Derivácie

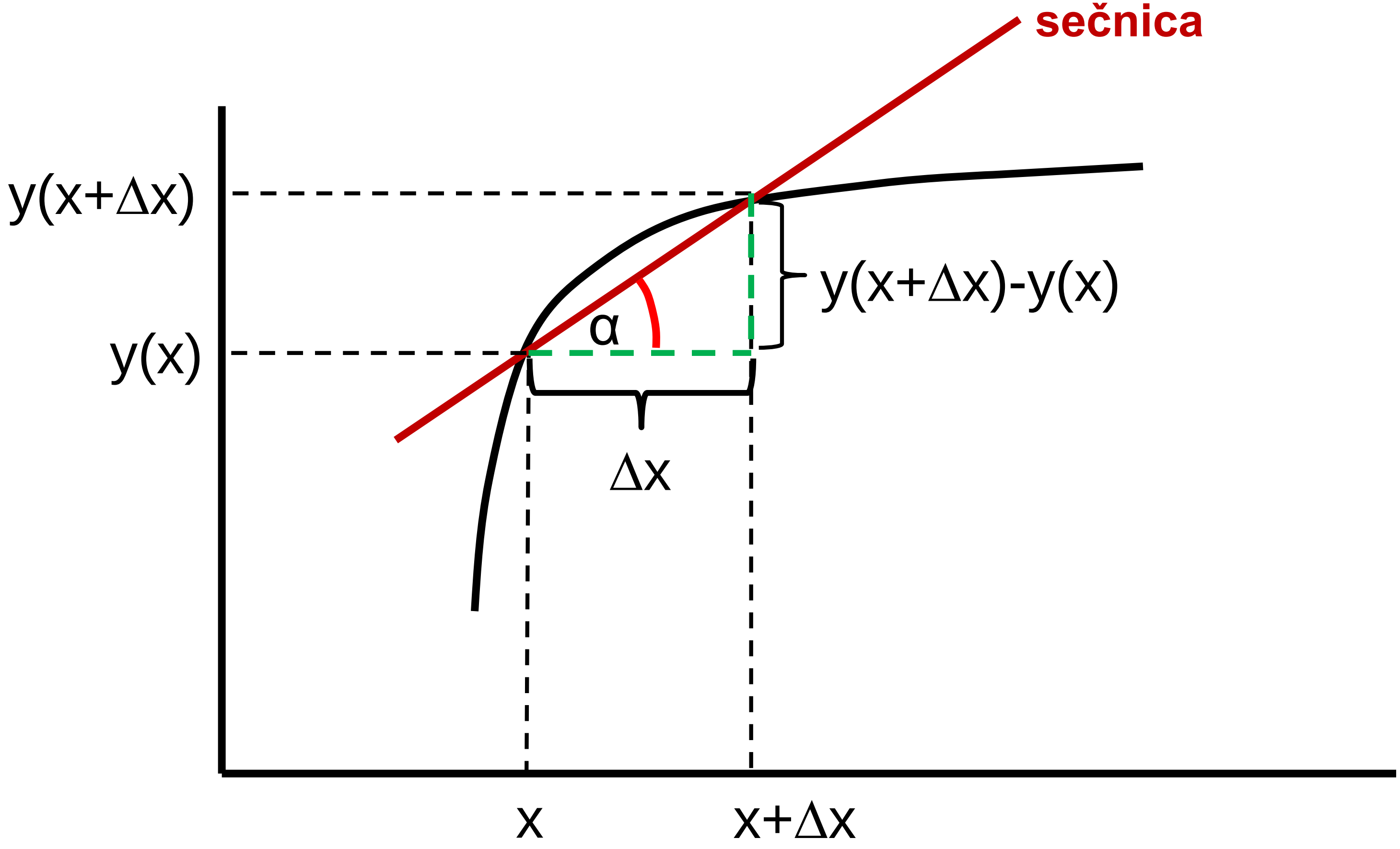
Matematický a fyzikálny význam

Derivácia

Podieľ dvoch malých veličín

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\overbrace{\boxed{\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}}}^{\textbf{Rýchlosť zmeny funkcie}}$$

Čo vyjadruje tento člen geometricky ????



