje obvod kolesa (obr. VIII.15a), kroré má po obvode pripevnené lopatky a môže sa otáčať okolo svojej osi. (na meranie cirkulácie vektora intenzity elektrického poľa, by sme namiesto lopatiek použili malé nabité gule, obr. VIII.15b)

[15] Vektor intenzity elektrického poľa $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x, y, z)$



obr. VIII.15a

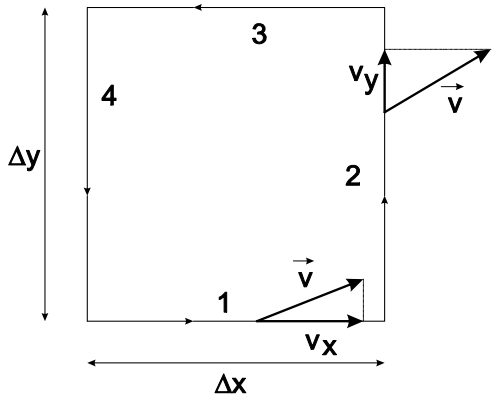


obr. VIII.15b

Koleso sa po vložení do kvapaliny bude otáčať tým rýchlejšie, čím bude cirkulácia L väčšia. Ak vektor rýchlosti kvapaliny je ľubovoľnom mieste konštantný, koleso sa neroztočí. Ak v kvapaline existuje vír, koleso sa môže otáčať s rôznou uhlovou rýchlosťou, v závisloti od natočenia jeho osi k osi víru. Na skúmanie prítomnosti víru v danom bode kvapaliny zavedieme veličinu-rotáciu :

$$rot\,\vec{v}\cdot\vec{n} = \lim_{\Gamma\to P_0}\frac{\oint_\Gamma \vec{v}d\vec{l}}{S_\Gamma} \tag{8.44}$$

kde P_0 je bod, okolo ktorého budeme uzatvárať krivku Γ. Polia, pre ktoré nadobudne $rot\,\vec{v}$ nenulovú hodnotu, nazveme *vírovými*, ostatné *nevírovými*. Počítať takéto limity je zdĺhavé a nepraktické, preto sa pokúsme určiť ju iným spôsobom. Zoberme elementárnu plôšku v tvare obdĺžnika so stranami Δx, Δy rovnobežnými s príslušnými kartézskymi osami (obr. VIII.16).



obr. VIII.16

Vektor $\vec{v}$ sa pozdĺž strán takmer nemení a preto ho možno reprezentovať hodnotou a smerom v ich strede. Príspevky k cirkulácii pozdĺž dvojice rovnobežných strán najskôr pravej a ľavej potom hornej a dolnej budú::

$$\left[v_y\left(x+\Delta x, y+\frac{\Delta y}{2}\right) - v_y\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta y = \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x\Delta y \tag{8.45}$$

$$\left[-v_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y+\Delta y\right) + v_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y\right)\right]\Delta x = -\frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta x\Delta y \tag{8.46}$$

a po ich sčítaní:

$$\oint_{\square} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \tag{8.47}$$

V zátvorke sa nachádza $z-$ová zložka vektora $\left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right)_z$, pričom súčin $\Delta x\, \Delta y = dS$. Zavedením jednotkového normálového vektora $\vec{n}$ na túto plochu, vzťah (8.47) zapíšeme v invariantnom vektorovom tvare[16]:

$$\oint_{\square} \vec{v} d\vec{l} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right)_z dS = \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \cdot \vec{n} dS \tag{8.48}$$

$$\lim_{\Gamma \to P_0} \frac{\oint_{\Gamma} \vec{v} d\vec{l}}{S_{\Gamma}} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \cdot \vec{n} \tag{8.49}$$

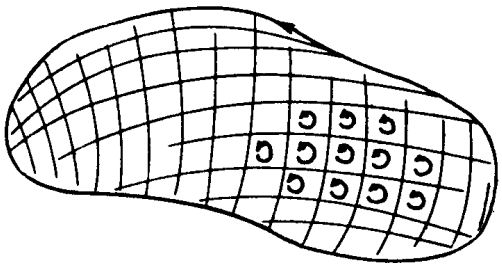
Vzájomným porovnaním (8.48) a (8.44) pre rotáciu platí::

$$rot\, \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \tag{8.50}$$

Posledný vzťah rozpíšme:

$$\begin{aligned} rot\, \vec{v} &= \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] - \vec{j} \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] + \vec{k} \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

Cirkuláciu po akejkoľvek uzavretej krivke možno uviesť do súvislosti s rotáciou vektorového poľa. Vnútro krivky vyplníme vhodnou plochou a celú ju pokryjeme infinitenzimálnymi obdĺžnikmi (obr. VIII.17).



obr. VIII.17

[16] V našom prípade $\vec{n} = \vec{k}$, kde $\vec{k}$ je bázový vektor v smere súradnice z.

Pri sčitovaní cirkulácií pozdĺž obvodov malých obdĺžnikov sa rušia príspevky na spoločných hraniciach (integrujeme dvakrát v opačných smeroch)[17]:

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{l} = \sum \oint_{\square} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{l} = \sum rot\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S}_i = \iint_{S_\Gamma} rot\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S} \tag{8.51}$$

Vzťah (8.51) sa nazýva *Stokesova veta*, ktorá umožňuje prevádzať krivkový integrál pozdĺž Γ na plošný integrál cez plochu, ohraničenú krivkou Γ. Takýchto plôch existuje nekonečne veľa.

