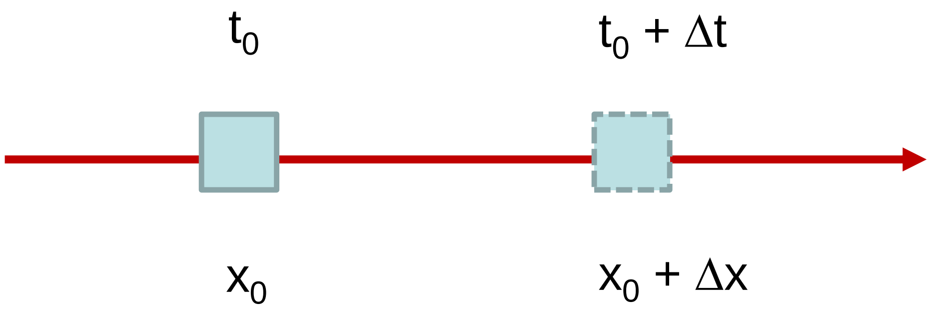
Mocninné rady

Mocninné rady

- Fyzikálna motivácia

Predpokladajme, že poloha telesa v čase t_0 je určená súradnicou x_0. Pokúsme sa rýchlo a efektívne vypočítať jeho novú polohu po uplynutí času Δt



Mocninné rady

- Fyzikálna motivácia

Rovnomerný pohyb

$$x(t+\Delta t) \quad = \quad x(t_0)+v\Delta t = x(t_0)+\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0}(t-t_0)$$

Rovnomerne zrýchlený pohyb

$$x(t+\Delta t) \quad = \quad x(t_0)+v\Delta t+\frac{1}{2}a[\Delta t]^2 = x(t_0)+\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0}(t-t_0)+\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=t_0}[\Delta t]^2$$

Rovnomerne zrýchlene zrýchlený pohyb

$$x(t+\Delta t) \quad = \quad x(t_0)+v(t_0)\Delta t+\frac{1}{2}a(t_0)[\Delta t]^2+\frac{1}{3!}\alpha(t_0)[\Delta t]^3$$

Vylepšenia

Nekonečne veľa vylepšení

$$x(t+\Delta t) \quad = \quad x(t_0)+\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0}(t-t_0)+\frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=t_0}(t-t_0)^2+$$

$$=\frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}\Big|_{t=t_0}(t-t_0)^3+\ldots$$

Mocninné rady

Fyzikálna motivácia

Rýchlosť v čase t_0 Zrýchlenie v čase t_0

$$x(t) = x(t_0) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}(t-t_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=t_0}(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_{t=t_0}(t-t_0)^3 + \dots$$

Zrýchlenie zrýchlenia v čase t_0

Zovšeobecnenie na základe fyzikálnej skúsenosti:

$$x(t) = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + a_3(t-t_0)^3 + a_4(t-t_0)^4 + \dots$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right]_{t=t_0}}$$

V matematike by to mohlo teda vyzerať

Taylorov rozvoj v okolí bodu x_0

$$f\left(x\right)=a_0+a_1\left(x-x_0\right)+a_2\left(x-x_0\right)^2+a_3\left(x-x_0\right)^3+a_4\left(x-x_0\right)^4+\ldots$$

$$a_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f\left(x\right)}{dx^n}\right]_{x=x_0}$$

Mac Laurinov rad – v podstate Taylorov rozvoj v okolí bodu x_0=0

$$f\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

$$a_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f\left(x\right)}{dx^n}\right]_{x=x_0}$$

Hľadanie koeficientov

Skutočne:

$$\boxed{f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \ldots \Rightarrow a_0 = f(x_0)}$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \ldots \Rightarrow a_1 = f'(x_0)$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\bullet 2a_3(x-x_0)^1 + 4\bullet 3a_4(x-x_0)^2 + \ldots \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

$$f'''(x) = 3\bullet 2a_3 + 4\bullet 3\bullet 2a_4(x-x_0)^1 + \ldots \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!} f'''(x_0)$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}$$

$$a_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_{x=x_0}$$

Využitie

- **Matematické dôkazy** – do úvahy bereme všetky členy rozvoja
- **Aproximácie funkcií** – do úvahy, za istých okolností, stačí zobrať do úvahy iba pár členov