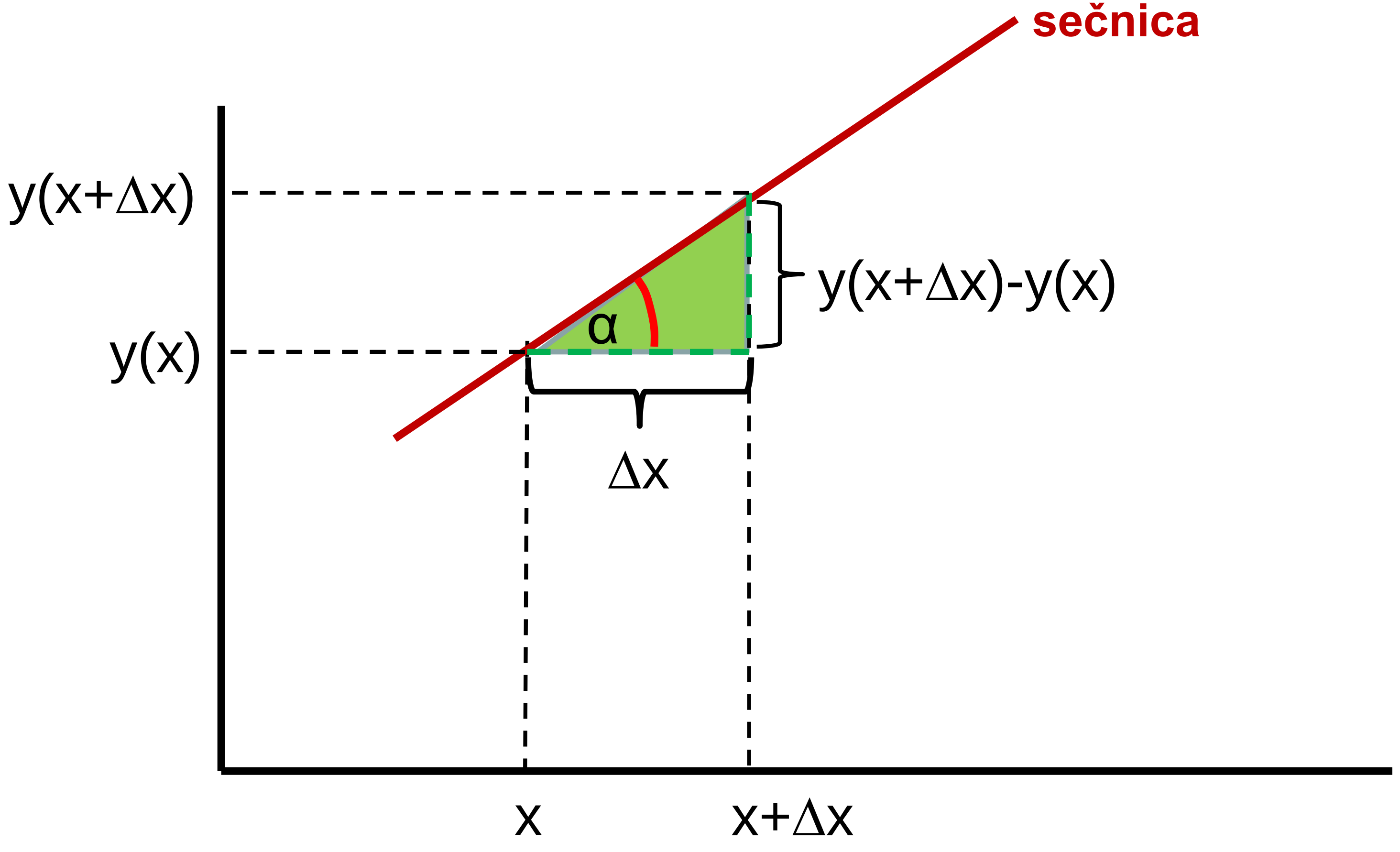
Derivácia

Podiel dvoch malých veličín

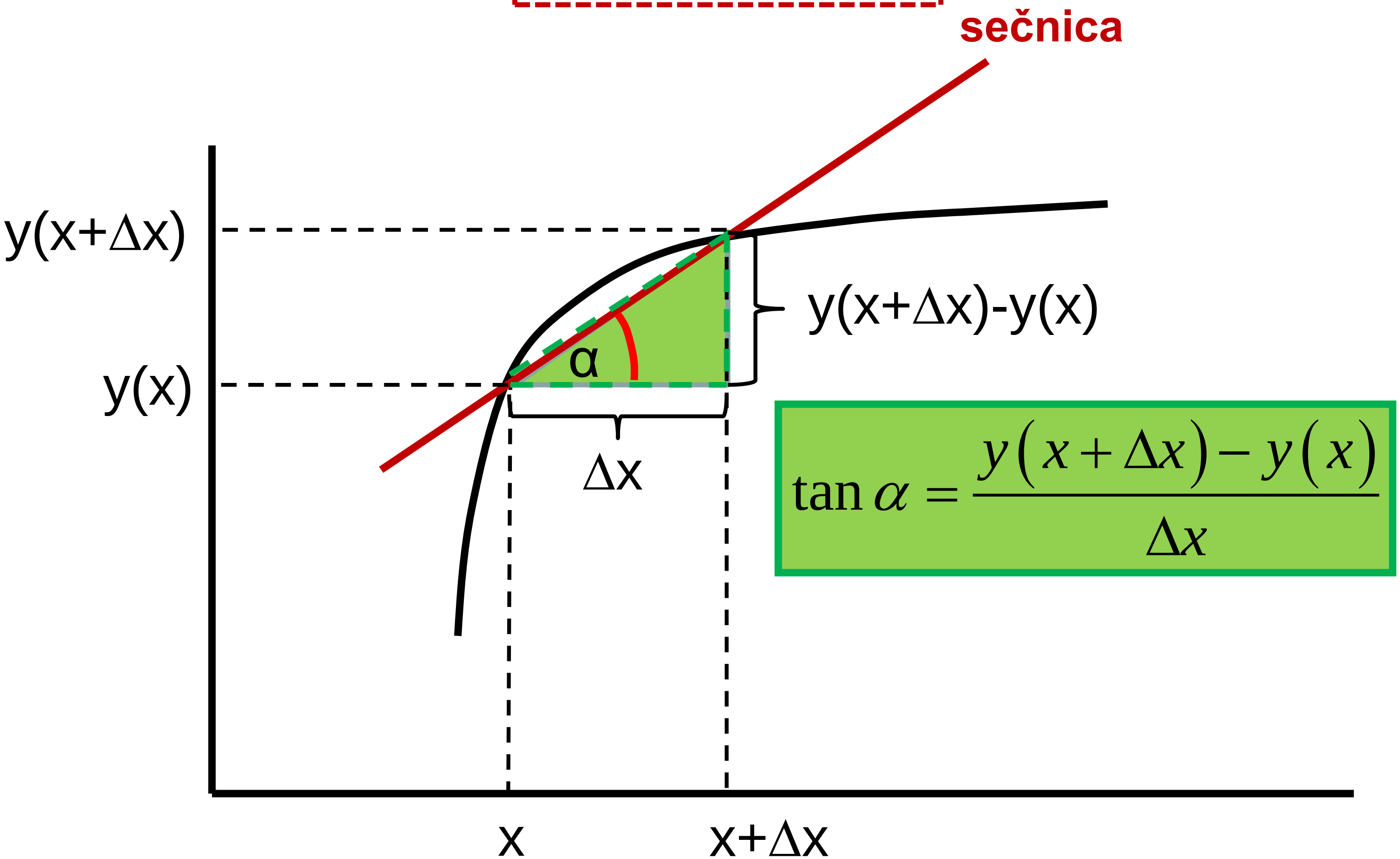
Rýchlosť zmeny funkcie

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \boxed{\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}}$$

Čo vyjadruje tento člen geometricky ????

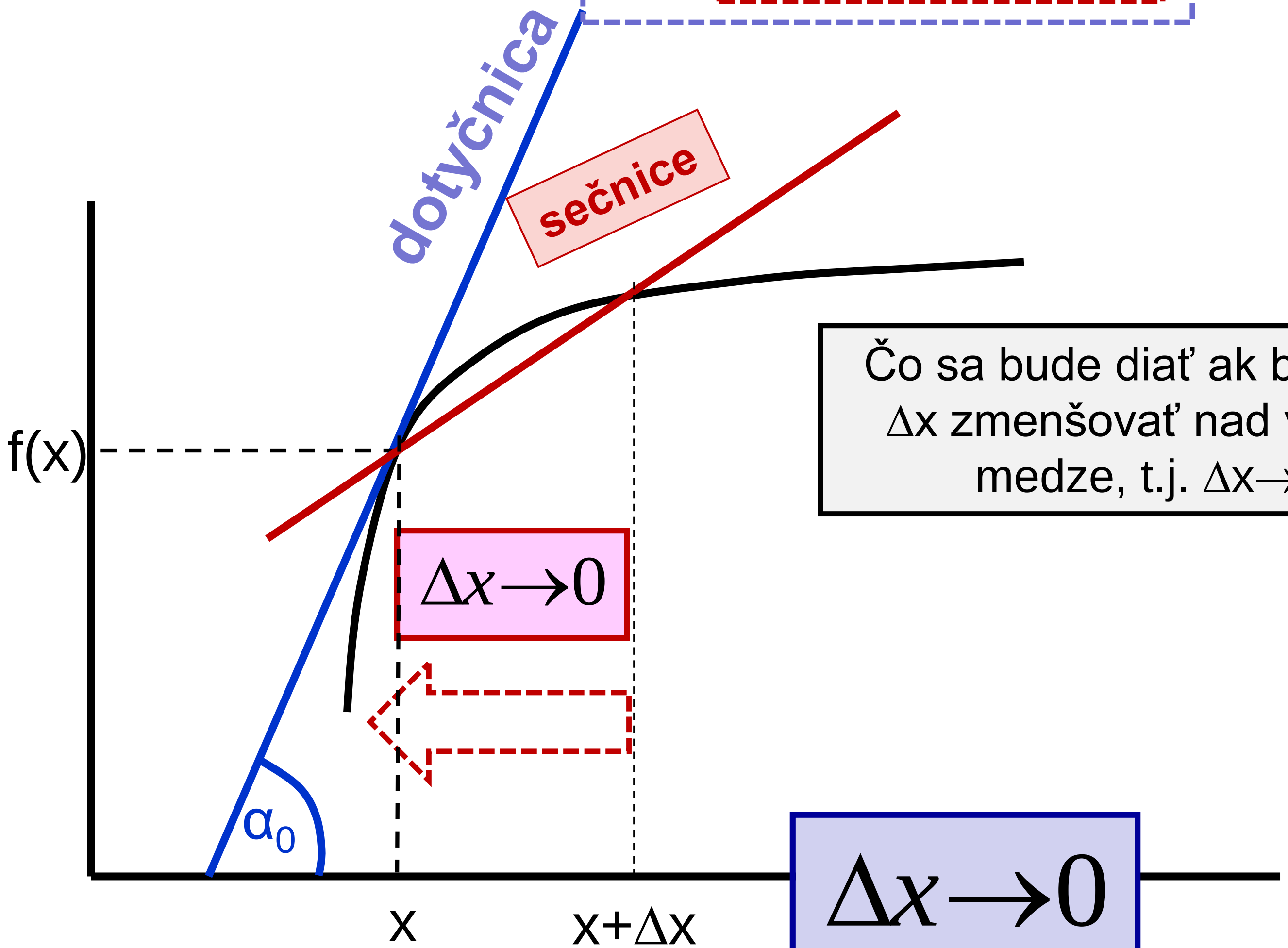


$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \overbrace{\boxed{\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}}}^{\textit{smernica sečnice}}$$



$$\tan\alpha = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

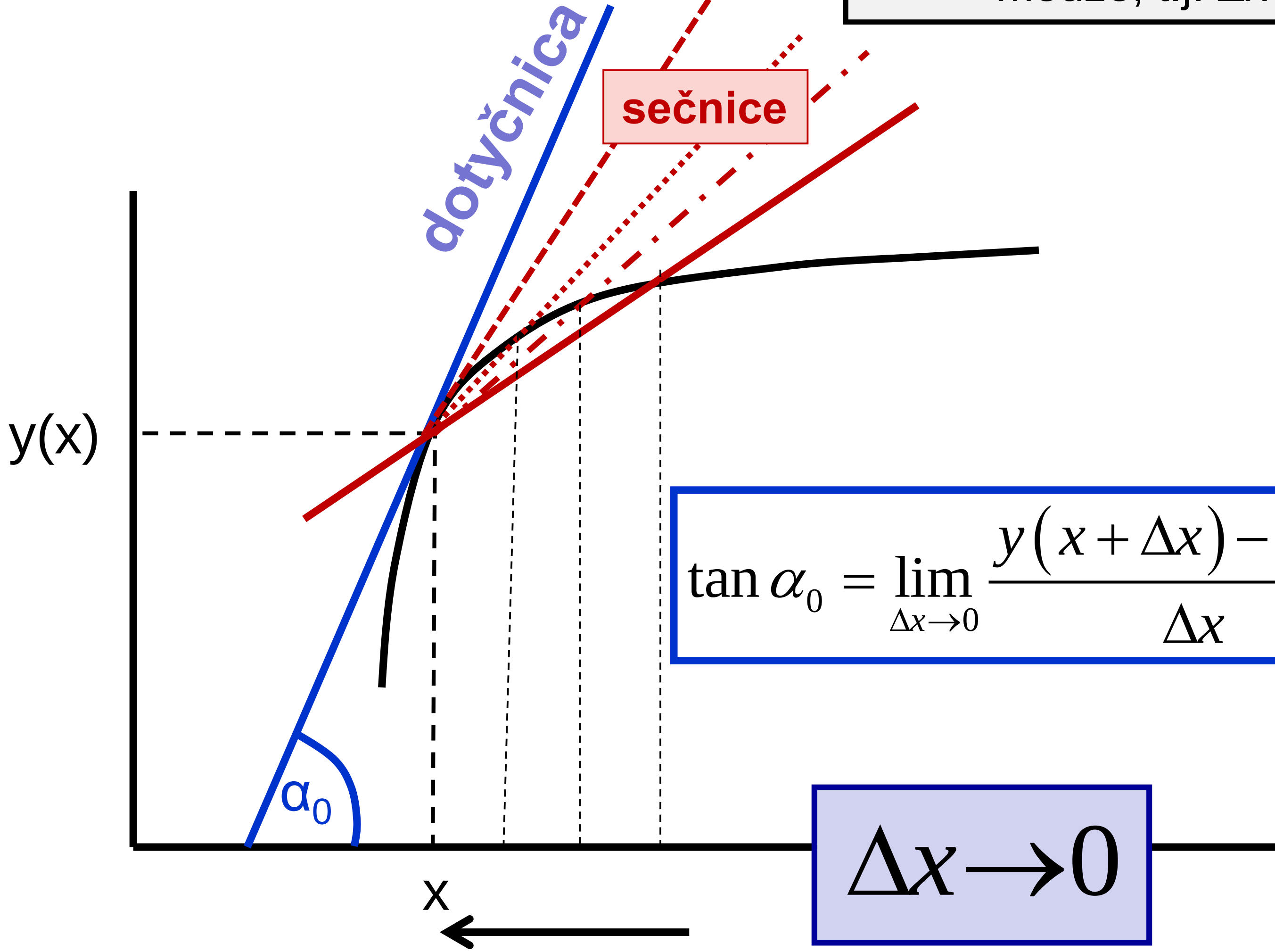
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$