Využitie Stokesovej vety: *1, Výpočet obsahov plôch.*

Predpokladajme, že máme vypočítať obsah plochy, ktorá je ohraničená uzavretou krivkou Γ, pričom celá leží v rovine xy. Plošné elementy majú iba z-ovú zložku: $d\overrightarrow{S} = (0, 0, dS) = (0, 0, dxdy)$ a podľa (8.51):

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{l} = \iint_{S_\Gamma} rot\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{S_\Gamma} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dxdy \tag{8.52}$$

Pri vhodnej voľbe vektorovej funkcie $\overrightarrow{v}$, možno z integrantu na pravej strane rovnice (8.52) vytvoriť konštantu a celý integrál previesť na výpočet plochy. Nech $\overrightarrow{v} = (-y, x, 0)$, potom dosadením do (8.51):

$$\oint_{\Gamma} (-ydx + xdy) = 2 \iint_{S_\Gamma} dxdy \tag{8.53}$$

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (-ydx + xdy) \tag{8.54}$$

$\boxed{\text{Príklad 13}}$ Vypočítajte obsah plochy ohraničenej elipsou.

Riešenie: Elipsu parametrizujme podľa t:

$$x = a\cos t \qquad dx = -a\sin t\, dt \tag{8.55}$$

$$y = b\sin t \qquad dy = b\cos t\, dt \tag{8.56}$$

[17] Cirkulácia po Γ_1 /obr/ je súčtom integrálov po Γ_a a Γ_{ab}. Podobne ako cirkulácia po Γ_2. Integrál po Γ_{ab} bude mať v prípade krivky Γ_1 opačné znamienko ako v prípade Γ_2, pretože smer obehu bude opačný:

$$\int_{\Gamma_a} \overrightarrow{v} d\overrightarrow{l} + \int_{\Gamma_{ab}} \overrightarrow{v} d\overrightarrow{l} + \int_{\Gamma_{ba}} \overrightarrow{v} d\overrightarrow{l} + \int_{\Gamma_b} \overrightarrow{v} d\overrightarrow{l} = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{v} d\overrightarrow{l}$$

Po dosadení do (8.54) dostávame:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(ab\sin^2 t + ab\cos^2 t\right) dt = \pi ab$$

$\diamondsuit$

2, testovanie konzervatívnosti vektorových polí

Pole je konzervatívne, keď práca po ľubovoľnej uzavretej krivke je nulová $\oint_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = 0$. Vyjadrením sily podľa rovnice (8.18) a aplikovaním Stokesovej vety:

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \oint_\Gamma rot\vec{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \oint_{S_\Gamma} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot d\overrightarrow{S} = 0$$

Keďže uvedený integrál musí byť nulový po akejkoľvek ploche, ktorej kontúrom je Γ potom nutnou a postačujúcou podmienkou konzervatívnych polí je:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = rot\vec{F} \equiv \vec{0} \tag{8.57}$$

$\boxed{\text{Príklad 14}}$ Dokážte, že každé sféricky-symetrické centrálne pole je konzervatívne.

Riešenie: Sféricky symetrické centrálne polia sa vyznačujú tým, že sila má rovnaký smer ako polohový vektor a teda platí:

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{r}$$

kde $f(r)$ je funkcia závislá od veľkosti polohového vektora. Keďže

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\theta x} & \frac{\partial}{\theta y} & \frac{\partial}{\theta z} \\ f(r)\,x & f(r)\,y & f(r)\,z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{y}{r}z - \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{z}{r}y\right) + \vec{j}0 + \vec{k}0 = \vec{0} \tag{8.58}$$

pole je konzervatívne. $\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 15}}$ Pomocou Gaussovej a Stokesovej vety dokážte tieto identity: $rot\, grad\, U \equiv \vec{0}$, $div\, rot\, \overrightarrow{F} = 0$

Riešenie: Každé konzervatívnemu poľu dokážeme priradiť potenciálnu energiu U, pričom $\vec{F} = -grad\, U$. Dosadením do (8.57) dostávame prvú identitu:

$$rot \vec{F} = -rot\, grad\, U \equiv \vec{0}$$

Druhú identitu dokážeme zo Stokesovej vety.

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \int_{S_\Gamma} rot \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S}$$

Krivka Γ sa postupným uzatváraním scvrkne na bod a plocha S_Γ sa stane uzavretou. Krivkový integrál po Γsa blíži k nule. Podľa Gausovej vety ďalej platí:

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \int_{S_\Gamma} rot \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \int_{V_S} \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} \right) dV = 0$$

