Derivácie niektorých elementárnych funkcií a ich odvodenie

$y = C$	$y' = 0$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$

x^n

$$[x+\Delta x]^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{1}{2!}n(n-1)x^{n-2}\Delta x^2 + ...$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[x+\Delta x]^n - x^n}{\Delta x} = nx^n$$

Ukážeme aj pre n∈R

$$f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^2 &= \lim_{dx\to 0} \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2}{dx} \\
&= \lim_{dx\to 0} \frac{2xdx}{dx} + \lim_{dx\to 0} \frac{(dx)^2}{dx} \\
&= 2x + \lim_{dx\to 0} dx = 2x
\end{aligned}$$

$$f(x) = x^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{z\to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \\
&= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x} \\
&= \lim_{z\to x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{z\to x} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

sinx

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\bullet\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$$

$$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\frac{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=-\sin x$$

$$(C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0$$

Substitúcia

$$(a^x)' = a^x \bullet \lim_{t \to 0} \frac{[t] \ln a}{\ln(t+1)} = a^x \ln a$$

$$a^{\Delta x} - 1 = t \quad \Rightarrow \Delta x \ln a = \ln(t+1)$$

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{\left[a^{\Delta x} - 1\right]}{\Delta x} = a^x \bullet \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[a^{\Delta x} - 1\right]}{\Delta x} = a^x \ln a$$

$$a = e$$

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x$$

e^x je funkcia, ktorá po zderivovaní je rovná sama sebe.

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

Pomocné vety -pripomenutie

Ak funkcia f, g majú v bode a limity:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = c$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]\pm\lim_{x\to a}\left[g(x)\right] = b\pm c$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\bullet g(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]\bullet\lim_{x\to a}\left[g(x)\right] = b\bullet c$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c} \quad ak \lim_{x\to a} g(x)\neq 0$$

Pravidlá derivovania a ich odvodenie

$y = C$	$y' = 0$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$

Základné pravidlá a ich odvodenie

Nech funkcie u a v sú diferencovateľné, t.j majú derivácie, potom:

$$f(x) = \begin{cases} u+v \\ u-v \\ uv \\ \dfrac{u}{v} \end{cases}$$

Derivácie:

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Poznámka

Z existencie derivácie v bode x_0 vyplýva, že ak $\Delta x \rightarrow 0$ potom $\Delta y \rightarrow 0$.

Ak by neplatilo $\Delta y \rightarrow 0$, keď $\Delta x \rightarrow 0$ vlastná limita by nemohla existovať a funkcia by nemala v bode x_0 deriváciu