Čo sa bude diať ak budeme Δx zmenšovať nad všetky medze, t.j. $\Delta x \to 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \boxed{\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}}$$

Čo sa bude diať ak budeme Δx zmenšovať nad všetky medze, t.j. $\Delta x \to 0$



$$\tan \alpha_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

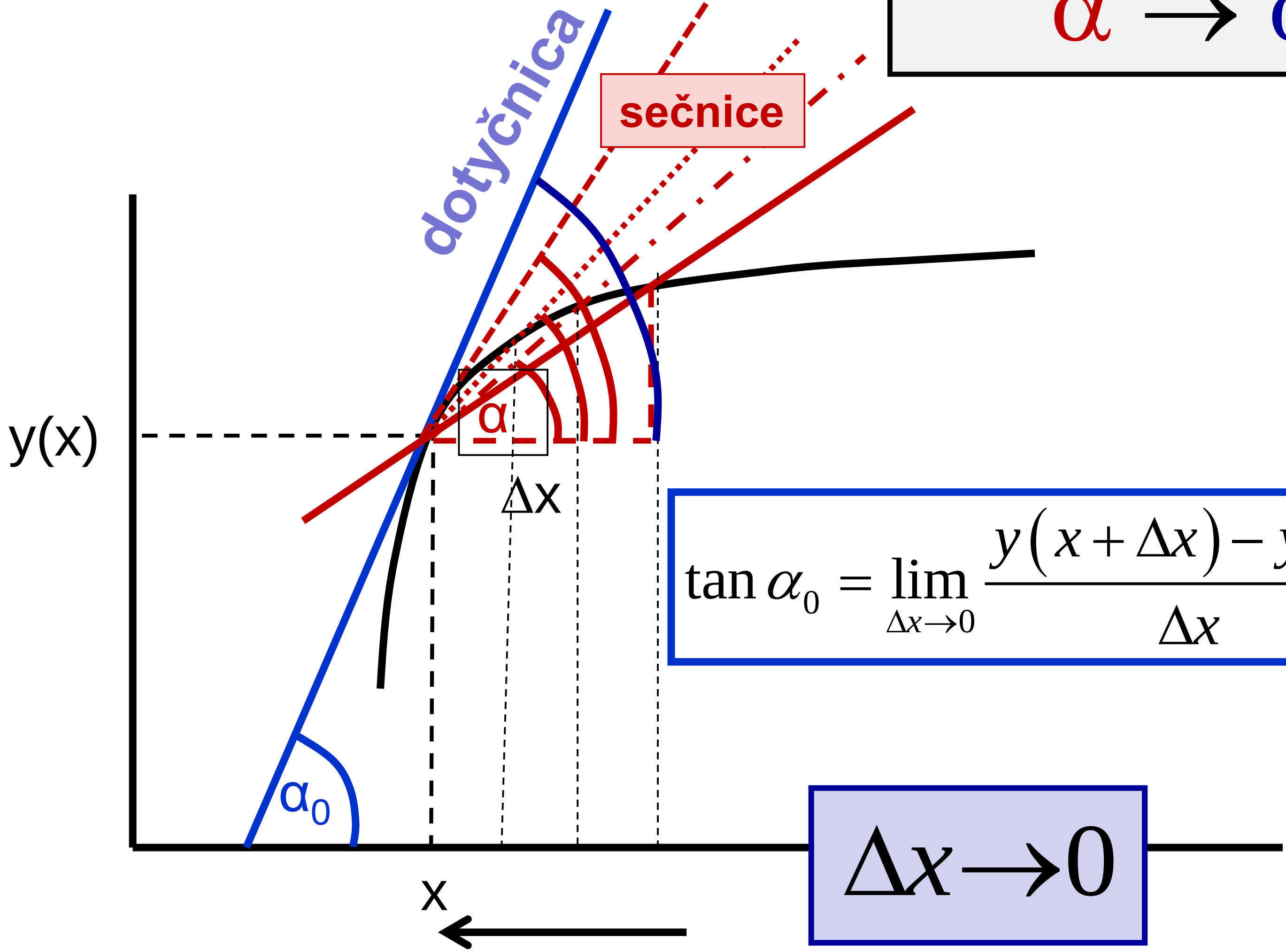
$$\Delta x \to 0$$

Geometrický význam derivácie –
derivácia funkcie v danom bode určuje smernicu dotyčnice

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \boxed{\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}}$$

Zmenšovaním intervalu Δx nad všetky medze, sečnica sa začne približovať k dotyčnici

