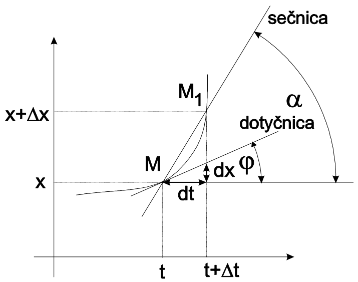
Kapitola 1

Derivácie

1.1 Derivácia funkcie, jej fyzikálny a geometrický význam.

Základy diferenciálneho počtu položili koncom 17. storočia anglický matematik a fyzik I. Newton a nemecký filozof a matematik Leibnitz. Vychádzali pritom z úlohy o dotyčniciach. Kým Leibnitzove idey mali skôr geometrický a filozofický charakter, u Newtona vystupuje do popredia pohyb prebiehajúci v čase. Newtonova metóda je pre fyzikov bližšia a preto si ju objasníme na nasledovnom príklade: Predpokladajme, že teleso sa pohybuje po priamke. Závislosť jeho polohy $x\left(t\right)$ od času t je znázornená na obr. I.1



obr. I.1

Zvoľme si dva časové okamihy t , $t+\Delta t$ a vypočítajme jeho priemernú rýchlosť $\overline{v}$:

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x\left(t+\Delta t\right)-x\left(t\right)}{\Delta t} \tag{1.1}$$

ktorá zodpovedá smernici sečnice MM_1(obr. I.1). Keď časový interval zmenšujeme nad všetky medze $\Delta t\rightarrow 0$, sečnica sa začne približovať k dotyčnici

$tg\alpha \rightarrow tg\varphi$[1], čím dostávame presnejšie určenie rýchlosti v bode M tzv. okamžitú rýchlosť.

$$v=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\overline{v}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{x\left(t+\Delta t\right)-x\left(t\right)}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$$

Okamžitá rýchlosť je teda derivácia dráhy podľa času, t.j. limita, ku ktorej smeruje priemerná rýchlosť pri nekonečnom zmenšovaní časového intervalu. Geometricky zodpovedá smernici dotyčnice v danom bode. Predchádzajúce úvahy možno aplikovať aj na iné fyzikálne veličiny, pričom premenná nemusí byť len čas[2]. Napríklad:

- Ak chceme zvýšiť teplotu telesa s hmotnosťou m o $\Delta\tau$ stupňov, musíme mu dodať určité teplo ΔQ, ktoré je vo všeobecnom prípade nelineárnou funkciou teploty $Q\left(\tau\right)$.:

  $$\Delta Q=Q\left(\tau+\Delta\tau\right)-Q\left(\tau\right)$$

  Pomer

  $$\overline{c}=\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}=\frac{Q\left(\tau+\Delta\tau\right)-Q\left(\tau\right)}{\Delta\tau}$$

  je tzv. priemerná tepelná kapacita v teplotnom intervale $\langle\tau,\tau+\Delta\tau\rangle$ a rýchlosť, akou sa mení teplota telesa τ dodávaním tepelnej energie ΔQ určuje mernú tepelnú kapacitu:

  $$c=\lim_{\Delta\tau\rightarrow 0}\overline{c}=\lim_{\Delta\tau\rightarrow 0}\frac{Q\left(\tau+\Delta t\right)-Q\left(\tau\right)}{\Delta\tau}=\frac{dQ}{d\tau}$$

- Ak skúmame v nehomogénnom telese veľmi malý objem ΔV, s hmotnosťou Δm, priemerná hustota príslušného objemového elementu je podľa definície $\overline{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta V}$, pričom hustota v danom bode telesa je daná

  $$\rho=\lim_{\Delta V\rightarrow 0}\overline{\rho}=\lim_{\Delta V\rightarrow 0}\frac{m\left(\vec{r}+\Delta\vec{r}\right)-m\left(\vec{r}\right)}{\Delta V}=\frac{dm}{dV}$$

Derivácia je teda základným pojmom, s ktorým sa budeme vo fyzike často stretávať. Našťastie ju dokážeme mnohokrát veľmi jednoducho vypočítať priamo z definície:

---

[1] Všimnite si geometrický význam $tg\alpha$, $tg\varphi$. Prvý výraz zodpovedá smernici sečnice, druhý smernici dotyčnice.

[2] Býva zvykom časové derivácie označovať bodkou napr. $\dot{y}(t)$ a derivácie od premennej x čiarkou $y^{\prime}(x)$.

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ Nájdite (priamo z definície) rýchlosť telesa, ktoré sa pohybuje s rovnomerným zrýchlením a, s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Teleso za čas t prejde dráhu, ktorá sa rovná $s = \frac{1}{2}at^2$.

