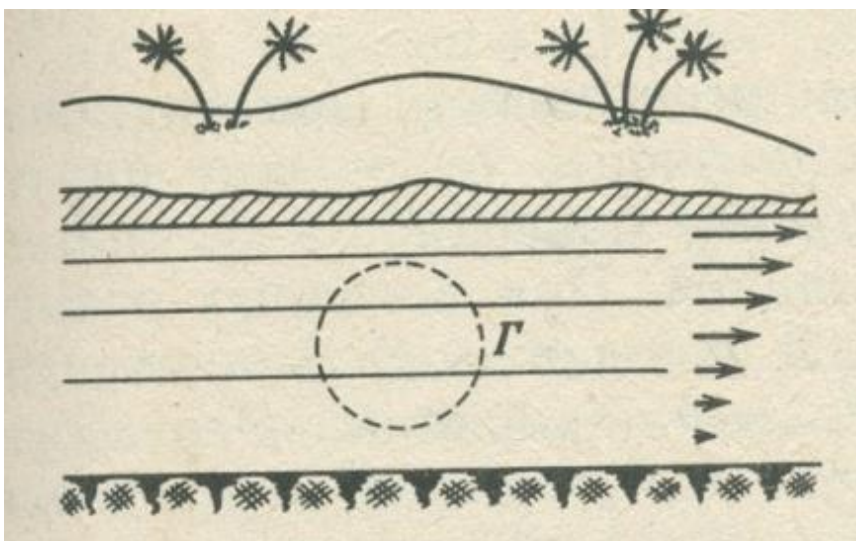
Úvod do vektorovej algebry

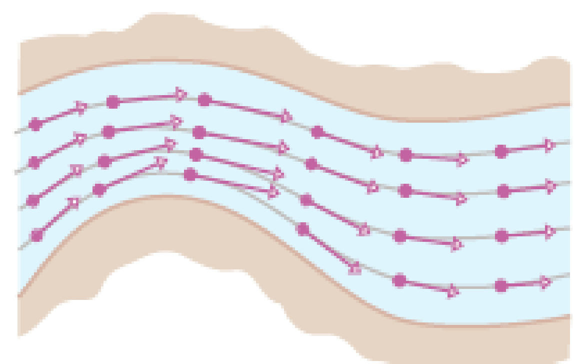
Vektorové pole

V každom bode zadefinujeme vektor, ktorý sa môže meniť s časom $\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)}$

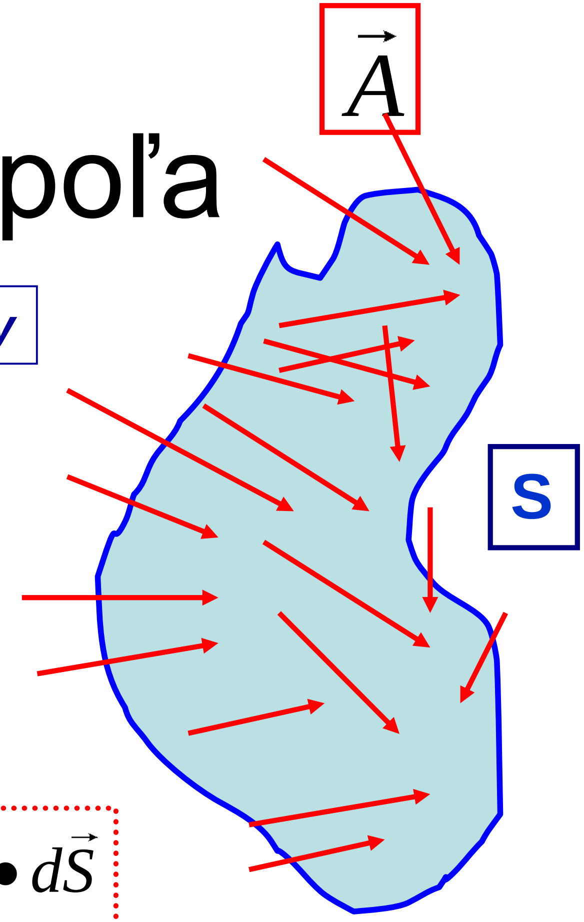
$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}.$$