$$\alpha \to \alpha_0$$

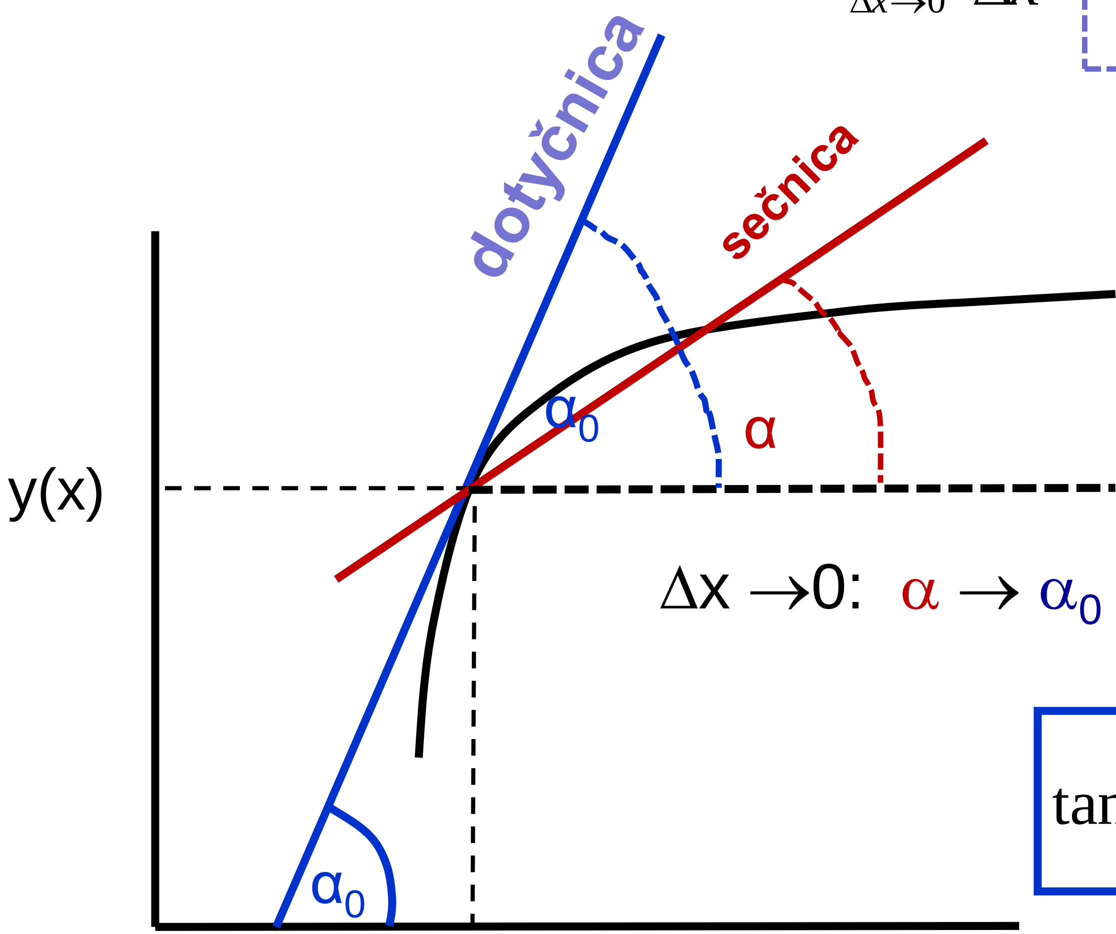


$$\tan \alpha_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

$$\Delta x \to 0$$

smernica dotyčnice

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}}$$



$\Delta x \to 0$: $\alpha \to \alpha_0$

Smernica sečnice

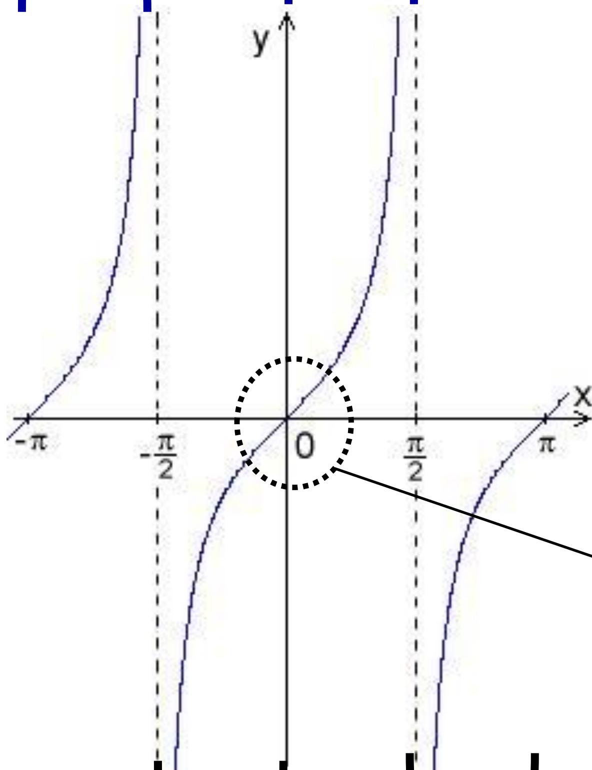
$$\boxed{\tan \alpha = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}}$$

smernica dotyčnice

$$\boxed{\tan \alpha_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}}$$

Geometrický význam derivácie –
derivácia funkcie v danom bode určuje smernicu dotyčnice

Kladný tangent - ostrý uhol



Derivácia geometricky zodpovedá tangentu (orientovaného) uhla, ktorý zviera dotyčnica s osou

Nulovej smernici zodpovedá priamka rovnobežná s
x – ovou osou.

záporný tangent - tupý uhol

Derivácie vo fyzike niektoré príklady

Rýchlosť zmeny danej veličiny v bode

Priemerná rýchlosť zmeny funkcie

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}}$$

„okamžitá“ rýchlosť zmeny funkcie

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

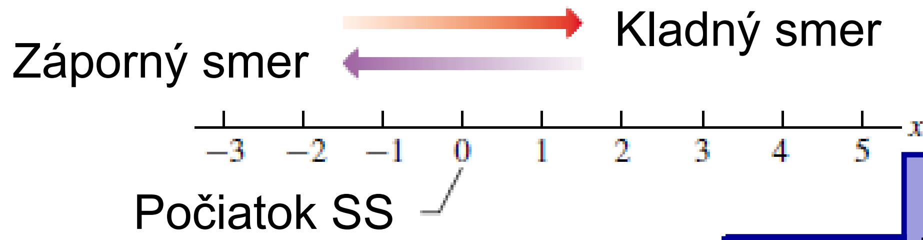
$$a = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

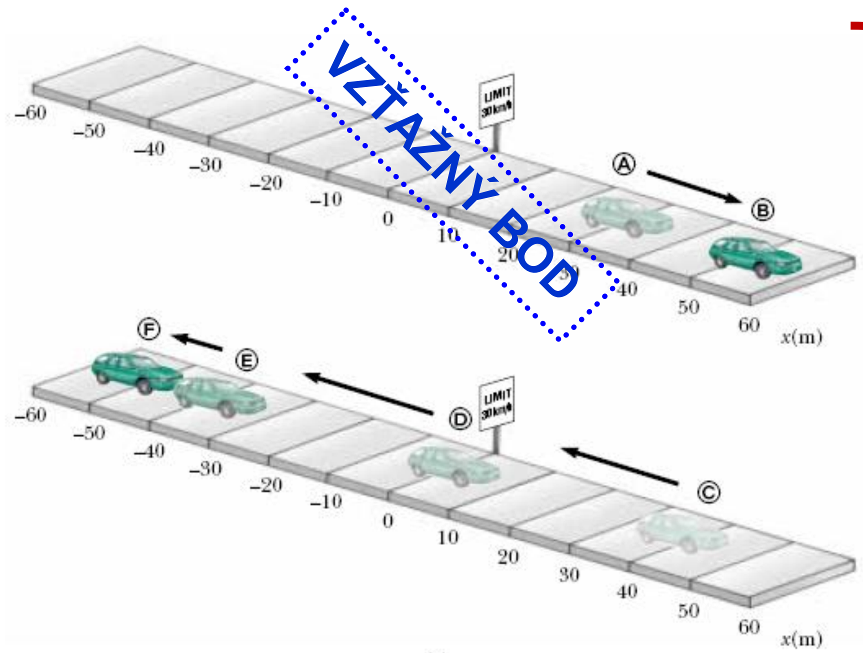
$$U_i = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

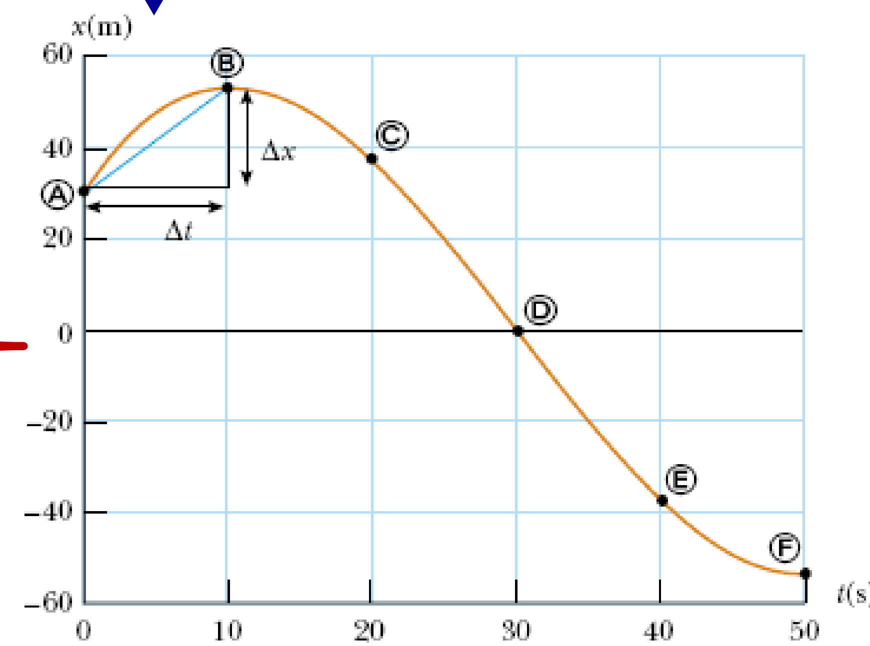
$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Δ vo fyzike nebývajú nekonečne malé, ale ich volíme tak malé ako je to len možné, resp. ako je to „rozumné“