Riešenie: Podľa definície rýchlosti:

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} a \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} a \left[2t + \Delta t\right] = at \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

1.2 Pravidlá na výpočet derivácií.

Bolo by veľmi nepraktické vždy počítať deriváciu funkcie priamo z limity. Z tohto dôvodu sa v ďalšom výklade pokúsime nájsť všeobecné pravidlá, ktoré nám proces derivovania značne urýchlia:

Predpokladajme, že $u(x)$ a $v(x)$ sú funkcie, ktoré majú v určitom intervale (a,b) derivácie $u'(x)$, $v'(x)$. Hľadajme derivácie funkcií, ktoré sú ich súčtom, súčinom alebo podielom[3]:

- derivácia súčtu a rozdielu funkcií $F(x) = u(x) \pm v(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(u \pm v) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)\right] - \left[u(x) \pm v(x)\right]}{\Delta x} = \\ &= \frac{d}{dx}u \pm \frac{d}{dx}v = u'(x) + v'(x) \end{aligned}$$

- derivácia súčinu $F(x) = u(x)\,v(x)$. Vyjadrime[4]

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) &= u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) = \\ &= \left[u(x) + u'(x)\cdot\Delta x\right]\left[v(x) + v'(x)\cdot\Delta x\right] = \qquad (1.2) \\ &= u(x)\,v(x) + u'(x)\,v(x)\,\Delta x + u(x)\,v'(x)\cdot\Delta x \\ &\quad + u'(x)\cdot v'(x)\cdot\Delta x^2 \qquad (1.3) \\ F' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \qquad (1.4) \end{aligned}$$

[3] Pri odvádzaní budeme využívať diferenciály a preto menej trpezlivý čitateľ môže dôkazy preskočiť.

[4] Pri výpočte je vhodné prepísať definičný vzťah okamžitej rýchlosti zmeny funkcie F do tvaru: $F(x+\Delta x) = F(x) + \acute{F}(x)\cdot\Delta x$. Tento výraz predpokladá, že $\Delta x \to 0$.

$$\begin{aligned} F' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u'(x)\,v(x)\,\Delta x + u(x)\,v'(x)\cdot\Delta x + u'(x)\cdot v'(x)\cdot\Delta x^2}{\Delta x} = \\ &= u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) \qquad (1.5) \end{aligned}$$

Pravidlo (1.5) pre deriváciu súčinu dvoch funkcií sa dá rozšíriť na ľubovoľný počet funkcií:

$$\begin{aligned} y' &= [uvw]' = [(uv)\,w]' = (uv)'\,w + (uv)\,w' = \big(u'v + uv'\big)\,w + uvw' = \\ &= u'vw + uv'w + uvw' \qquad (1.6) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Príklad 2}}$ Nájdite deriváciu $y = x^n$ kde n je prirodzené čislo

Riešenie: Podľa (1.6) derivácia súčinu niekoľkých funkcií sa rovná súčtu súčinov, v ktorých postupne nahradzujeme každú funkciu jej deriváciou:

$$\begin{aligned} y &= x^n = xxx.....x \\ y' &= x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1} = nx^{n-1} \qquad (1.7) \end{aligned}$$

Vyžitím tohto výsledku a princípu superpozície dokážeme derivovať ľubovoľné polynómy a teda aj všetky funkcie[5]. $\diamondsuit$

- derivácia zloženej funkcie $F(x) = f(g(x))$ Opäť vypočítajme najskôr:

$$F(x+\Delta x) = f(g(x+\Delta x)) = f\big(g(x) + g'(x)\,\Delta x\big)$$

V ďalšom kroku pre lepšiu názornosť považujme $g(x)$ za premennú T, pričom pre $\Delta T = g'(x)\,\Delta x$

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) &= f(T+\Delta T) = f(T) + f'(x)\,\Delta T = f(g(x)) + f'(g(x))\,g'(x)\,\Delta x \\ F' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x)) + f'(g(x))\,g'(x)\,\Delta x - f(g(x))}{\Delta x} = \qquad (1.8) \\ &= f'(g(x))\,g'(x) \qquad (1.9) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Príklad 3}}$ Odvoďte vzťah pre deriváciu podielu dvoch funkcií $F(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

[5] Pozri kapitolu mocninné rady: takmer všetky funkcie sa dajú vyjadriť v tvare nekonečného polynómu.

Riešenie: Použijeme rovnice (1.5), (1.9):

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \left[u(x)v^{-1}(x)\right]' = u'(x)v^{-1}(x) + u(x)\left[-1 * v^{-2}(x)v'(x)\right] = \\
&= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

Pravidla o derivácii zložených funkcií možno využiť aj pri hľadaní derivácií inverzných funkcií:

$\boxed{\text{Príklad 4}}$ Nájdite pomocou inverzných funkcií deriváciu $y = \sqrt[n]{x}$, $x > 0$ kde n je prirodzené číslo a funkcie $y = \arcsin x$, kde $x \in \langle -1, 1\rangle$; $y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Riešenie: Inverzná funkcia k $y = \sqrt[n]{x}$ je $x = y^n$, pre ktorú podľa (1.7) platí[6]:

$$
\begin{aligned}
x' &= ny^{n-1}y' \\
y' &= \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}
\end{aligned}
$$

Analogicky budeme postupovať aj v druhom prípade. Najskôr nájdime inverznú funkciu k $y = \arcsin x$ a zderivujme jej pravú a ľavú stranu podľa premennej x:

$$
\begin{aligned}
x &= \sin y \\
1 &= \cos y \cdot y'(x) \\
y'(x) &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

Veľmi častou deriváciou je tzv. logaritmická. Jej použitie si ilustrujme na nasledovnom príklade:

$\boxed{\text{Príklad 5}}$ Nájdime deriváciu funkcie $y = x^x$.