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

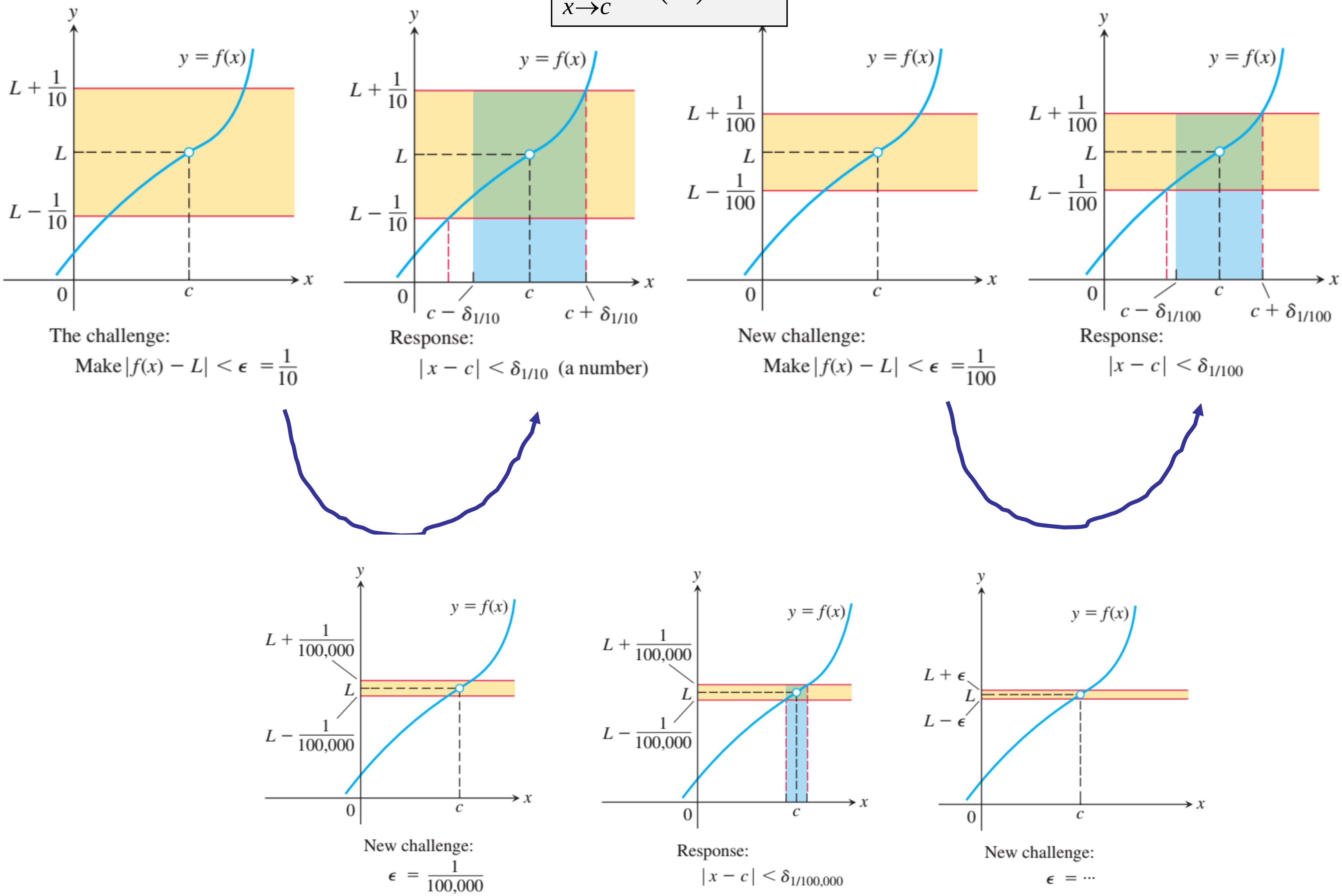
$y(x+\Delta x) - y(x) \not\rightarrow 0$

$\longrightarrow \infty$

$\Delta x \rightarrow 0$

$\Delta y \rightarrow 0$, keď $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$



Hodnoty funkcie sa musia ľubovoľne málo líšiť od L, pre hodnoty x dostatočne blízke k c.

Derivovanie súčtu a rozdielu funkcií

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$$

$$v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$$

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$y = x^3 + \sin x - \ln x$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}.
\end{aligned}$$

Derivovanie súčinu funkcií

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v\right) +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \bullet \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$$

Derivovanie funkcií

$$y = cf(x)$$

$$y' = cf'$$

$$y = e^x \cos x$$

Derivovanie súčinu funkcií

Pravidlo sa dá rozšíriť na ľubovoľný počet funkcií

Súčet súčinov, v ktorých postupne nahradzujeme každú funkciu jej deriváciou

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$\left(x^n\right)' = \left(x'xxx....xxx\right) + \left(xx'xx....xxxx\right) + \left(xxx'x....xxx\right) + ...\left(xxxx....xxx'\right) = nx^{n-1}$$

$$y = e^x \ln x \cos x \sin x$$

Derivovanie podielu funkcií

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \dfrac{u}{v}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v+\Delta v\right)} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y = tgx$$

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= a^x \ln a; && x \in R, a \in (0;\infty);\\
(\ln|x|)' &= \frac{1}{x}; && x \in R - \{0\};\\
(\log_a|x|)' &= \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}; && x \in R - \{0\};\ a \in (0;\infty);\ a \neq 1;\\
(\cos x)' &= -\sin x; && x \in R;\\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}; && x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z;\\
(\operatorname{cotg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}; && x \neq k\pi;\ k \in Z;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\sinh x)' &= \cosh x; && x \in R;\\
(\cosh x)' &= \sinh x; && x \in R;\\
(\operatorname{tgh} x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x}; && x \in R;\\
(\operatorname{cotgh} x)' &= \frac{-1}{\sinh^2 x}; && x \in R - \{0\};\\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; && x \in (-1;1);\\
(\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; && x \in (-1;1);\\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}; && x \in R;\\
(\operatorname{arccotg} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}; && x \in R;
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y = \frac{t^2 - 1}{t^3 + 1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^3 + 1) \cdot 2t - (t^2 - 1) \cdot 3t^2}{(t^3 + 1)^2}$$
$$= \frac{2t^4 + 2t - 3t^4 + 3t^2}{(t^3 + 1)^2}$$
$$= \frac{-t^4 + 3t^2 + 2t}{(t^3 + 1)^2}.$$