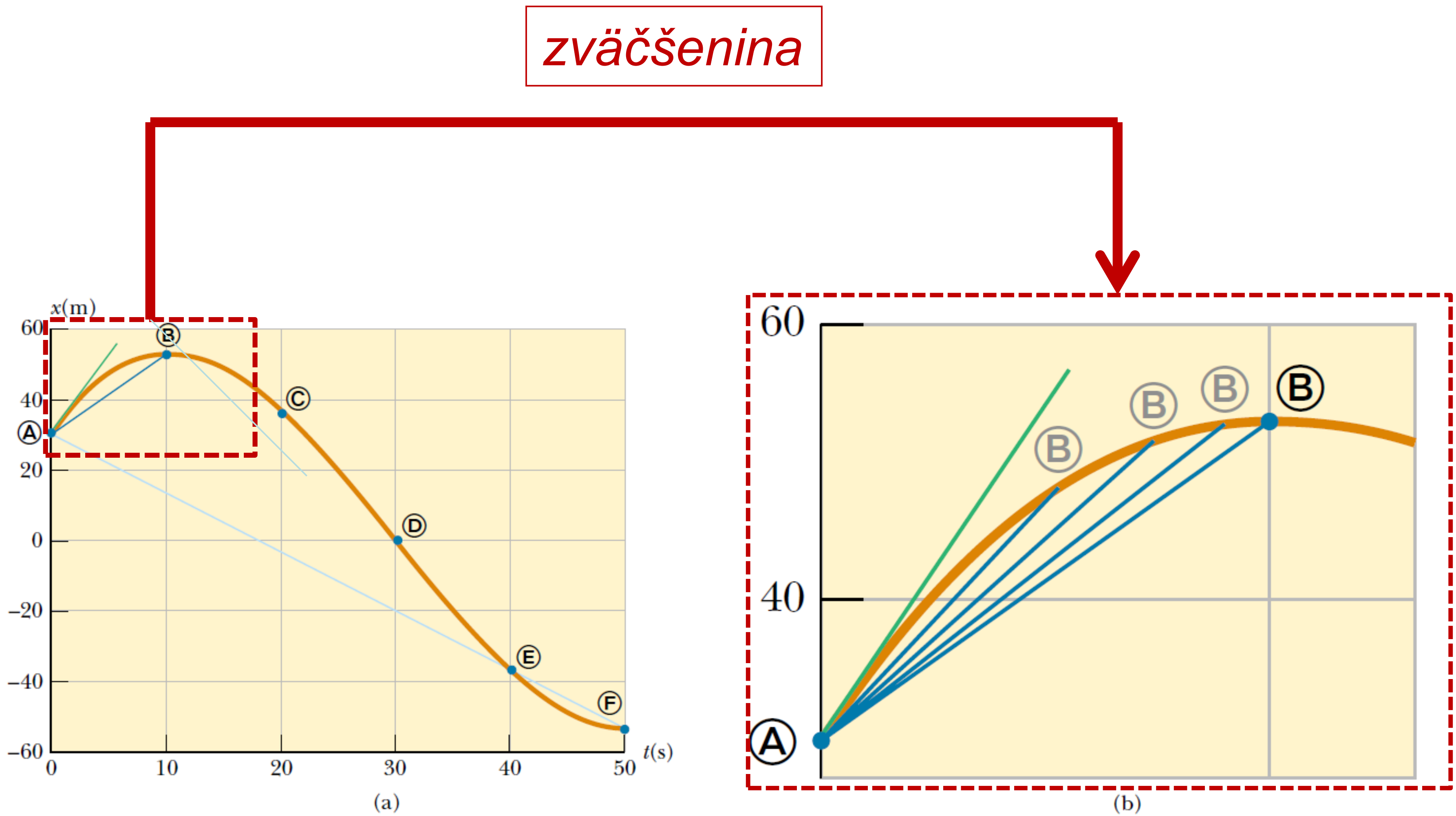


$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



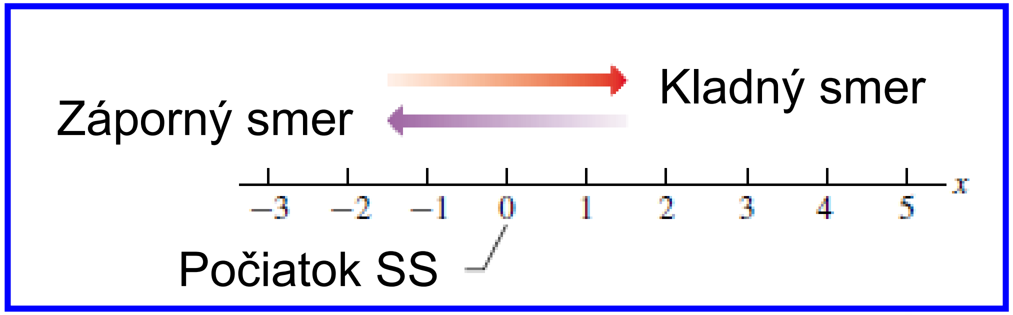


V polohe závislej od času je skrytá informácia o pohybe.



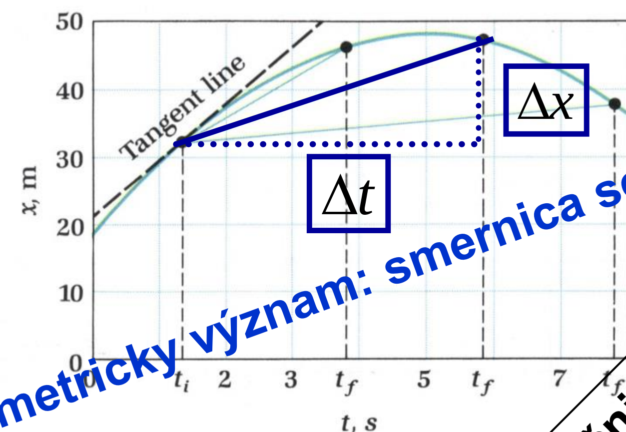
Zmenšovaním časového intervalu sa sečnica blíži k dotyčnici, Priemerná rýchlosť sa stále menej a menej bude líšit od okamžitej , čím je bod B bližšie k bodu A

Jednorozmerný prípad



Priemerná rýchlosť

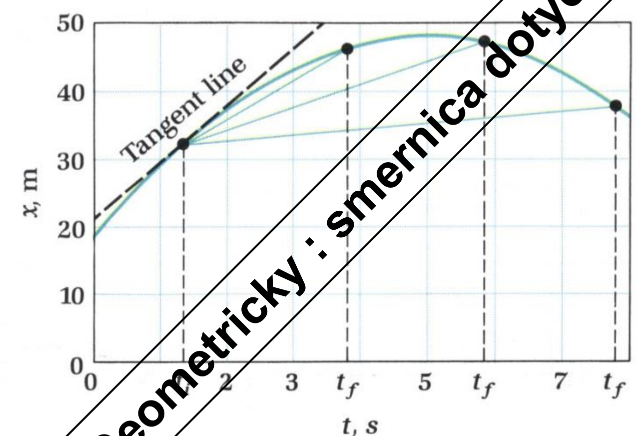
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



Geometricky význam: smernica sečnice

Okamžitá rýchlosť

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



Geometricky : smernica dotyčnice

Zmenšovaním intervalu Δt nad všetky medze, sečnica sa začne približovať k dotyčnici

Zhrnutie

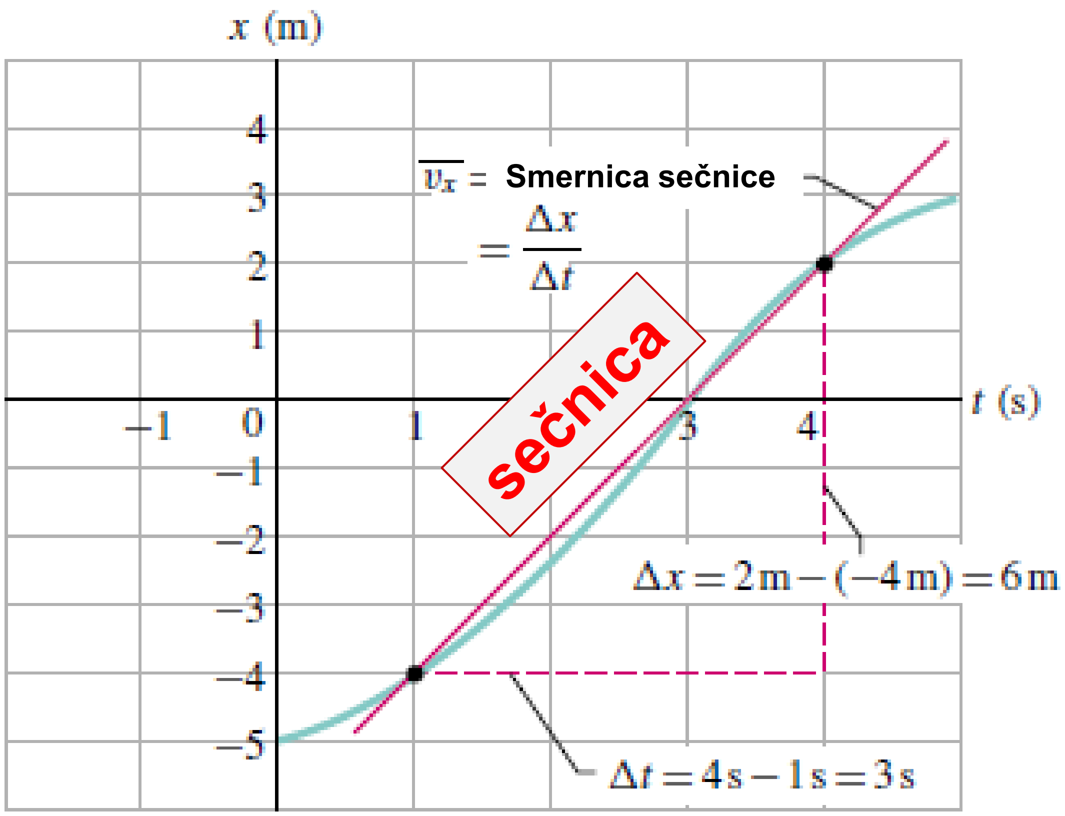
Okamžitá rýchlosť je limita, ku ktorej sa blíži **priemerná rýchlosť** pri nekonečnom zmenšovaní časového intervalu $\Delta t \to 0$.