Riešenie: Funkciu y zlogaritmujeme a následne zderivujeme:

$$
\begin{aligned}
\ln(y) &= x \ln x \\
\frac{1}{y}y'(x) &= \ln x + 1 \\
y'(x) &= (\ln x + 1)\, y = (\ln x + 1)\, x^x
\end{aligned}
$$

[6] Uvedomme si, že derivujeme obe strany rovnice podľa premenej x. Funkcia y závisí od x $y(x)$ a preto jej derivácia je y'

Mohli sme postupovať aj iným spôsobom. Keďže platí:

$$x^x = e^{x \ln x}$$

potom použitím pravidla o derivovaní zložených funkcií:

$$\left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\left(\ln x + \frac{x}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$$

$\diamondsuit$

1.3 Využitie derivácii v matematike a fyzike.

V nasledujúcej časti si ukážeme použitie derivácii pri riešení bežných príkladov z fyziky:

1.3.1 Diferenciál funkcie, jeho význam a použitie.

Derivácia funkcie $y = f(x)$ je určená ako $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, tzn. že výraz $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ sa od seba líši tým menej, čím viac sa Δx blíži k nule. Môžeme teda písať:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \omega(\Delta x) \tag{1.10}$$

kde $\omega(\Delta x)$ je takou funkciou Δx, že $\lim_{\Delta x \to 0} \omega(\Delta x) = 0$. Zo vzťahu (1.10) potom platí:

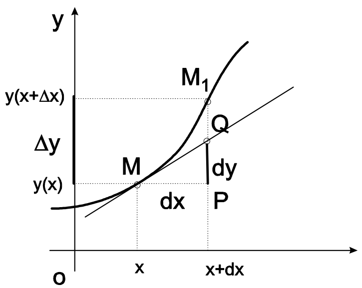
$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \omega(\Delta x)\,\Delta x \tag{1.11}$$

Prírastok Δy sa dá vyjadriť ako súčet dvoch členov. Oba sčítance sú pre $\Delta x \to 0$ nekonečne malými, druhý člen je však vyššieho rádu malosti. To znamená, že prvý sčítanec ovplyvňuje prírastok funkcie oveľa výraznejšie ako druhý. Hlavná časť prírastku sa nazýva *diferenciál funkcie* a zapisuje sa dy (na odlíšenie od prírastku Δy):

$$dy = f'(x)\,\Delta x \tag{1.12}$$

Prírastok Δx väčšinou označujeme dx[7] a preto $dy = f'(x)\,dx$. Geometrický význam najlepšie pochopíme z obr.I.2. Majme dva body $M[x, y]$ a $M_1[x + dx, y + \Delta y]$ a dotyčnicu k bodu M. Ak namiesto prírastku funkcie Δy vezmeme diferenciál dy, geometricky to znamená, že v okolí bodu M nahradíme graf funkcie dotyčnicou v bode M. Rozdiel medzi Δy a dy je daný úsečkou $QM_1 = \omega\Delta x = \omega dx$. Súčasne vidíme, že tento rozdiel bude tým menší, čím menšie dx si zvolíme.

[7] Stačí si uvedomiť, že pre špeciálnu funkciu $y = x$ platí $dy = dx = 1\Delta x$ a teda $\Delta x = dx$.



obr. I.2

$\boxed{\text{Príklad 6}}$ Meraním sme zistili dĺžku strany štvorca $x = 3cm$ Hodnota je zaťažená chybou $\Delta x' = 0,05cm$. Určte chybu, ktorej sa dopustíme pri výpočte obsahu plochy!

Riešenie: Pre obsah plochy platí: $S = x^2$. Nepresnosťou merania skutočná hodnota x môže byť z intervalu $x \in \langle x - \Delta x', x + \Delta x' \rangle$. Z tohto dôvodu výsledok je zaťažený chybou: $\Delta S = (x + \Delta x')^2 - (x - \Delta x')^2 = 4x\Delta x'$. Mohli sme postupovať oveľa jednoduchšie a rozptyl plochy odhadnúť diferenciálom: $dS \approx \Delta S \Longrightarrow dS = 2x\Delta x = 4x\Delta x'$. $\diamondsuit$

Diferenciály možno úspešne použiť nielen pri odhadoch chýb, ale aj pri odhadoch hodnôt funkcií v konkrétnych bodoch:.

$\boxed{\text{Príklad 7}}$ Odhadnite $y(x) = \sqrt{101}$

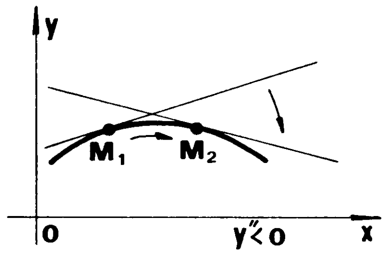
Riešenie: Prírastok funkcie $y(x) = \sqrt{x}$ pri zmene argumentu o Δx vypočítame podľa vzťahu (1.12). Za Δx zvoľme $\Delta x = 1$ Prírastok funkcie Δy vyšetrujme v okolí bodu $x = 100$:

$$\Delta y \sim dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\Delta x = \frac{1}{20}$$
$$y = y(100) + \Delta y = \sqrt{100} + \frac{1}{20} = 10,05$$ $\diamondsuit$

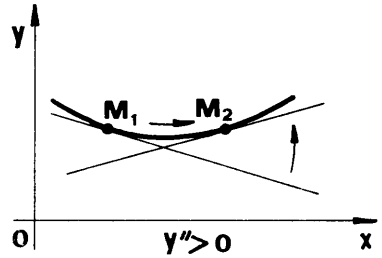
1.3.2 Hľadanie extrémov funkcií.