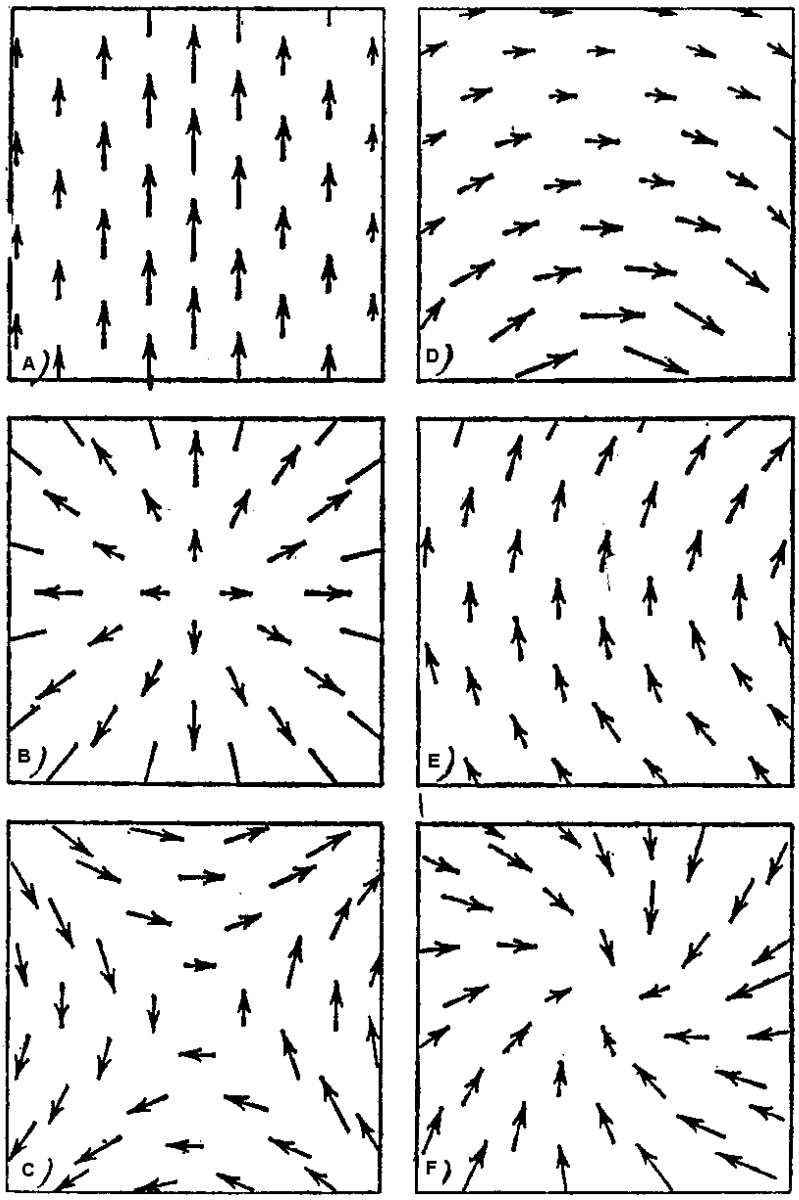
Rovnosť je splnená pre akýkoľvek objem, ktorý prechádza bodom a preto:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \overrightarrow{F} \right) = 0 \tag{8.59}$$

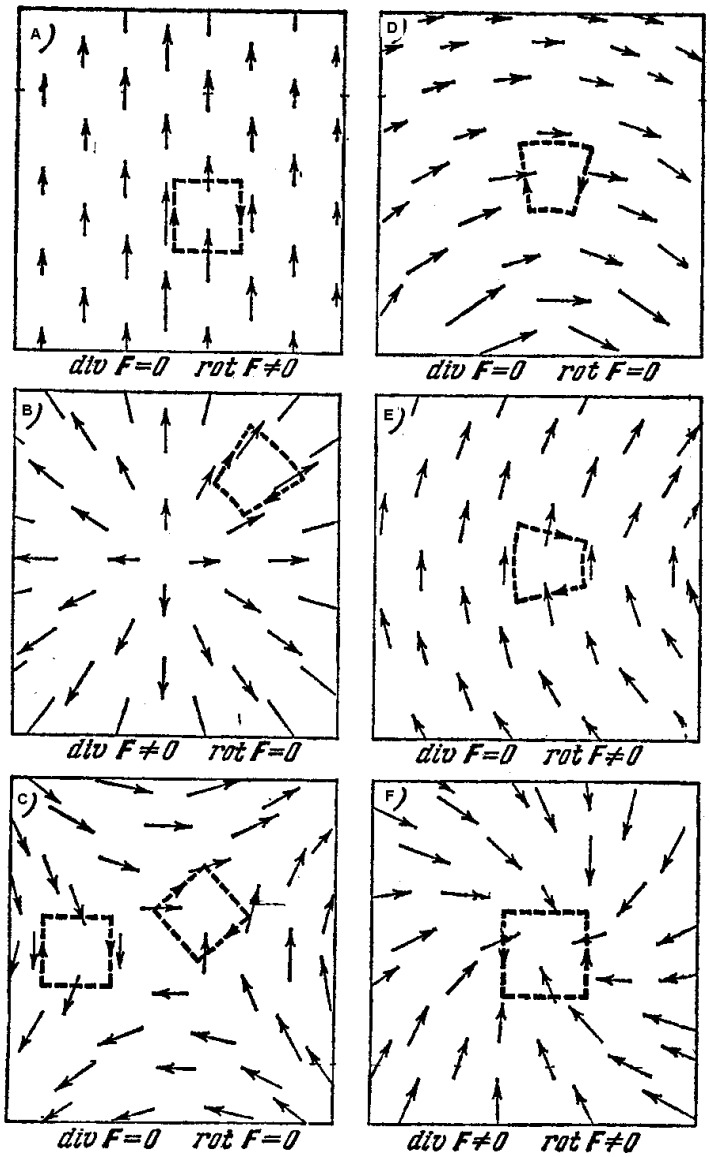
teda $div\, rot \overrightarrow{F} = 0$. ♢

$\boxed{\text{Príklad 16}}$ Divergencia štyroch zo znázornených vektorových polí na obr. 8.1 je rovná nule. Pokúste sa určiť charakteristiky poľa $\vec{F}$: $rot\, \vec{F}$ a $div\, \vec{F}$