Priemerná rýchlosť

$$v = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \boxed{\frac{\Delta x}{\Delta t}}} = \frac{dx}{dt}$$

Okamžitá rýchlosť

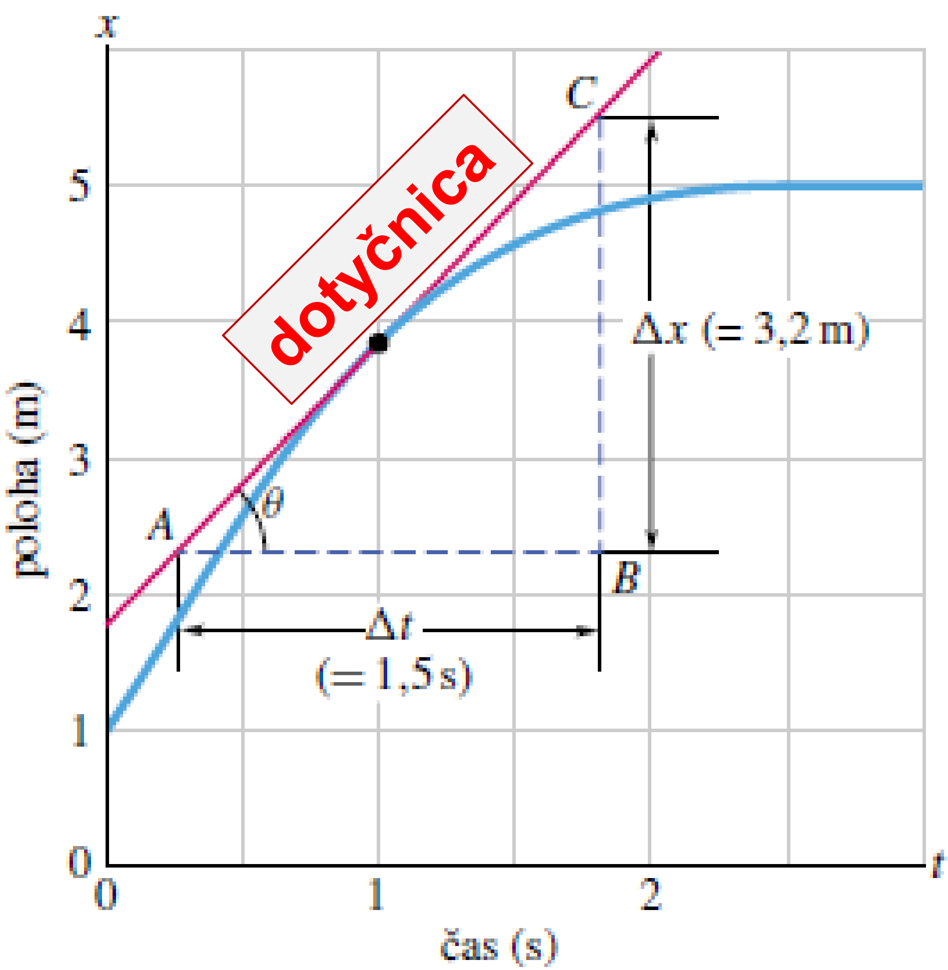
Určenie priemernej rýchlosti



Priemerná rýchlosť telesa medzi 1s a 4s

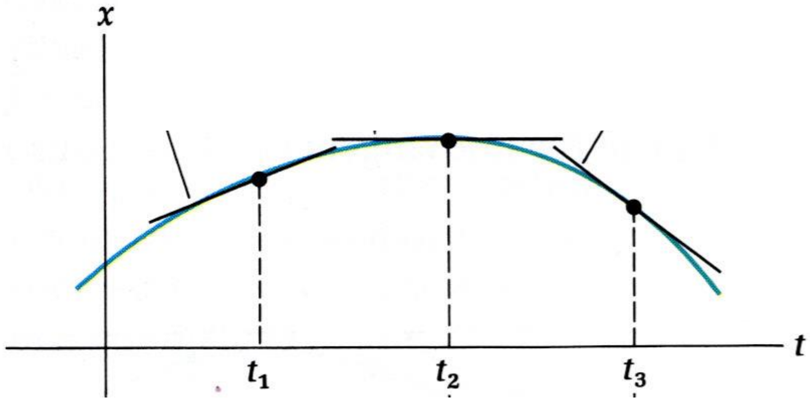
$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6}{3}\frac{m}{s} = 2\frac{m}{s}$$

Určovanie okamžitej rýchlosti - geometricky



$$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3.2}{1.5}\frac{m}{s} = 2.1\frac{m}{s}$$

Využitie geometrického významu grafické derivovanie

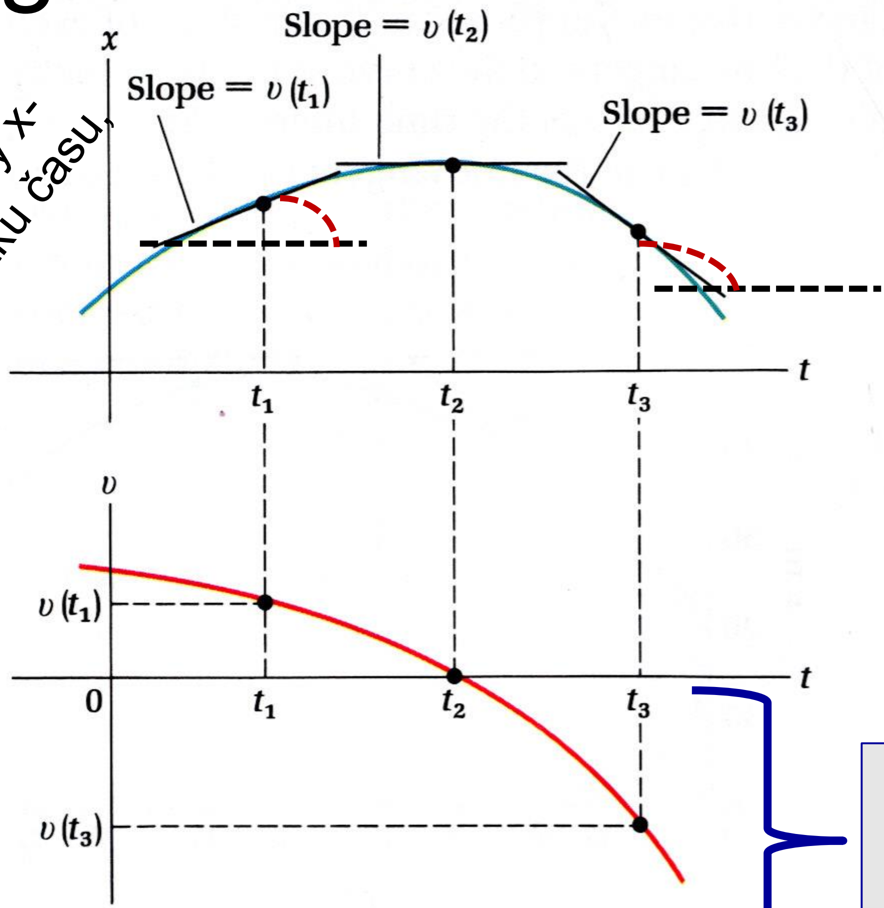


Na obrázku je znázornená závislosť polohy telesa v čase t. Na základe kvalitatívnej úvahy načrtnite závislosť rýchlosti od času

Prekreslovanie grafu

Využitie geometrického významu grafické derivovanie

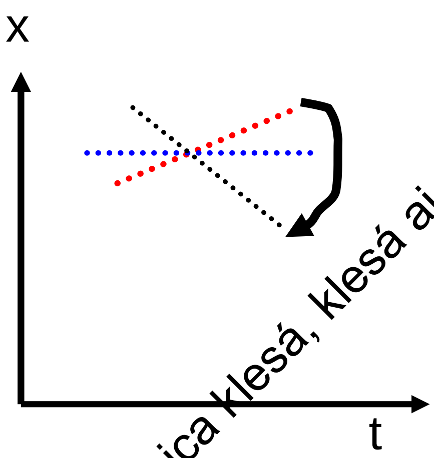
Z grafu vieme určiť rýchlosť zmeny x-vej súradnice telesa za jednotku času, t.j. rýchlosť



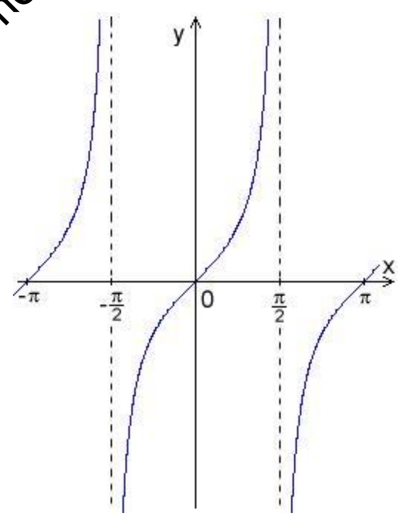
Prekreslovanie grafu

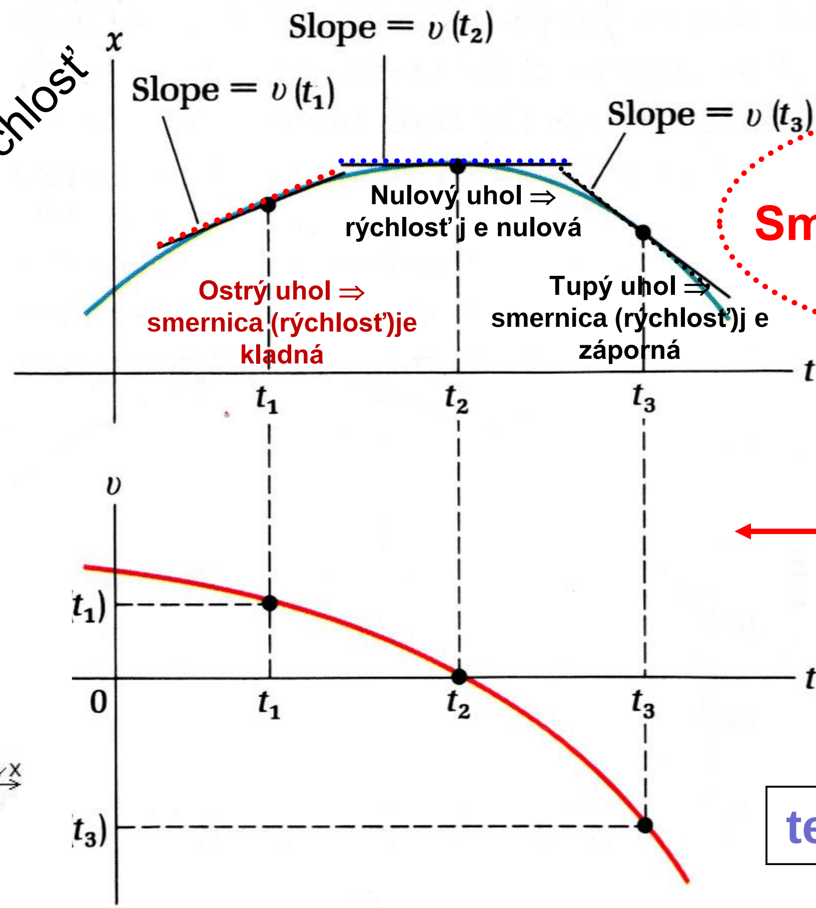
Ako interpretovať zápornú rýchlosť ????