Vo fyzike mnohokrát vyšetrujeme priebeh fyzikálnych veličín $y(x)$ a zisťujeme, kedy nadobúdajú svoje lokálne extrémy. Hovoríme, že veličina $y(x)$ má v bode

x_0 *lokálne maximum*, ak do dosiahnutia bodu x_0 najskôr rástla a potom klesala. *Lokálne minimum* možno definovať analogicky. Keďže v bode extrému prechádza rastúca časť funkcie na klesajúcu alebo naopak, nutnou podmienkou existencie extrému je $y'(x) = 0$[8]. Vyplýva to nakoniec aj z obrázku I.3, kde v extréme je smernica dotyčnice rovnobežná s x ovou osou.



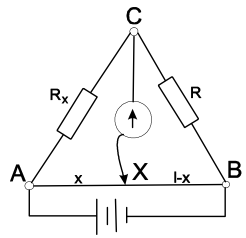
obr. I.3a



obr. I.3b

Tvrdenie však nemožno obrátiť. Ak platí, že $y'(x_0) = 0$, nemusí mať funkcia v tomto bode extrém. Napríklad funkcia $y = x^3$ nemá v bode $x = 0$ extrém, hoci $y'(0) = 0$. Z nulovosti derivácie však nevieme ešte posúdiť, či je v danom bode lokálne maximum alebo minimum. Na ich rozlíšenie sa používa trik, ktorý je zrejmý priamo z obrázku I.3[9]: Ak $y''(x_0) > 0$ funkcia má minimum, ak $y''(x_0) < 0$ funkcia má v danom bode maximum.

$\boxed{\text{Príklad 8}}$ Určte, ako musíme merať odpor rezistora metódou Wheatstonovho mostíka, aby relatívna chyba merania bola minimálna (obr.I.4).



obr. I.4

Riešenie: Pri meraní odporu sa poloha jazdca volí tak, aby mostík bol vyvážený a cez galvanometer neprechádzal žiaden prúd. Z rovností napätí $U_{AC} = U_{AX}$,

[8] Táto podmienka však nie je postačujúca. Napríklad pre funkciu $y = |x|$ neexistuje derivácia v bode $x = 0$, hoci ide o extrém (lokálne minimum).

[9] V prvom prípade je y' klesajúca funkcia a $y''(x) < 0$. V druhom prípade je to naopak.

$U_{CB} = U_{XB}$ odvodíme vzťah pre neznámy odpor R_x :

$$R_x = \frac{x}{l - x} R \tag{1.13}$$

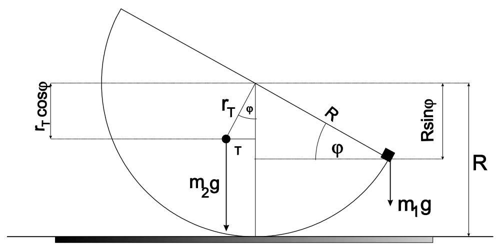
Pre relatívnu odchýlku platí[10]:

$$\frac{dR_x}{R_x} = \frac{l}{x\,(l - x)} dx \tag{1.14}$$

Posledný výraz je minimálny, ak $x\,(l - x)$ je maximálne t.j. $x = \frac{l}{2}$. Odpor teda meriame najpresnejšie vtedy, keď sa jazdec pri vyváženom mostíku nachádza približne v strede, čomu zodpovedá $R_x \approx R$ (1.13). Z tohto dôvodu sa v praxi najskôr menej presnými metódami odhadne neznámy odpor R_x. Potom sa použije mostík, do ktorého zaradíme odpor $R \approx R_x$ ◇

$\boxed{\text{Príklad 9}}$ Nájdite rovnovážnu polohu polgule s hmotnosťou m_2, na okraji ktorej je položené závažie s hmotnosťou m_1!

Riešenie: Teleso zaujme takú polohu, pri ktorej jeho potenciálna energia W bude minimálna. Nech poloha ťažiska T od stredu poľgule je r_T. Vyjadrime $W(\varphi)$ ako funkciu uhla φ a nájdime jej extrém:



obr. I.5

$$W = m_2 g\,(R - r_T \cos\varphi) + m_1 g\,(R - R\sin\varphi)$$

$$\frac{dW}{d\varphi} = 0 \implies m_2 g r_T \sin\varphi - m_1 g R \cos\varphi = 0$$

$$\implies tg\varphi = \frac{m_1 R}{m_2 r_T}$$

$$\left.\frac{d^2W}{d\varphi^2}\right|_{\varphi = arctg\left(\frac{m_1 R}{m_2 r_T}\right)} > 0$$

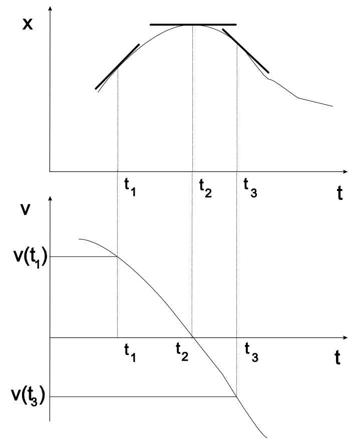
[10] Výchylku odporu R_x dôsledkom chyby merania polohy jazdca sme nahradili diferenciálom $dR_x = \frac{dR_x}{dx} dx = \frac{l - x + x}{(l - x)^2} R dx$

Poslednou rovnicou sme sa presvedčili, že v bode $\varphi = arctg\left(\frac{m_1 R}{m_2 r_T}\right)$ je naozaj minimum. ◇

1.3.3 Kvalitatívna analýza pohybov

Pri kvalitatívnej analýze pohybov využívame geometrický význam derivácie. Číselnú hodnotu derivácie v danom bode určuje smernica dotyčnice s $x-ovou$ osou.