Riešenie: Riešenie je znázornené na obr. 8.2. **a,** Ak sa pohybujeme v smere vektora $\vec{F}$, vektor zostáva konštantný $\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \vec{0}$, $F_x = 0 \Longrightarrow div\, \vec{F} = 0$. Ak určíme cirkuláciu napr. pozdĺž slučky znázornenej na obrázku zistíme, že $rot\, \vec{F} \neq \vec{0}$. **b,** Ide o centrálne pole, vektor $\vec{F}$ je radiálny a jeho veľkosť závisí len od vzdialenosti r. Podľa (8.58) $rot\, \vec{F} = \vec{0}$. Jeho divergencia nemôže byť nulová, pretože v strede obrázka sa nachádza zdroj. **c,** Z obrázku sa nedá jednoznačne určiť charakter poľa, ale je možné, že $rot\, \vec{F} = \vec{0}$ a $div\, \vec{F} = 0$. **d,** Nevidno žiadne žriedlo poľa $\Longrightarrow$ $div\, \vec{F} = 0$. Ide zrejme o pole, ktorého veľkosť vektora $\vec{F}$ klesá so vzdialenosťou $F \sim \frac{1}{r} \Rightarrow rot\, \vec{F} = \vec{0}$. **e,** nevidno žiadne žriedlo $\Longrightarrow div\, \vec{F} = 0$, je však očividné že cirkulácia vektora $\vec{F}$ cez znázornenú slučku je nenulová $\Rightarrow rot\, \vec{F} \neq \vec{0}$. **f,** v strede je žriedlo $\Longrightarrow div\, \vec{F} \neq 0$, na prvý pohľad je zrejmé že $rot\, \vec{F} \neq \vec{0}$ (všimnime si cirkuláciu cez vyznačenú slučku). ♢



Obrázok 8.1:


A)
div F=0 rot F≠0
D)
div F=0 rot F=0
B)
div F≠0 rot F=0
E)
div F=0 rot F≠0
C)
div F=0 rot F=0
F)
div F≠0 rot F≠0

Obrázok 8.2:

8.1.4 Divergencie a rotácie v sférických a cylindrických sústavách.

Vo fyzike sa častokrát potrebujem vyjadriť divergencie a rotácie vektorových polí v iných súradnicových systémoch ako sú kartézske. Vyjadrime preto nabla operátor $\vec{\nabla}$ a vektor $\vec{a}$ v cylindrickom súradnicovom systéme (8.25):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\\ \vec{a} &= a_r\vec{e}_r+a_\varphi\vec{e}_\varphi+a_z\vec{e}_z\end{aligned}$$

Dosadením do (8.35) odvodíme vzťah vzťah pre divergenciu:

$$\begin{aligned}div\vec{a} &= \vec{\nabla}\cdot\vec{a}=\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r+a_\varphi\vec{e}_\varphi+a_z\vec{e}_z)=\\ &\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r)+\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_\varphi\vec{e}_\varphi)+\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_z\vec{e}_z)+\\ &+\left(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r)+\left(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot(a_\varphi\vec{e}_\varphi)+\left(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot(a_z\vec{e}_z)+\\ &+\left(\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r)+\left(\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_\varphi\vec{e}_\varphi)+\left(\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_z\vec{e}_z)\end{aligned}\tag{8.60}$$

Prehľad parciálnych derivácii bázových vektorov:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j}\\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j}\\ \vec{e}_z &= \vec{k}\end{aligned}$$

je uvedený v nasledovnej tabuľke:

	$\vec{e}_r$	$\vec{e}_\varphi$	$\vec{e}_z$
$\frac{\partial}{\partial r}$	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial\varphi}$	$\vec{e}_\varphi$	$-\vec{e}_r$	0
$\frac{\partial}{\partial z}$	0	0	0

Pomocou nej vypočítame jednotlivé členy rovnice (8.60)[18]:

	$a_r\vec{e}_r$	$a_\varphi\vec{e}_\varphi$	$a_z\vec{e}_z$
$\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{\partial a_r}{\partial r}$	0	0
$\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$	$\frac{a_r}{r}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$	0
$\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$	0	0	$\frac{\partial a_z}{\partial z}$

[18]Napr. $\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r)=\vec{e}_r\cdot\frac{\partial}{\partial r}(a_r\vec{e}_r)=\left(\frac{\partial}{\partial r}a_r\right)[\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r]+a_r\left[\vec{e}_r\cdot\left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r\right)\right]=\frac{\partial a_r}{\partial r}$

z čoho pre divergenciu vektora $\vec{a}$ v cylindrických súradniciach dostaneme:

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_r) + \frac{1}{r}\frac{a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

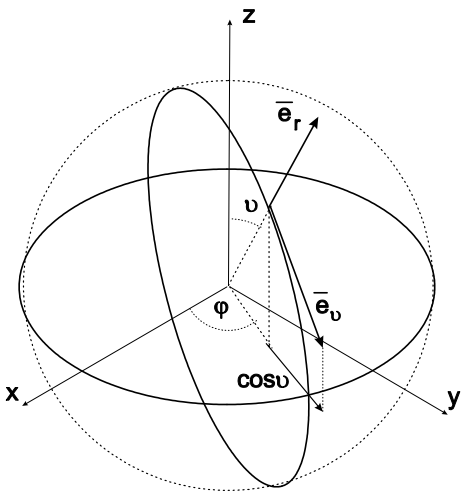
Analogicky postupujeme aj v sférickom súradnicovom systéme:

$$\begin{aligned} div\vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2}{r}a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}a_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 a_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta a_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned} \tag{8.61}$$