Využitie geometrického významu grafické derivovanie



Smernica klesá, klesá aj rýchlosť





Smernica dotyčnice klesá

teleso sa vracia nazad

Smernica dotyčnice v grafe x(t) v každom čase určuje veľkosť rýchlosti.

Zhrnutie

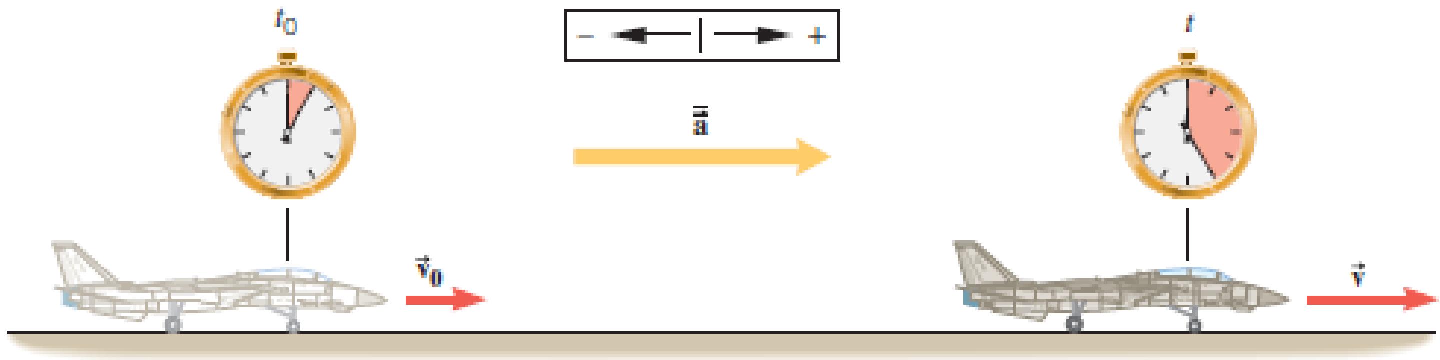
Okamžitá rýchlosť je limita, ku ktorej sa blíži **priemerná rýchlosť** pri nekonečnom zmenšovaní časového intervalu $\Delta t \rightarrow 0$.

Priemerná rýchlosť

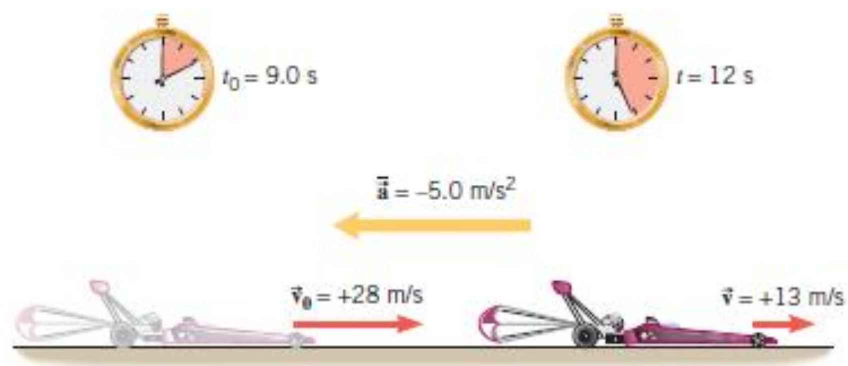
$$v = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \boxed{\frac{\Delta x}{\Delta t}}} = \frac{dx}{dt}$$

Okamžitá rýchlosť

Zmena rýchlosti častice sa charakterizuje zrýchlením



Veľkosť rýchlosti sa zväčšuje



Veľkosť rýchlosti sa zmenšuje

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \left(t + \Delta t\right) + \frac{1}{2} g \left(t + \Delta t\right)^2 - \left[\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t\right]}{\Delta t} = v_0 + g t$$

Jednorozmerný prípad

Priemerné zrýchlenie

$$\boxed{\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

Okamžité zrýchlenie

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}}$$

Zrýchlenie

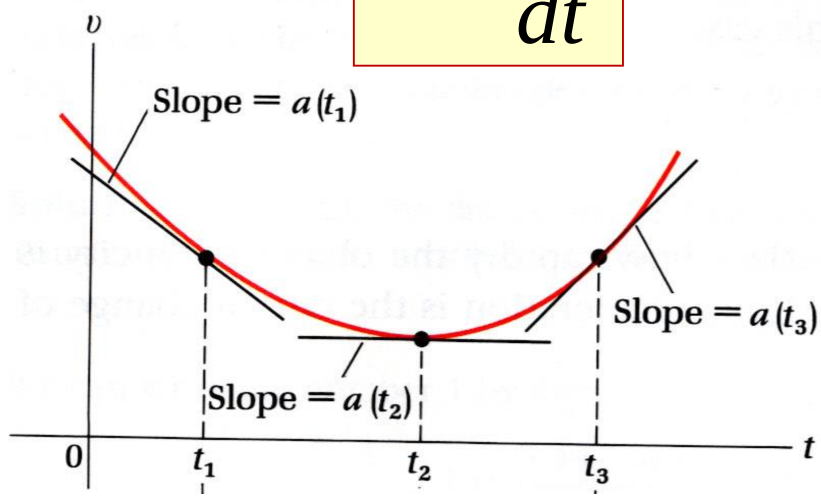
Okamžité zrýchlenie je limita, ku ktorej sa blíži **priemerné zrýchlenie** pri nekonečnom zmenšovaní časového intervalu $\Delta t \to 0$.

$$a_x = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \boxed{\frac{\Delta v}{\Delta t}}} = \frac{dv}{dt}$$

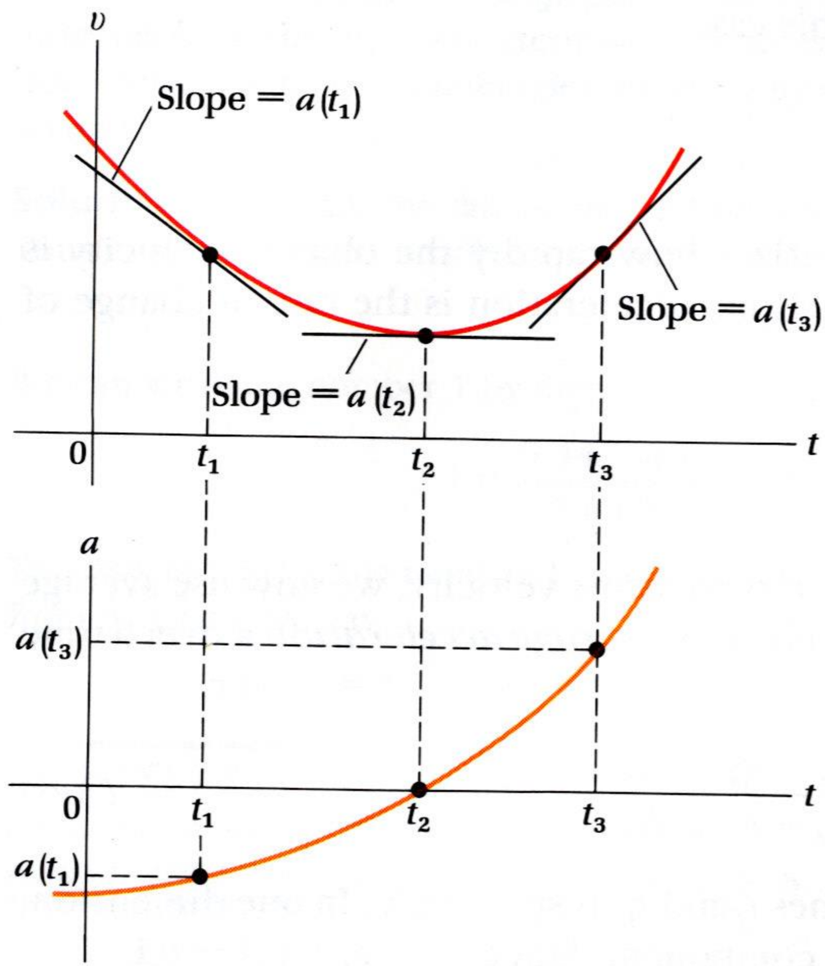
priemerné zrýchlenie

Okamžité zrýchlenie

$$a = \frac{dv}{dt}$$

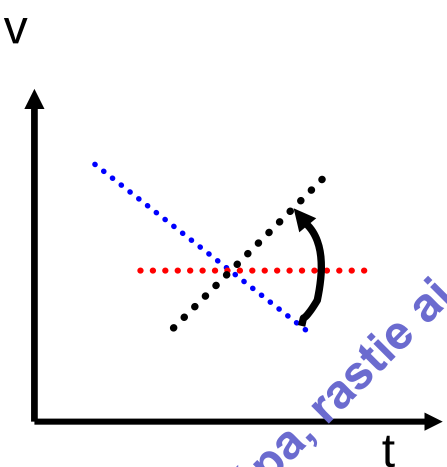


Na obrázku je znázornená závislosť rýchlosti telesa v čase t. Na základe kvalitatívnej úvahy načrtnite závislosť zrýchlenia od času