$$y = e^{-x}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^x \cdot 0 - 1 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-1}{e^x} = -e^{-x}$$

$$y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$g(x) = (2 - x)\tan^2 x$$

$$y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$$

DERIVOVANIE ŠPECIÁLNYCH TYPOV FUNKCIÍ

Derivácia zloženej funkcie

Vonkajšia funkcia

Vnútorná funkcia

$$y = y\left[u(x)\right]$$

u je diferencovateľná:

Výraz rozšírime Δu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \bullet \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \Delta y = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \bullet \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u} \bullet \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u} \bullet \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Funkcia u má deriváciu $\Rightarrow$ ak $\Delta x \to 0$ potom $\Delta u \to 0$

$$y'_x = y'_u u'_x$$

Reťazové pravidlo, dá sa rozšíriť aj na viacnásobne zložené funkcie

$$y = \sin x^3$$

$$y = y\left[u(x)\right]$$

$$y'_x = y'_u u'_x$$

Aby sme našli y pre danú hodnotu x, musíme vykonať niekoľko operácii:

$$x \rightarrow x^3 \rightarrow y = \sin x^3$$

Vonkajšia funkcia
Vnútorná funkcia

Tá veličina, nad ktorou je vykonaná posledná operácia bude považovaná za argument poslednej elementárnej funkcie

$$y = \sin u \qquad u = x^3$$

$$y' = (\sin u)'_u \left(x^3\right)'_x = \cos u \, 3x^2 = 3x^2 \cos x^3$$

Funkcia môže byť zložená s viacerých elementárnych funkcií, nielen z dvoch

$$y = \ln arctgx^2$$

Aby sme našli y pre danú hodnotu x, musíme vykonať niekoľko operácii:

$$x \to x^2 \to arctgx^2 \to y = \ln arctgx^2$$

Tá veličina, nad ktorou je vykonaná posledná operácia bude považovaná za argument poslednej elementárnej funkcie

$$y = \ln u \qquad u = arctgx^2$$

$$y'_x = y'_u u'_x$$

$$y = \ln arctgx^2$$

$$y'_x = y'_u u'_x$$

Opäť zložená funkcia

$$y' = (\ln u)'_u (arctx^2)'_x = \frac{1}{u}(arctx^2)'_x = \frac{1}{arctgx^2}(arctgx^2)'_x = \frac{1}{arctgx^2}(arctgu)'_u (x^2)'_x =$$

$$\frac{1}{arctgx^2}\frac{1}{1+u^2}(x^2)'_x = \frac{1}{arctgx^2}\frac{1}{1+(x^2)^2}(x^2)'_x = \frac{1}{arctgx^2}\frac{1}{1+x^4}2x$$

Zložená funkcia sa postupne rozleptáva na derivácie jej zložiek, z ktorých bola vystavaná

Už so skúsenosťami nezvykneme používať pomocný argument u

$$y' = \frac{1}{arctgx^2}(arctgx^2)'_x = \frac{1}{arctgx^2}\frac{1}{1+(x^2)^2}(x^2)'_x = \frac{1}{arctgx^2}\frac{1}{1+x^4}2x$$

$\sin(x^2 + e^x)$

$$\frac{d}{dx}\sin\underbrace{(x^2 + e^x)}_{\text{inside}} = \cos\underbrace{(x^2 + e^x)}_{\substack{\text{inside}\\\text{left alone}}} \cdot \underbrace{(2x + e^x)}_{\substack{\text{derivative of}\\\text{the inside}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\cos x}) = e^{\cos x}\frac{d}{dx}(\cos x) = e^{\cos x}(-\sin x) = -e^{\cos x}\sin x.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)^7 &= 7(5x^3 - x^4)^6\frac{d}{dx}(5x^3 - x^4)\\ &= 7(5x^3 - x^4)^6(5 \cdot 3x^2 - 4x^3)\\ &= 7(5x^3 - x^4)^6(15x^2 - 4x^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x - 2}\right) &= \frac{d}{dx}(3x - 2)^{-1}\\ &= -1(3x - 2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x - 2)\\ &= -1(3x - 2)^{-2}(3)\\ &= -\frac{3}{(3x - 2)^2}\end{aligned}$$