Skalárne vynásobime $\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ s vektorom $\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\vartheta\vec{e}_\vartheta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$:

$$\begin{aligned} div\vec{a} &= \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot a_r\vec{e}_r + a_\vartheta\vec{e}_\vartheta + a_\varphi\vec{e}_\varphi = \\ &= \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r) + \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_\vartheta\vec{e}_\vartheta) + \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_\varphi\vec{e}_\varphi) + \\ &+ \left(\vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r) + \left(\vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)\cdot(a_\vartheta\vec{e}_\vartheta) + \left(\vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)\cdot(a_\varphi\vec{e}_\varphi) \\ &+ \left(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r) + \left(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot(a_\vartheta\vec{e}_\vartheta) + \\ &+ \left(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot(a_\varphi\vec{e}_\varphi) \end{aligned} \tag{8.62}$$

Z obrázka VIII.18 sme vyjadrili bázové vektory:



obr. VIII.18

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\vartheta\cos\varphi\vec{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\vec{j} + \cos\vartheta\vec{k} \\ \vec{e}_\vartheta &= \cos\vartheta\cos\varphi\vec{i} + \cos\vartheta\sin\varphi\vec{j} - \sin\vartheta\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi &= \sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \end{aligned}$$

ktoré parciálne zderivujeme:

	$\vec{e}_r$	$\vec{e}_\vartheta$	$\vec{e}_\varphi$
$\frac{\partial}{\partial r}$	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial \vartheta}$	$\vec{e}_\vartheta$	-$\vec{e}_r$	0
$\frac{\partial}{\partial \varphi}$	$\sin\vartheta\vec{e}_\varphi$	$-\cos\vartheta\vec{e}_\varphi$	$-\sin\vartheta\vec{e}_r - \cos\vartheta\vec{e}_\varphi$

	$a_r\vec{e}_r$	$a_\varphi\vec{e}_\varphi$	$a_z\vec{e}_z$
$\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{\partial a_r}{\partial r}$	0	0
$\vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$	$\frac{a_r}{r}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial a_\vartheta}{\partial\frac{a_r}{r}}$	0
$\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$	$\frac{a_r}{r}$	$\frac{\cos\vartheta}{r\sin\frac{a_r}{r}}a_\vartheta$	$\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$

a dosadili.

Po nahradení skalárneho súčinu v (8.35) vypočítame rotáciu. V cylindrickej súradnicovej sústave zrejme platí:

$$\begin{aligned} rot\vec{a} &= \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z) = \\ &= \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\times(a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z) + \\ &\quad +\vec{e}_\varphi\times\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z) \\ &\quad +\vec{e}_z\times\frac{\partial}{\partial z}(a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z) \end{aligned}$$

Využitím vlastností vektorového súčinu a horeuvedených prehľadných tabuliek:

$$rot\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}a_\varphi\right)\vec{e}_z$$

Podobne vo sférických súradniciach[19] pre rotáciu platí:

$$\begin{aligned} rot\vec{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{a_\varphi}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_\vartheta}{\partial\varphi} + \frac{\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}a_\varphi\right)\vec{e}_r + \\ &\quad + \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}a_\varphi\right)\vec{e}_\vartheta + \\ &\quad + \left(\frac{\partial a_\vartheta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}a_\vartheta\right)\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

[19] Doporučujeme čitateľovi toto tvrdenie dokázať.

8.2 Cvičenia

$\boxed{8.1^*}$ Určte divergenciu a rotáciu nasledovných vektorových polí. Ak je pole konzervatívne, nájdite jeho potenciál: $\vec{F} = (x + y, -x + y, -2z)$, $\vec{E} = (2y, 2x + 3z, 3y)$.

Riešenie: 0; $\vec{0}$, $U = -2xy - 3zy - konšt$

$\boxed{8.2.}$ Majme silové polia s nasledovnými potenciálmi: $r, \frac{1}{r^3}, \vec{c} \cdot \vec{r}, \frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^2}, \frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}$, kde $\vec{c}$ je konštantný vektor. Nájdite sily, ktoré v nich pôsobia!

Riešenie: $-\frac{\vec{r}}{r}, -\frac{3r}{r^5}, -\vec{c}, -\frac{r^2\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{r})2r}{r^4}, -\frac{r^2\vec{c}-3(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}$

$\boxed{8.3.}$ Určte divergenciu nasledovných polí: $\vec{r}, \frac{\vec{r}}{r^3}, \frac{\vec{c}}{r}$

Riešenie: $3, 0, -\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}$

$\boxed{8.4^*}$ Potenciálna energia častice má tvar $U = \frac{\alpha}{r}; \frac{1}{2}kr^2$, kde r je veľkosť polohového vektora. Nájdite silu, ktorá pôsobí na časticu a vypočítajte prácu, ktorú vykoná pri premiestnení telesa z bodu $(1, 2, 3)$ do bodu $(2, 2, 3)$.

Riešenie: a, $\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, $A = 0.82\alpha$ b, $\vec{F} = -k\vec{r}$, $A = -1.5k$

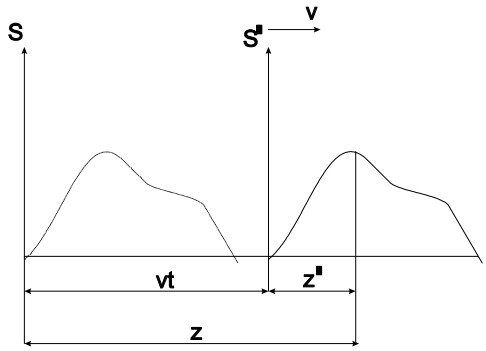
$\boxed{8.5^*}$ Teleso sa kĺze z výšky h z podložky tvaru $y = \sqrt{x}$. V ktorom bode sa odtrhne od podložky?