$\boxed{\text{Príklad 10}}$ Na obrázku I.6 je znázornená závislosť polohy telesa v čase t. Urobte kvalitatívnu analýzu a načrtnite priebeh rýchlosti.

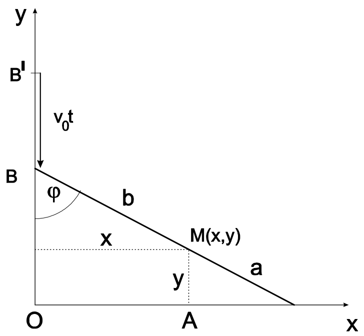


obr. I.6

Riešenie: V čase $t < t_2$ je derivácia kladná $\frac{dx}{dt} > 0$, teleso má kladnú rýchlosť a ide dopredu. V čase $t = t_2$ zastane, pretože $\frac{dx}{dt} = 0$. Rýchlosť telesa v neskorších časoch bola záporná: $\frac{dx}{dt} < 0$ a teleso sa pohybovalo dozadu (napr. cúvalo). ◇

1.3.4 Využitie derivácii v kinematike (výpočet rýchlosti a zrýchlení)

$\boxed{\text{Príklad 11}}$ Konce pravítka na obr.I.7 sa kĺžu po kolmých priamkach OX a OY, pričom bod B sa pohybuje konštantnou rýchlosťou v_0. Nájdite rovnicu trajektórie ľubovolného bodu M pravítka a jeho rýchlosť, ak viete, že pravítko v čase t splývalo s osou y.



obr. I.7

Riešenie: Vyberme na pravítku ľubovolný bod $M\,[x,y]$ a nájdime jeho rýchlosť. Z obrázka I.7 vyplýva:

$$x = b\sin\varphi, \quad y = a\cos\varphi$$

Ide o parametrické vyjadrenie elipsy, o čom sa ľahko presvedčíme vydelením rovníc a a b, ich umocnením a následným sčítaním:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Pre veľkosť rýchlosti a jej zložky platí:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = -a\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} \tag{1.15}$$

$$v = \sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \tag{1.16}$$

Uhlové zrýchlenie $\frac{d\varphi}{dt}$ určíme z počiatočných podmienok. V čase $t = 0$ splývalo celé pravítko s osou y. Po uplynutí času t bod B prešiel dráhu v_0t:

$$(a+b) - (a+b)\cos\varphi = v_0t \tag{1.17}$$

Zderivovaním:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0}{(a+b|}\frac{1}{\sin\varphi} \tag{1.18}$$

a následným dosadení do (1.16) určíme hľadanú rýchlosť:

$$v = \frac{v_0}{a+b}\sqrt{a^2 + b^2\cot g^2\varphi}$$

$\diamondsuit$

Príklad 12 Nájdite silu, aká musí pôsobiť na teleso, aby sa pohybovalo po elipse konštantnou uhlovou rýchlosťou ω.

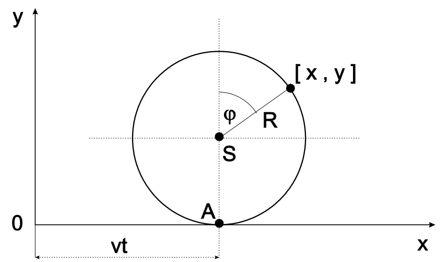
Riešenie: Podľa Newtonovho zákona na teleso musí pôsobiť sila $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$, ktorú určíme zo zrýchlenia:

$$x = a\cos\omega t \quad \dot{x} = -\omega a\sin\omega t \quad \ddot{x} = -\omega^2 a\cos\omega t$$
$$y = b\sin\omega t \quad \dot{y} = \omega b\cos\omega t \quad \ddot{y} = -\omega^2 b\sin\omega t$$
$$\overrightarrow{F} = m\left(-\omega^2 a\cos\omega t, -\omega^2 b\sin\omega t\right) = -m\omega^2\overrightarrow{r}$$

Výsledná sila smeruje do stredu elipsy, pohyb je centrálny. $\diamondsuit$

Príklad 13 Obruč sa valí po vodorovnej podložke uhlovou rýchlosťou ω. Dokážte, že bod A je okamžitou osou otáčania obruče (t.j. jeho rýchlosť je nulová a vektor rýchlosti ľubovoľného bodu obruče je kolmý na polohový vektor vzťahovaný k bodu A).

Riešenie: Ťažisko telesa sa pohybuje rýchlosťou $v = \omega R$. Určme polohu a rýchlosť jednotlivých bodov na obruči (obr. I.8).