Rozvoje niektorých funkcií v okolí bodu $x_0=0$

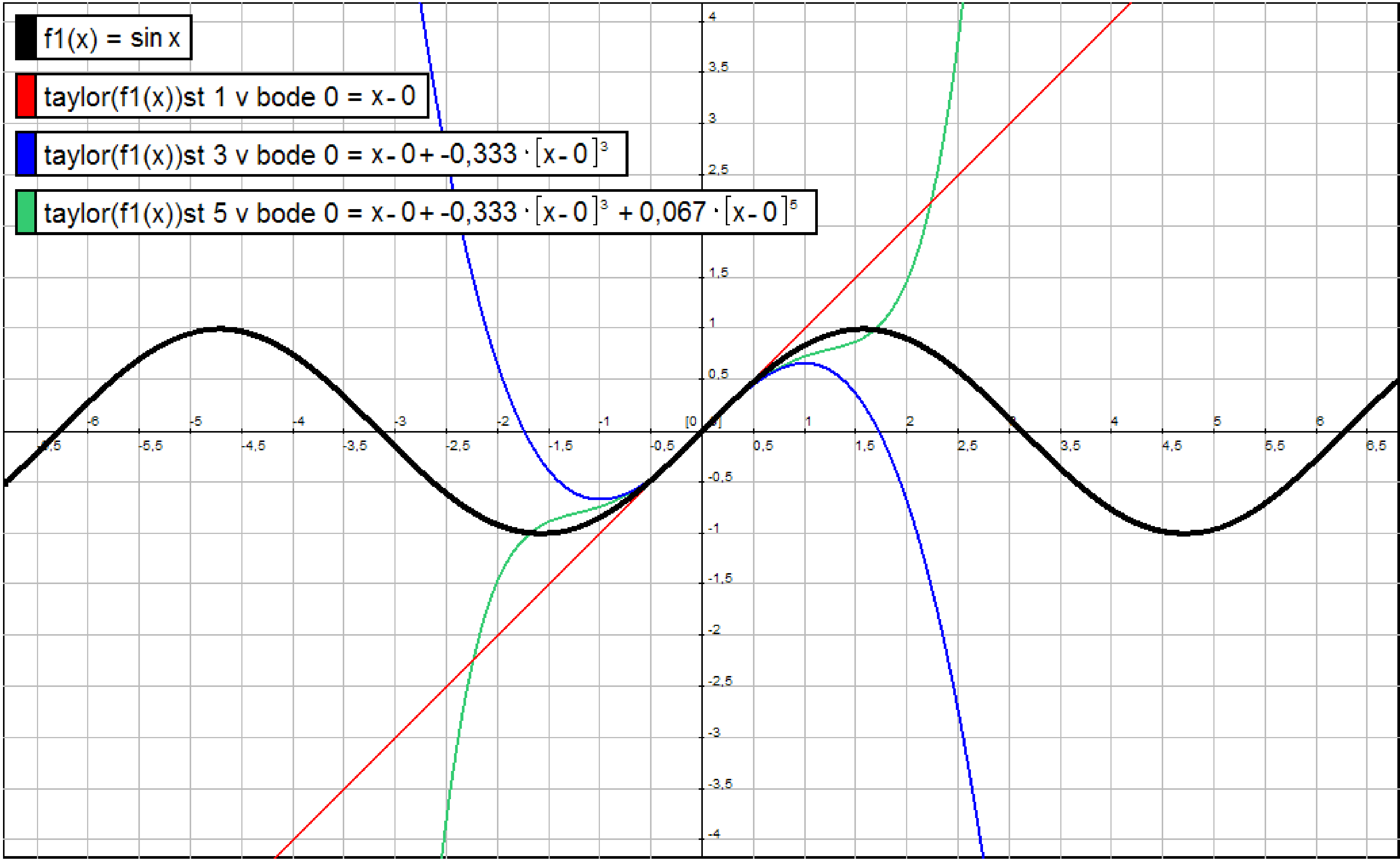
$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}$$