Kapitola 9

Vlnová rovnica

9.1 Odvodenie vlnovej rovnice

Podobne ako rôzne typy kmitov možno popísať určitou diferenciálnou rovnicou, aj rôzne typy vlnenia majú spoločnú matematickú interpretáciu. Obmedzme sa na prípad, že vlna počas šírenia v priestore nemení svoj tvar.



obr. IX.1

Nech funkcia $f(z)$ reprezentuje vzniknutý rozruch, šíriaci sa v priestore rýchlosťou v. Zaveďme pomocný súradnicový systém S' postupujúci spolu s impulzom (obr. IX.1), v ktorom sa výchylka ψ s časom nemení[1]:

$$\psi\left(z,t\right)=\psi\left(z'\right)=f(z')=f(z-vt) \tag{9.1}$$

Pokúsme sa nájsť diferenciálnu rovnicu vlny, ktorej riešením je (9.1). Za týmto účelom vypočítame parciálne derivácie $\psi\left(z,t\right)$:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z'} \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial t}=-v\frac{\partial f}{\partial z'} \tag{9.3}$$

[1] $z'=z-vt$

Porovnaním oboch rovníc (9.2), (9.3) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -v\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

Pretože na jednoznačné popísanie vlnenia potrebujeme dve konštanty, treba uvažovať s rovnicou druhého rádu. Pomocou rovnice (9.2) a (9.3) vyjadríme aj druhé derivácie:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} \tag{9.4}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} \tag{9.5}$$

Z čoho:

$$v^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{9.6}$$

Táto rovnica sa nazýva vlnová.

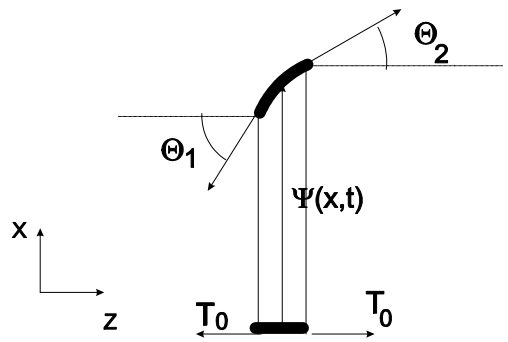
9.2 Použitie vlnovej rovnice

V nasledovných príkladoch si ukážeme, ako možno využiť vlnovú rovnicu, na výpočet rýchlosi šírenia rozruchov v rôznych prostrediach.

9.2.1 Vlna v strune

Predpokladajme, že homogénna struna s dĺžkovou hustotou ρ je upevnená na svojich koncoch a môže sa vychyľovať v smere kolmom na os z. Nech deformácie struny sú tak malé, že druhé mocniny uhlov, ktoré zviera dotyčnice k strune s osou z možno zanedbať: $\Theta^2 \approx \tan^2\Theta \approx 0$. Za tohto predpokladu sa pri priečnom vychýlení elementu Δz jeho dĺžka nezmení (obr. IX.2):

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2} = \Delta z\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2} \approx \Delta z\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2\right] \approx \Delta z \tag{9.7}$$



obr. IX.2

Napätie v strune si potom zachováva rovnakú hodnotu T_0 ako v počiatočnej polohe.. Na ľavý koniec segmentu pôsobí v zápornom smere osi x sila $T_0 \tan \Theta_1$, na pravý v kladnom smere sila $T_0 \tan \Theta_2$. Pre výslednicu platí:

$$F_x(t) = T_0 \tan \Theta_2 - T_0 \tan \Theta_1 \tag{9.8}$$

Využime geometrický význam derivácie v Taylorovom rozvoji[2]:

$$F_x(t) = T_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_2 - T_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_1 = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \tag{9.9}$$

Podľa Newtonovho zákona

$$F_x(t) = \Delta m \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \rho \Delta z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{9.10}$$

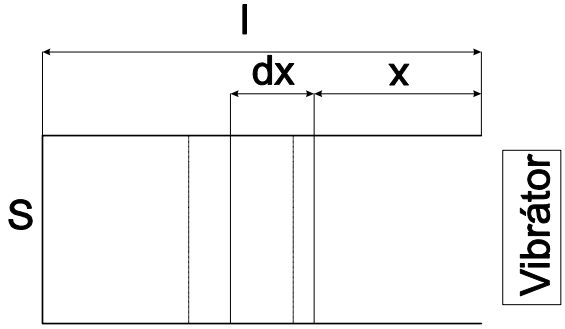
Porovnaním (9.9) a (9.10) dostaneme vlnovú rovnicu (9.6):

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \tag{9.11}$$

z ktorej určíme fázovú rýchlosť: $v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$

9.2.2 Zvuková vlna

Valec s dĺžkou l je na jednom konci uzavretý a naplnený plynom s hustotou ρ. Na druhom konci vibrátorom vyvolajme rozruch, ktorý sa začne širiť v plyne rýchlosťou v (obr. IX.3)



obr. IX.3

[2]Podľa Taylorovho rozvoju

$$f(z_2) = f(z_1) + (z_2 - z_1) \left(\frac{df}{dz}\right)_1 + ...$$

Ak dosadíme za funkciu $f(z) = \frac{\partial \Psi(z,t)}{\partial z}$ potom

$$\left(\frac{\partial \Psi(z,t)}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial \Psi(z,t)}{\partial z}\right)_1 = \Delta z \frac{\partial^2 \Psi(z,t)}{\partial z^2}$$