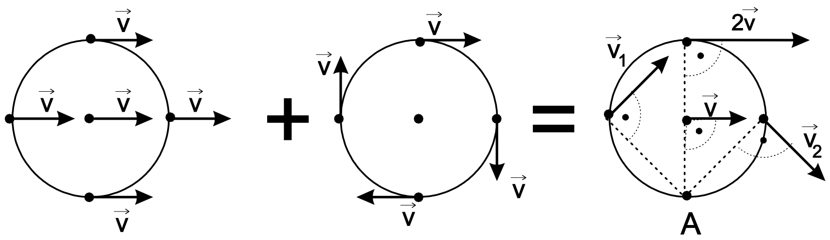
obr. I.8

$$x = vt + R\sin\varphi \qquad y = R\cos\varphi + R$$
$$\dot{x} = \omega R + \omega R\cos\varphi \qquad \dot{y} = -\omega R\sin\varphi$$

Polohový vektor $\vec{r}$ a rýchlosť vzhľadom k bodu $A\,[vt, 0]$ je:

$$\vec{r} = [R\sin\varphi, R\cos\varphi + R] \qquad \vec{v} = [\omega R + \omega R\cos\varphi, -\omega R\sin\varphi]$$

Ich skalárny súčin je $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ a preto oba vektory sú na seba kolmé. Navyše rýchlosť bodu A je nulová a podľa defínície je os, prechádzajúca bodom A okamžitou. Celá situácia sa dá znázorniť graficky (obr. I.9). Teleso vykonáva dva pohyby: translačný a rotačný, ktorý treba zložiť:



obr. I.9

♢

1.3.5 Derivácia vektorov

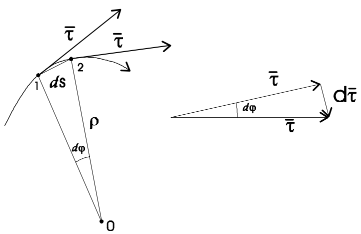
Pravidlá pre derivovanie skalárnych funkcií možno úspešne použiť aj pri derivovaní vektorov:

Oskulačná kružnica V kinematike sa často stretávame so situáciou, keď vektor zrýchlenia rozkladáme na tangenciálnu a normálovú časť. Vektor rýchlosti má v každom bode trajektórie smer dotyčnice :

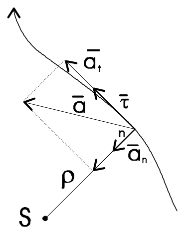
$$\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{\tau} \tag{1.19}$$

kde $\overrightarrow{\tau}$ je jednotkový vektor v smere dotyčnice k trajektórii. Zderivovaním (1.19) určíme zrýchlenie:

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\overrightarrow{\tau}) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau} + v\frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$$



obr. I.10a



obr. I.10b

Zrýchlenie $\overrightarrow{a}$ sme rozložili na normálovú $\overrightarrow{a_n}$ a tangenciálovú zložku $\overrightarrow{a_\tau}$. Zaveďme pozdĺž trajektórie nový parameter "dĺžka trajektórie" s, definovaný vzťahom: $\frac{ds}{dt} = v$ a vo výraze pre tangenciálne zrýchlenie nahraďme derivovanie podľa času t derivovaním podľa parametra s:

$$\overrightarrow{a_n} = v\frac{d}{dt}\overrightarrow{\tau} = v\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = v^2\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} \tag{1.20}$$

Výraz $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}$ nezávisí od časového priebehu pohybu, ale iba od geometrického tvaru trajektórie. Smer vektora $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}$ je kolmý na smer vektora $\overrightarrow{\tau}$, o čom sa môžeme ľahko presvedčiť[11]:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{\tau} &= 1 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{\tau}) = 2\frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt} \cdot \overrightarrow{\tau} = 0 \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{\tau}}{dt} \perp \overrightarrow{\tau} \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} \perp \overrightarrow{\tau} \end{aligned}$$

Aproximovaním časti trajektórie oskulačnou kružnicou s polomerom krivosti ρ, pre diferenciálnu charakteristiku dostaneme: $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = -\frac{d\varphi}{\rho d\varphi}\overrightarrow{n}$[12] kde $\overrightarrow{n}$ je normálový vektor orientovaný do stredu oskulačnej kružnice. Dosadením do (1.20)

$$\overrightarrow{a_n} = v^2\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} = -\frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{n} \tag{1.21}$$

$\boxed{\text{Príklad 14}}$ Nájdime polomer krivosti paraboly $y = px^2$ v bode $(0,0)$.

Riešenie: Vzhľadom na skutočnosť, že polomer krivosti je daný geometrickým tvarom trajektórie a nie charakterom pohybu po tejto krivke, vytvorme si nasledovný fyzikálny model: Predpokladajme, že teleso sa v smere osi x pohybuje rýchlosťou "$v = 1ms^{-1}$" $\Longrightarrow x = t$ a preto $y = px^2 = pt^2$. Pre rýchlosť a zrýchlenie platí[13]:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{x}\ \vec{i} + \dot{y}\ \vec{j} = 1\,\vec{i} + 2pt\,\vec{j} \\ \vec{a} &= \frac{d}{dt}\vec{v} = 2p\,\vec{j} \end{aligned}$$

Dotyčnicový a normálový vektor v ľubovoľnom mieste trajektórie nájdeme z derivácie $\frac{dy}{dx}$. Tá totiž určuje tangens uhla, ktorý zviera dotyčnica s x ovou osou.