Nepárna funkcia

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}$$

Párna funkcia

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots}$$


f1(x) = sin x
taylor(f1(x))st 1 v bode 0 = x - 0
taylor(f1(x))st 3 v bode 0 = x - 0 + -0,333 · [x - 0]³
taylor(f1(x))st 5 v bode 0 = x - 0 + -0,333 · [x - 0]³ + 0,067 · [x - 0]⁵

Určovanie hodnôt funkcií v konkretnych bodoch

$$\underbrace{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots}$$

$$\boxed{x = 1} \Rightarrow \boxed{e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots}$$

$$\boxed{e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}}$$

Častokrát sa používajú substitúcie:

$$x \to x^5$$

$$e^{x^5} = 1 + \frac{x^5}{1!} + \frac{x^{10}}{2!} + \frac{x^{15}}{3!} + \frac{x^{20}}{4!} + \ldots$$

$$e^x \sin x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) \times \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = x + x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \ldots.$$

Výpočet limít

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots}{x}=\lim_{x\to 0}\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right]=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right]}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^1}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\frac{x^5}{6!}-\ldots\right]=0$$

Eullerov zťah

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \quad \text{resp.} \quad \sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!} + \frac{x^{5}}{5!} + \frac{x^{6}}{6!} + \frac{x^{7}}{7!} \ldots$$

$$e^{ix} = 1 + \frac{(ix)}{1!} + \frac{(ix)^{2}}{2!} + \frac{(ix)^{3}}{3!} + \frac{(ix)^{4}}{4!} + \frac{(ix)^{5}}{5!} + \frac{(ix)^{6}}{6!} + \frac{(ix)^{7}}{7!} \ldots$$

$$e^{ix} = \boxed{1} \boxed{+ \frac{(ix)}{1!}} \boxed{- \frac{(x)^{2}}{2!}} \boxed{- \frac{i(x)^{3}}{3!}} \boxed{+ \frac{(x)^{4}}{4!}} \boxed{+ \frac{i(x)^{5}}{5!}} \boxed{- \frac{(x)^{6}}{6!}} \boxed{- \frac{i(x)^{7}}{7!}} \ldots$$

$$e^{ix} = \underbrace{\boxed{1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} - \frac{x^{6}}{6!}}}_{\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} - \frac{x^{6}}{6!}}} + \ldots i \underbrace{\boxed{\left[x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} - \frac{x^{7}}{7!} + \ldots \right]}}_{\boxed{i \sin x = i\left[x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} - \frac{x^{7}}{7!} + \ldots \right]}}$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Využitie TR

- Výpočet integrálov

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \ldots}{x} dx = \ln|x| + x + \frac{x^2}{2 \times 2!} + \frac{x^3}{3 \times 3!} + \ldots$$

Integrand sa rozloží do mocninného radu a integruje sa člen po člene

Využitie TR

Pre mnohé praktické účely netreba celý rad sčítavať

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{1/2} = 1 + \frac{(1/2)}{1!} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^4}{4!} + \dots$$

$$e^{1/2} = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots \qquad b_n = \frac{(0,5)^n}{n!}$$

Členy radu rýchlo klesajú a vyššie členy radu zvyšujú presnosť výsledku na vyšších desatiných miestach, pričom **skoršie desatinné miesta sa už nemenia**