Vyšetrujme vrstvu vzduchu ohraničenú rezmi vo vzdialenosti x a $x + dx$, ktorých výchylka z rovnovážnej polohy bude $u(x)$ a $u(x + dx)$. Pokojový objem plynu medzi príslušnými priečnymi rezmi bol $V_0 = Sdx$ a dôsledkom šírenia rozruchu sa zmenil:

$$V = S\left[dx + u(x + dx) - u(x)\right] = S(1 + \frac{\partial u}{\partial x})dx = V_0(1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \tag{9.12}$$

Príslušné zmeny tlaku a objemu sú dostatočné rýchle, nestačí dôjsť k tepelnej výmene a preto tento dej možno považovať za adiabatický:

$$p = \frac{p_0 V_0^{\chi}}{V^{\chi}} = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\chi}} \sim p_0 \left(1 - \chi \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{9.13}$$

Pri aproximácii sme zanedbali malé veličiny vyššieho rádu. Vyjadrime silu, ktorá pôsobí na daný segment:

$$dF = S(-p_{x+dx} + p_x) = -S\frac{\partial p}{\partial x}dx = S\chi p_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \tag{9.14}$$

Podľa Newtonovho zákona:

$$dF = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Porovnaním oboch vzťahov dostaneme vlnovú rovnicu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \chi \frac{p_0}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

z ktorejurčíme rýchlosť šírenia zvuku v plyne:

$$v = \sqrt{\chi \frac{p_0}{\rho}} \tag{9.15}$$

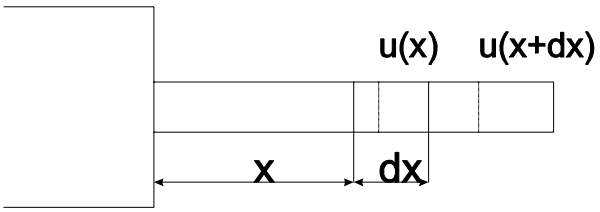
Použime rovnicu ideálneho plynu $\frac{p_0}{\rho} = \frac{RT}{M}$, kde M je jeho mólová hmotnosť, ρ hustota a T termodynamická teplota.a dosaďme ju do (9.15)

$$v = \sqrt{\chi \frac{RT}{M}}$$

Rýchlosť zvuku nezávisí od tlaku, ale od teploty a rádovo je zhodná s rýchlosťou tepelného pohybu molekúl: $v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$

9.2.3 Vlna v pružnej tyči

Úderom kladiva vyvolajme v tyči rozruch, ktorý sa začne širiť rýchlosťou v. Napíšme pohybovú rovnicu pre infinitenzimálny element dx, ohraničený priečnymi rezmi vo vzdialenosti x a $x + dx$



obr. IX.4

Relatívne predĺženie tyče medzi oboma rezmi udáva vzťah[3]:

$$\varepsilon = \frac{u(x+dx) - u(x)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{9.16}$$

Podľa Hookovho zákona ďalej platí:

$$\sigma = \epsilon E = \frac{\partial u}{\partial x} E \tag{9.17}$$

kde σ je normálové napätie vyvolané pozdĺžnou deformáciou a E je modul pružnosti. Na časť tyče medzi jej priečnymi rezmi pôsobí sila:

$$dF = F_{x+dx} - F_x = S(\sigma_{x+dx} - \sigma_x) = SE\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = SE\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}dx \tag{9.18}$$

Podľa Newtonovho zákona:

$$dF = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dm = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho S dx \tag{9.19}$$

Porovnaním (9.18) a (9.19) dostaneme vlnovú rovnicu (9.6):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.20}$$

z ktorej určíme rýchlosť šírenia vlny: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

[3] $u(x)$ a $u(x + dx)$ sú výchylky rezov x a $x + dx$

9.3 Metóda separácie premenných.

Predpokladajme, že chceme riešiť vlnovú rovnicu (9.6), s homogénnymi okrajovými podmienkami:

$$\Psi(0,t) = 0 \tag{9.21}$$
$$\Psi(l,t) = 0 \tag{9.22}$$

Riešenie budeme hľadať v tvare

$$\Psi(x,t) = X(x)T(t) \tag{9.23}$$

kde $X(x)$ je funkcia závislá iba od premennej x a $T(t)$ je premenná závislá iba od času t. Dosadením do (9.6) a jednoduchou úpravou dostaneme:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \tag{9.24}$$

Rovnica (9.24) musí byť splnená pre všetky hodnoty x a t, ktoré sú navzájom nezávislé. Zmeníme napríklad pri nejakej pevne zvolenej hodnote x hodnotu t (alebo naopak), pravá a ľavá strana rovnice pri zmene svojich argumentov musí zachovať konštantnú hodnotu:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\lambda \tag{9.25}$$

kde λ je konštanta, ktorá môže mať ľubovoľné znamienko. Zo vzťahu (9.25) získame obyčajné diferenciálne rovnice pre určenie $X(x)$, $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{9.26}$$
$$\ddot{T}(t) + v^2\lambda T(t) = 0 \tag{9.27}$$

Z okrajových podmienok, ktoré musia byť splnené pre ľubovoľný čas t ::

$$\Psi(0,t) = X(0)T(t) = 0 \tag{9.28}$$
$$\Psi(l,t) = X(l)T(t) = 0 \tag{9.29}$$

určíme doplňujúce podmienky

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{9.30}$$

pretože voľbou $T(t) = 0$ by sme získali triviálne riešenie $u(x,t) = 0$, ktoré nás z fyzikálneho hľadiska nezaujíma. Začnime riešiť (9.26) s podmienkami (9.30), pričom zvážime rôzne znamienka λ.