[11] Smer vektora $\frac{d}{dt}\overrightarrow{\tau}$ je totožný so smerom vektora $\frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds}$ (1.20).

[12] Veľkosť vektora $|d\overrightarrow{\tau}| = 1d\varphi$

[13] pri ďalších úpravách nebudeme písať jednotky, iba si uvedomíme, že ak za t dosadíme sekundy, potom poloha telesa bude v metroch.

Pre dotyčnicové $\overrightarrow{\tau}$ a normálové vektory $\overrightarrow{n}$ k dráhe $y = px^2$ potom platí:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\tau} &= \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2\varphi + 1}}\,\vec{i} + \sqrt{\frac{\tan^2\varphi}{\tan^2\varphi + 1}}\,\vec{j} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{(2pt)^2 + 1}}\,(1, 2pt) \\
\overrightarrow{n} &= \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} = \\
&= \sqrt{\frac{1}{(2pt)^2 + 1}}\,(-2pt, 1)
\end{aligned}
$$

Veľkosť normálového zrýchlenia:

$$
\begin{aligned}
a_n = \overrightarrow{n} \cdot \vec{a} &= \sqrt{\frac{1}{(2pt)^2 + 1}}\,(-2pt, 1) \cdot (0, 2p) = \frac{2p}{\sqrt{(2pt)^2 + 1}} = \\
&= \frac{(2pt)^2 + 1}{\left[(2pt)^2 + 1\right]^{3/2}}2p = \frac{v^2}{\left[(2pt)^2 + 1\right]^{3/2}}2p \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$

Porovnaním výrazov (1.21, 1.22) pre polomer krivosti v ľubovoľnom čase t dostávame:

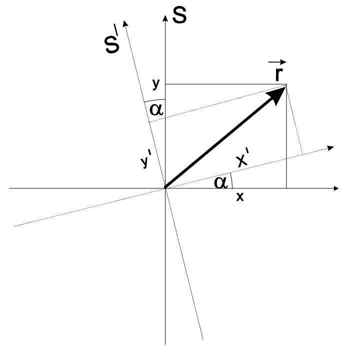
$$\rho = \frac{\left[(2pt)^2 + 1\right]^{3/2}}{2p}$$

Pre konkrétny čas $t = 0s$:

$$\rho = \frac{1}{2p}$$

◇

Neinerciálne vzťažné sústavy Uvažujme o hmotnom bode s hmotnosťou m, ktorého poloha vzhľadom na súradnicovú sústavu S je daná polohovým vektorom $\overrightarrow{r}$. Majme súradnicovú sústavu S', ktorá sa otáča uhlovou rýchlosťou $\overrightarrow{\omega}$ okolo sústavy S. Nájdime silu, pôsobiacu na tento objekt z hľadiska pozorovateľa v súradnicovom systéme S'.



obr. I.11

Polohový vektor $\overrightarrow{r}$ zapíšme v báze čiarkovanej sústavy, ale zderivujme ho z hľadiska pozorovateľa v súradnicovej sústave S.[14] Takto získame vzťah medzi vektormi $\overrightarrow{v}$ a $\overrightarrow{v'}$[15]

$$\overrightarrow{r} = x'\,\overrightarrow{i'} + y'\,\overrightarrow{j'}$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v} = \dot{\overrightarrow{r}} &= \dot{x}'\,\overrightarrow{i'} + x'\,\dot{\overrightarrow{i'}} + \dot{y}'\,\overrightarrow{j'} + y'\,\dot{\overrightarrow{j'}} = \dot{x}'\,\overrightarrow{i'} + \dot{y}'\,\overrightarrow{j'} + x'\,\dot{\overrightarrow{i'}} + y'\,\dot{\overrightarrow{j'}} = \\
&= \overrightarrow{v'} + x'\left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{i'}\right) + y'\left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{j'}\right) = \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{\omega} \times \left(x'\,\overrightarrow{i'} + y'\,\overrightarrow{j'}\right) = \\
&= \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'} \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

Rovnakým spôsobom postupujeme ďalej, pričom využijeme rovnicu (1.23) [16]:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a} = \dot{\overrightarrow{v}} &= \dot{v}'_x\,\overrightarrow{i'} + v'_x\,\dot{\overrightarrow{i'}} + \dot{v}'_y\,\overrightarrow{j'} + v'_y\,\dot{\overrightarrow{j'}} + \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r'} + \overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{v'} + \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right) = \\
&= \overrightarrow{a'} + 2\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v'} + \dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r'} + \overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right)
\end{aligned}
$$

[14] Pri výpočtoch derivácií musíme rozlišovať, v ktorej súradnicovej sústave deriváciu robíme. Z hľadiska sústavy S bázové vektory $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ sa s časom nemenia (stoja): $\frac{d}{dt}\overrightarrow{i} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$, pričom $\overrightarrow{i'}$, $\overrightarrow{j'}$ sa v tejto sústave točia $\frac{d}{dt}\overrightarrow{i'} \neq \overrightarrow{0}$ $\frac{d}{dt}\overrightarrow{j'} \neq \overrightarrow{0}$. Z hľadiska S' je to samozrejme opačne.