$$y = 4\sin\left(\sqrt{1 + \sqrt{t}}\right)$$

$$\left(\frac{x^2}{x^3-4x}\right)^3$$

$$(xtgx)^{10}$$

$$x^2(x+1)^2(x+1)$$

$$x^2\sqrt[4]{x^3}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}$$

$$\sin^2(\cos 3x)$$

$$arctg\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

$$\ln\left(tg\frac{x}{2}\right)$$

VYUŽITIE DERIVÁCIE ZLOŽENEJ FUNKCIE

LOGARITMICKÁ DERIVÁCIA

$$y = u(x)^{v(x)}$$

~~$y = x^n \quad y' = nx^{n-1}$~~

~~$y = a^x \quad y' = a^x \ln a$~~

Úprava funkcie pred derivovaním

Logaritmická derivácia

Derivovať ako zloženú funkciu

$$\ln y(x) = v(x) \ln u(x)$$

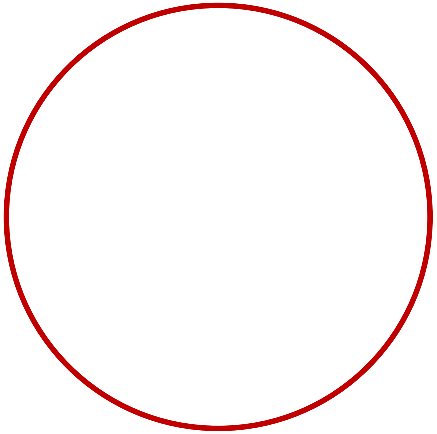
Derivovať ako exponenciálnu funkciu

$$y = e^{\ln\left[u(x)^{v(x)}\right]} = e^{v(x)\ln\left[u(x)\right]}$$

$$y' = u^v \left[v' \ln u + \frac{v}{u} u' \right]$$

DERIVÁCIA PARAMETRICKY ZADANEJ FUNKCIE

Ukážka parametrického vyjadrenia kružnice



Krivka je zadaná sprostredkovane cez parameter. Parameter umožňuje popáriť x a y

Spôsob zadania funkcie

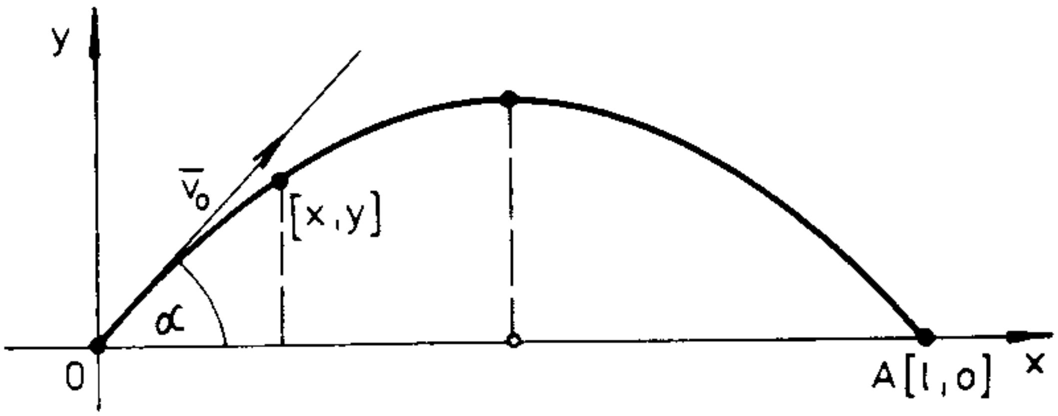
$$x = R\cos(\omega t)$$
$$y = R\sin(\omega t)$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$x = t$$
$$y = \pm\sqrt{R^2 - t^2}$$

Derivovanie funkcií zadaných parametricky

Vo fyzike častým parametrom je čas



$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = v_0 tg\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2$$