- $\lambda < 0$

  Všeobecné riešenie rovnice má tvar:

$$X(x) = C_1 \exp(-\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \exp(\sqrt{-\lambda}x) \tag{9.31}$$

  Z okrajových podmienok vyplýva:

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ x(l) &= C_1 \exp(-\sqrt{-\lambda}l) + c_2 \exp(\sqrt{-\lambda}l) \end{aligned}$$

  t.j.

$$C_1 = -C_2 \quad a \quad C_1 \left[\exp(\sqrt{-\lambda}l) - \exp(-\sqrt{-\lambda}l)\right] = 0$$

  Keďže $\left[\exp(\sqrt{-\lambda}l) - \exp(-\sqrt{-\lambda}l)\right] \neq 0$ dostaneme triviálne riešenie ($C_1 = C_2$):

$$X(x) = 0 \Longrightarrow \Psi(x,t) = X(x)T(t) = 0$$

- $\lambda = 0$

  Všeobecné riešenie má tvar: $X(x) = ax+b$. Po zakomponovaní okrajových podmienok:

$$\begin{aligned} X(0) &= [ax+b]_{x=0} = b = 0 \\ X(l) &= al = 0 \end{aligned}$$

  $a = 0$ aj $b = 0$ a teda $X(x) = 0$, čo vedie opäť k triviálnemu riešeniu $X(x) = 0$

- $\lambda > 0$

  Všeobecné riešenie môžeme zapísať v tvare:

$$X(x) = D_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + D_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{9.32}$$

  Okrajové podmienky dávajú:

$$\begin{aligned} X(0) &= D_1 = 0 \\ X(l) &= D_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0 \end{aligned}$$

  Ak $X(x)$ nemá viesť opäť k triviálnemu riešeniu, potom $D_2 \neq 0$ a

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0$$

To znamená, že iba pre hodnoty

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tag{9.33}$$

existuje netriviálne riešenie:

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$$

kde n je ľubovolné celé číslo. Týmto hodnotám zodpovedá riešenie rovnice (9.27):

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n}{l}vt + B_n \sin\frac{\pi n}{l}vt$$

Dospeli sme k záveru, že netriviálne riešenie vlnovej rovnice (9.6) s okrajovými podmienkami (9.21), (9.22) treba hľadať v tvare[4]:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}vt + B_n \sin\frac{\pi n}{l}vt\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{9.34}$$

Neznáme konštnty A_n, B_n nájdeme z počiatočných podmienok.

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ V čase $t = 0$ zdeformujeme strunu, ktorá je upevnená v bode $x = 0$, $x = l$ tak, že jej tvar možno popísať funkciou $f(x) = 1$. Nájdite tvar tejto struny v čase t.

Riešenie: Pohybový stav ľubovolného segmentu struny možno popísať rovnicou (9.11). Struna je na krajoch pripevnená, musí spĺňať okrajové podmienky (9.21), (9.22), ktoré vedú k netriviálnemu riešeniu (9.34):

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}vt + B_n \sin\frac{\pi n}{l}vt\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

V čase $t = 0$ bola výchylka struny popísaná funkciou $\Psi(x,0) = f(x)$ a keďže nemala žiadnu počiatočnú rýchlosť $\dot{\Psi}(x,0) = 0$:

$$\Psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x = f(x) \tag{9.35}$$

$$\dot{\Psi}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n}{l} v \sin\frac{\pi n}{l}x = 0 \tag{9.36}$$

[4]Vlnová rovnica je lineárna a pre jej riešenia platí princíp superpozície.

Z rovnice (9.36) vyplýva, že všetky koeficienty B_n sú nulové $B_n = 0$ a koeficienty A_n treba určiť z (9.35). Táto rovnica má definičný obor viazaný na interval $x \in < 0, l >$, ale svojim tvarom pripomína Fourierov rozvoj nepárnej funkcie [5] s vlnovou dĺžkou $\lambda_0 = 2l$. Zadefinujme preto nepárnu periodickú funkciu $\xi(x)$ s takouto vlnovou dĺžkou ($\lambda_0 = 2l$), aby v intervale $x \in < 0, l >$ bola totožná $\xi(x) = f(x)$, a v intervale $x \in < -l, 0 >$ bola nepárna $\xi(x) = -f(-x)$. S rozvojom tejto funkcie sme sa už stretli na v kapitole III.:

$$\begin{aligned}\xi(x) &= \frac{4}{\pi}\left(\sin kx + \frac{1}{3}\sin 3kx + \frac{1}{5}\sin 5kx + ...\right) = \\ &\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{l}x + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi}{l}x + \frac{1}{5}\sin 5\frac{\pi}{l}x + ...\right)\end{aligned}$$

Keďže obe funkcie $f(x)$ a $\xi(x)$ sú na intervale $x \in < 0, l >$ identické, je zrejmé že :$A_n = \frac{4}{\pi n}$ a

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}vt \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x\right] \qquad \diamondsuit$$

9.4 Cvičenie

$\boxed{9.1^*}$ Valec s dĺžkou l je uzavretý na jednom konci a naplnený plynom s hustotou ρ. Na druhom konci vyvolajme vibrátorom rozruch, ktorý sa začne širiť v plyne rýchlosťou v. Určte túto rýchlosť za predpokladu, že príslušne zmeny objemu a tlaku v plyne sú izotermické.

$\boxed{9.2^*}$ V čase $t = 0$ zdeformujeme strunu, ktorá je upevnená v bode $x = 0$, $x = l$ tak, že jej tvar možno popísať funkciou $f(x) = Ax$, $A \ll 1$. Nájdite tvar tejto struny v čase t.

[5] Overte $\Psi(x) = -\Psi(-x)$