[15] Pri úpravách využijeme, že pre deriváciu ľubovoľného jednotkového vektora $\overrightarrow{e}$ (teda aj bázových vektorov $\overrightarrow{i'}$, $\overrightarrow{j'}$) otáčajúceho sa uhlovou rýchlosťou $\overrightarrow{\omega}$ platí:

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{e} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{e}$$

Stačí si uvedomiť, že za čas dt opíše jednotkový vektor oblúk s dĺžkou $1d\varphi$: $d\overrightarrow{e} = d\varphi\left(\frac{\overrightarrow{\omega}}{\omega} \times \overrightarrow{e}\right) \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{e}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{e}$

[16] Nezabúdajme, že vektor $\vec{r}$ je rovnaký v oboch sústavách len je vyjadrený v iných bázach: $\vec{r} = \vec{r}\,'$

Sila pôsobiaca na teleso v čiarkovanej súradnicovej sústave:

$$\overrightarrow{F'} = m\overrightarrow{a'} = m\overrightarrow{a} - 2m\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v'} - m\,\dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r'} - m\overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right) \qquad (1.24)$$

Podľa vzťahu 1.24, teleso v rotujúcej sústave "cíti" okrem sily $m\overrightarrow{a}$ aj ďalšie sily, ktoré nemajú pôvod vo vzájomnej interakcii. Ide o Coriolisovu silu $\overrightarrow{F}_c = -2m\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{v'}$, Eulerovu $-m\,\dot{\overrightarrow{\omega}} \times \overrightarrow{r'}$ a dostredivú $-m\overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r'}\right)$. Vplyv Coriolisovej sily sa prejavuje na Zemi množstvom efektov: Na severnej pologuli sa jej vplyvom viacej vymývajú pravé brehy riek a dochádza k väčšiemu opotrebovávaniu pravých koľajníc na tratiach, po ktorých idú vlaky iba jedným smerom. Dochádza tiež k stáčaniu pasátových vetrov, ktoré vanú od severu a špirálovitému stáčaniu vzdušných prúdov v cyklónoch. Z matematického vyjadrenia Coriolisovej sily, je zrejmé, že uvedené efekty sú na severnej a južnej pologuli opačné.

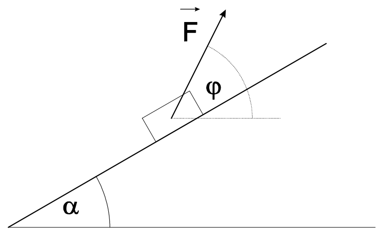
1.4 Cvičenia

$\boxed{1.1.}$ Pomocou derivácie inverznej funkcie nájdite derivácie nasledovných funkcií: $y = \log_a x$, $y = arctgx$, $y = arc\cos x$
Riešenie: $(x\ln a)^{-1}$, $(1+x^2)^{-1}$, $-(1-x^2)^{-0{,}5}$

$\boxed{1.2.}$ Derivujte $(x^2+1)^{\sqrt{x-1}}$, $x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$, $a^x x^a$, $x^{\sin x}$, $x^2\log_3 x$, $\sqrt[x]{x}$
Riešenie: $(x^2+1)^{\sqrt{x-1}}\left[\frac{\ln(x^2+1)}{2\sqrt{x-1}} + \frac{2x\sqrt{x-1}}{x^2+1}\right]$,
$\arctan x$, $a^x x^a\left(\frac{a}{x} + \ln a\right)$, $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$, $x\left(2\log_3 x + \frac{1}{\ln 3}\right)$, $\sqrt[x]{x}\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\boxed{1.3.}$ Je daná funkcia $f(x) = e^{\left[\frac{x}{10}(1-x)\right]}$. Vypočítajte jej približnú hodnotu v bode $x = 1,05$.
Riešenie: $f(1,05) \approx 0,995$

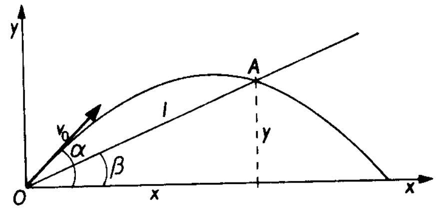
$\boxed{1.4.^*}$ Na naklonenej rovine s elevačným uhlom α je kváder s hmotnosťou m. Určte, pod akým uhlom φ musí pôsobiť sila F na kváder, aby bola pri rovnomernom pohybe telesa nahor minimálna. Koeficient trenia je μ.



obr. I.12

Riešenie: $tg\varphi = \frac{\mu + tg\alpha}{1 - \mu tg\alpha}$

$\boxed{1.5.^*}$ Z bodu O na šikmej rovine je vrhnuté teleso rýchlosťou v_0. Nájdite uhol, pod ktorým musí byť teleso vrhnuté, aby vzdialenosť l bola maximálna. Predpokladajte homogénne gravitačné pole.



obr. I.13

Riešenie: $tg\alpha = tg\beta + \frac{1}{\cos\beta}$

$\boxed{1.6.^*}$ Určte dĺžku jednozvratnej páky tak, aby sme na zdvihnutie telesa s tiažou G_1 umiestneného vo vzdialenosti a museli vyanaložiť minimálnu silu. Lineárna hustota materiálu páky je γ.
Riešenie: $F = \sqrt{2ag\gamma G_1}$