V podstate išlo o parametrické vyjadrenie paraboly

Parametrické zadanie funkcií a ich diferencovanie

Metóda 1. - odstránenie parametra a následná derivácia

Odstránenie parametra

$$x = \varphi(t) \rightarrow t = \xi(x)$$

$$y = \phi(t)$$

$$y = \Phi(\xi(x)) = f(x)$$

Derivovanie funkcií zadaných parametricky

Metóda 2. - priama derivácia podľa parametra

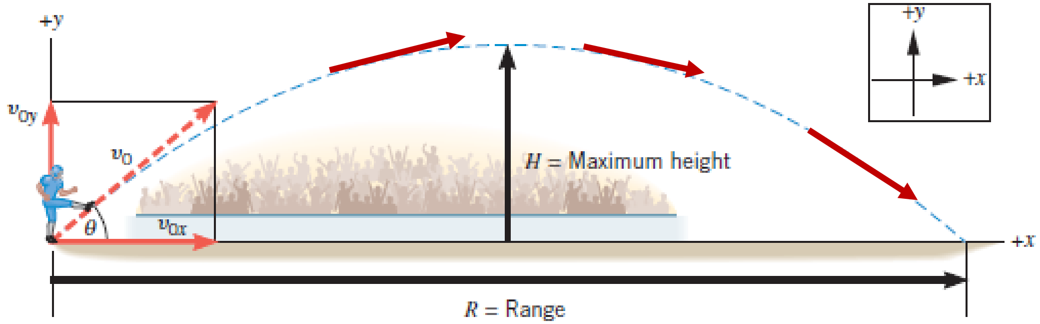
$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \phi(t) \end{aligned}\right\}$$ Zderivuj pravú a ľavú stranu podľa x, nezabudni t/x/

$$x = \varphi(t(x)) \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{d\varphi}{dt} \bullet \boxed{\frac{dt}{dx}}$$

$$y = \phi(t(x)) \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\phi}{dt} \bullet \boxed{\frac{dt}{dx}}$$

Podeľ pravé a ľavé strany:

$$\boxed{y' = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}}$$



Nájdite uhol medzi vektorom rýchlosti a x-ovou osou pri šikmom vrhu

$$x = v_0 \cos\varphi \; t$$

$$y = v_0 \sin\varphi \; t - \frac{1}{2} g t^2$$

Parametrické vyjadrenie funkcie

Hľadáme deriváciu – reprezentuje smernicu dotyčnice, ktorá má smer rýchlosti

1.Metóda –odstránie parametru a následná derivácia

$$y = x tg\varphi - \frac{g}{2(v_0\cos\varphi)^2}x^2$$

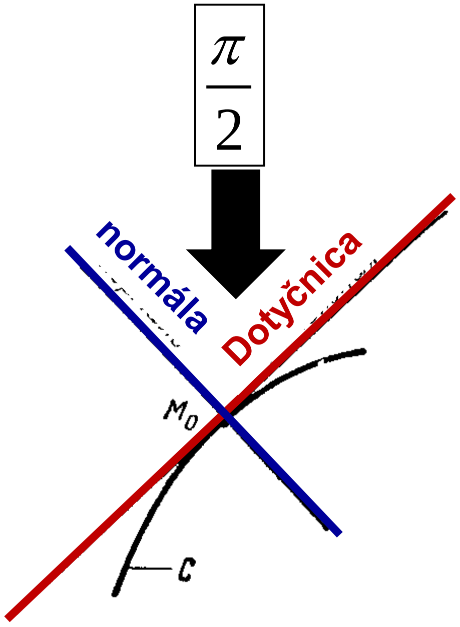
$$y' = tg\varphi - \frac{2gx}{2(v_0\cos\varphi)^2}$$

2.Metóda –priama derivácia podľa parametra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{v_0\sin\varphi - gt}{v_0\cos\varphi} = tg\varphi - \frac{gt}{v_0\cos\varphi} = tg\varphi - \frac{gtv_0\cos\varphi}{(v_0\cos\varphi)^2} = tg\varphi - \frac{gx}{(v_0\cos\varphi)^2}$$

Z fyzikálneho hľadiska sme podelili y-ovú a x-ovú zložku rýchlosti

Rovnica dotyčnice a normály ku krivke



dotyčnica

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$tg\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{tg\alpha}$$

normála

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$