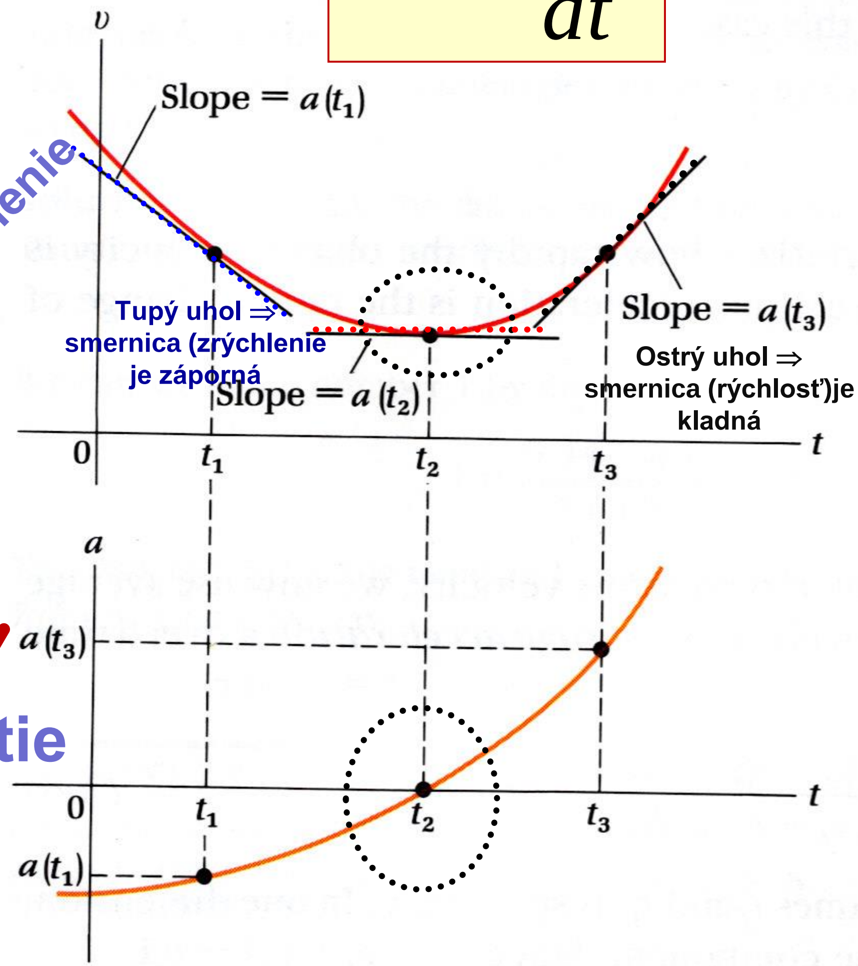
v
Slope = a(t1)
Slope = a(t2)
Slope = a(t3)
0
t1
t2
t3
t
a
a(t3)
a(t1)

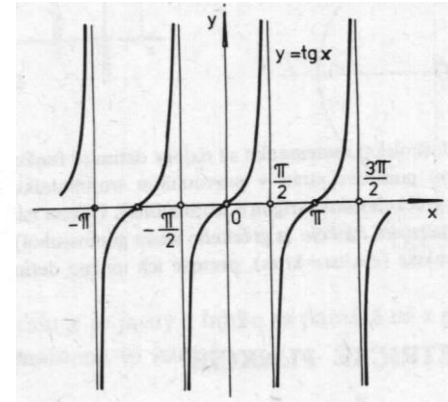
$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$



Smernica stúpa, rastie aj zrýchlenie

Zrýchlenie rastie





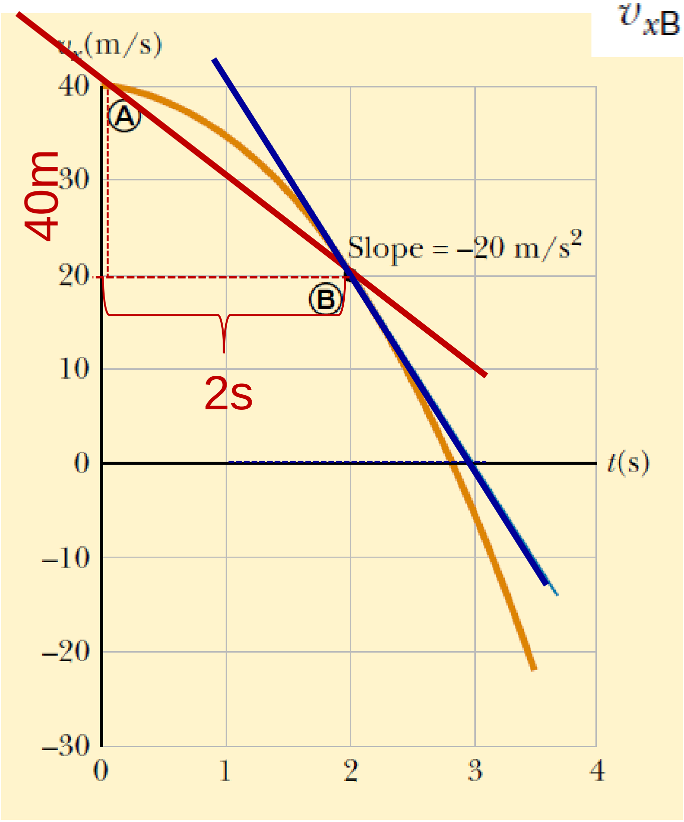
Smernica dotyčnice v grafe *v(t)* v každom čase určuje veľkosť zrýchlenia *a*.

$$\boxed{v_x = (40 - 5t^2)\ \mathrm{m/s}}$$

Priemerné zrýchlenie počas prvých dvoch sekúnd

$$v_{xA} = (40 - 5t_A{}^2)\ \mathrm{m/s} = [40 - 5(0)^2]\ \mathrm{m/s} = +40\ \mathrm{m/s}$$

$$v_{xB} = (40 - 5t_B{}^2)\ \mathrm{m/s} = [40 - 5(2.0)^2]\ \mathrm{m/s} = +20\ \mathrm{m/s}$$

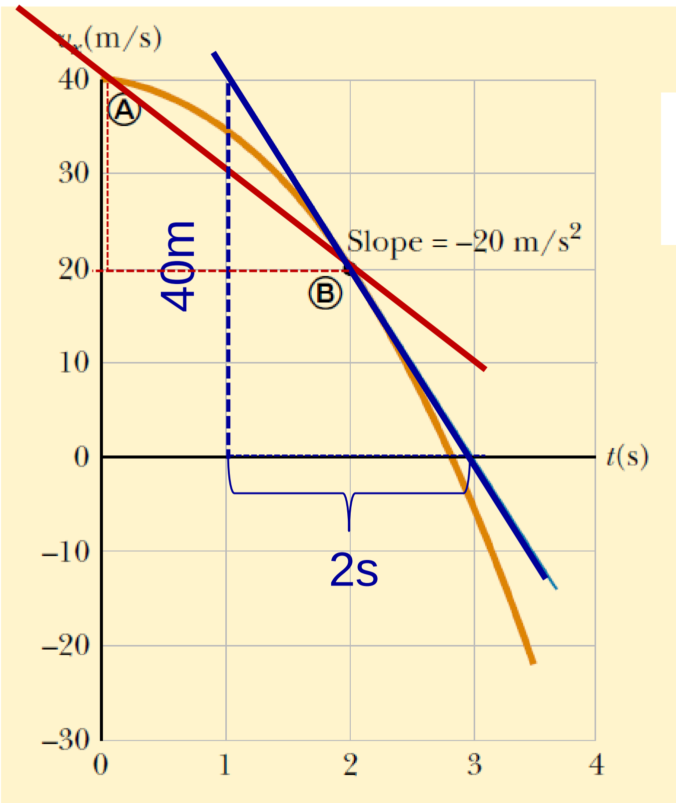


$$\bar{a}_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} = \frac{v_{xB} - v_{xA}}{t_B - t_A} = \frac{(20 - 40)\ \mathrm{m/s}}{(2.0 - 0)\ \mathrm{s}}$$

$$= -10\ \mathrm{m/s^2}$$

$$v_x = (40 - 5t^2)\ \mathrm{m/s}$$

Okamžité zrýchlenie v 2. sekunde



$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (-10t - 5\Delta t) = -10t\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_x = (-10)(2.0)\ \mathrm{m/s^2} = -20\ \mathrm{m/s^2}$$