Využitie TR

Príspevky prvých piatich členov rozvoja funkcie

$$\sqrt{e}$$

$$b_n = \frac{(0,5)^n}{n!}$$

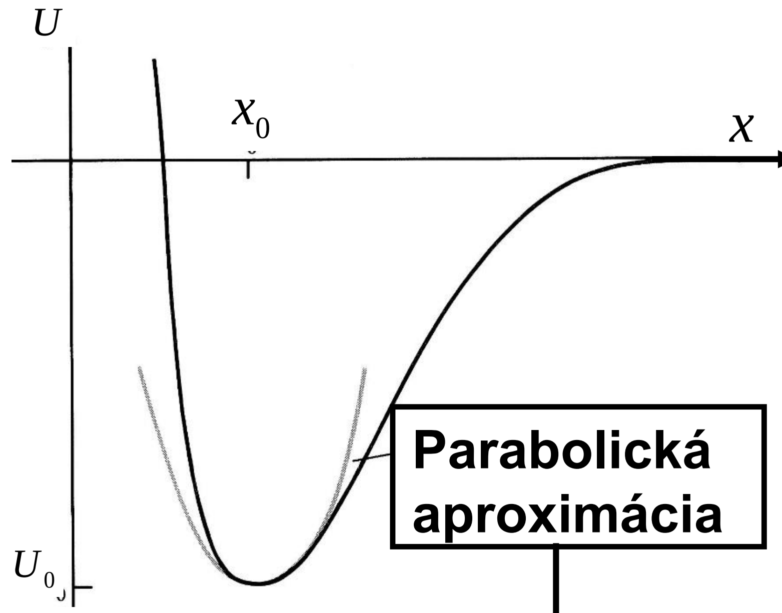
n	0	1	2	3	4	5
b_n	1	0.5	0.125	0.020833	0.002604	0.000260

Členy radu rýchlo klesajú a vyššie členy radu zvyšujú presnosť výsledku na vyšších desatiných miestach, pričom **skoršie desatinné miesta sa už nemenia**

Teleso v rovnovážnej polohe

Kmitanie okolo rovnovážnej konfigurácie

- široké aplikácie (teleso na pružine, dvojatómová molekula, atóm v kryštálovej mriežke)
- ∃ návratnej sily **F=-kx** → **U=1/2kx²**



Všetky kmity majú charakter harmonického pohybu, ak amplitúdy dostatočne malé

$$U(x)=U_{x_0}+\cancel{\boxed{\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0}}(x-x_0)}+\frac{1}{2}\boxed{\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0}}(x-x_0)^2+\cancel{\frac{1}{6}\left(\frac{d^3U}{dx^3}\right)_{x_0}(x-x_0)^2}+\ldots$$

0

=k >0
MINIMUM V ROVNOVÁŽNEJ POLOHE

Ak bežné výchyľky dostatočne malé → 0

$$\boxed{U(x)\approx U_{x_0}+\frac{1}{2}k\left(x-x_0\right)^2}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \\ + \ldots \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

substitúcie

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \\ + \ldots \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + \ldots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2 \bullet 1!} - \frac{1 \bullet x^2}{2^2 \bullet 2!} + \frac{1 \bullet 3 \bullet x^3}{2^3 \bullet 3!} + \\ + \ldots \frac{(-1)^{n-1} 1 \bullet 3 \bullet 5 \ldots (2n-3)}{2^n \bullet n!}x^n + \ldots$$

Urobte rozvoj kinetickej energie a ukážte, že v klasickej mechanike možno použiť vzťah:

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\boxed{x}}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2 \bullet 1!} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2!}x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\boxed{\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)}}} = \left(1+\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)}{2 \bullet 1!} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2!}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{3!}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^3 + \ldots$$

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1\boxed{-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right] = m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots - 1\right]$$

Lineárnosť fyzikálnych zákonov

- **Lineárnosť mnohých fyzikálnych zákonov**

(Ohmov zákon, Hookov zákon, zákon tepelnej rozťažnosti)

Sila pôsobiaca v rovnovážnej polohe F(0)=0

$$F(x) = \boxed{F(0)} + \frac{1}{1!}\boxed{F'(0)}\,x + \boxed{\frac{1}{2!}F''(0)x^2 + \frac{1}{3!}F'''(0)\,x^3 + \ldots.}$$

-K – tuhosť pružiny

Bežné výchylky x sú dostatočne malé na to, aby sa mohli všetky vyššie členy rozvoja zanedbať

Zákony sú lineárne v dostatočne malom okolí od bodu, v ktorom sa robí rozvoj