<u>Príklad:</u> voda v rieke, v každému bodu rieky môžme priradiť vektor rýchlosti kvapaliny v tomto bode $\boxed{\vec{v}(\vec{r},t)}$





Tok vektorového poľa



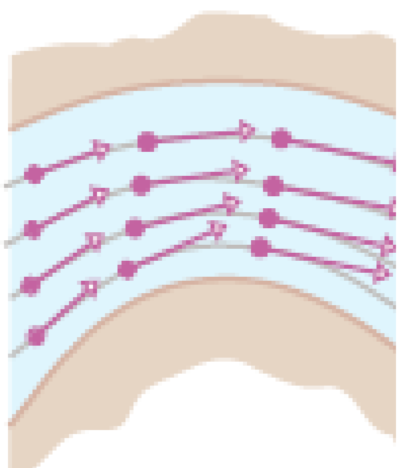
Vektor plochy

Tok vektora **A** cez plochu S

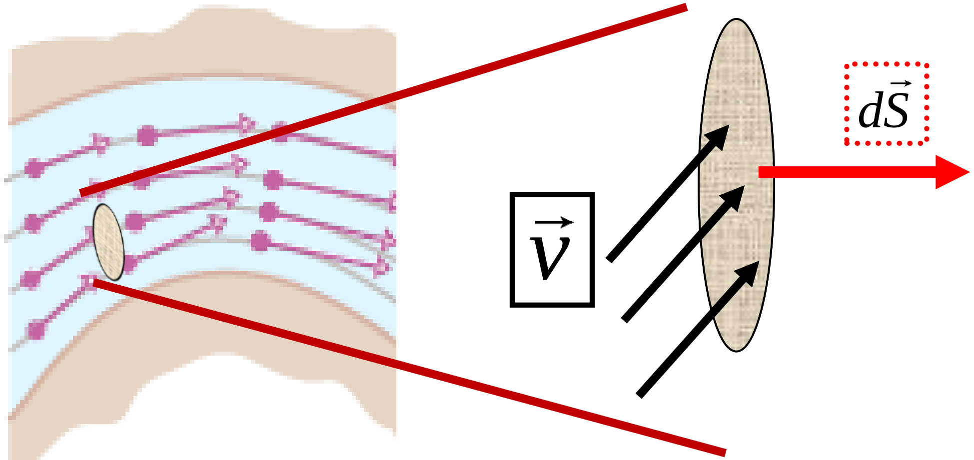
$$N = \int_S \vec{A} \bullet d\vec{S}$$

Význam pochopíme v hydrodynamika

$$N = \int_S \vec{v} \bullet d\vec{S}$$

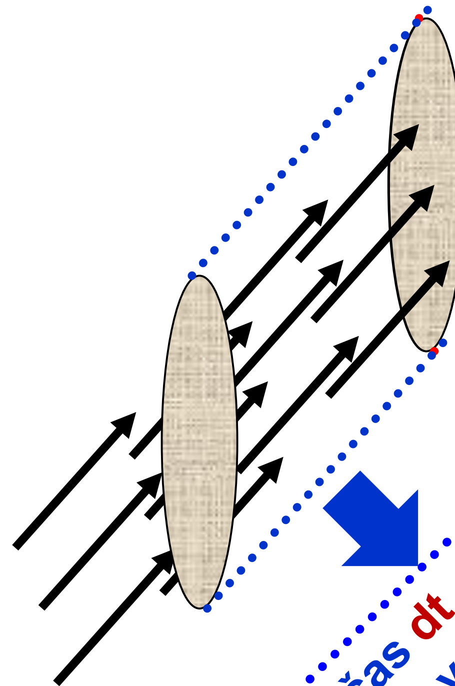


vektorové pole rýchlosti:
rýchlosť kvapaliny v ľubovolnom bode



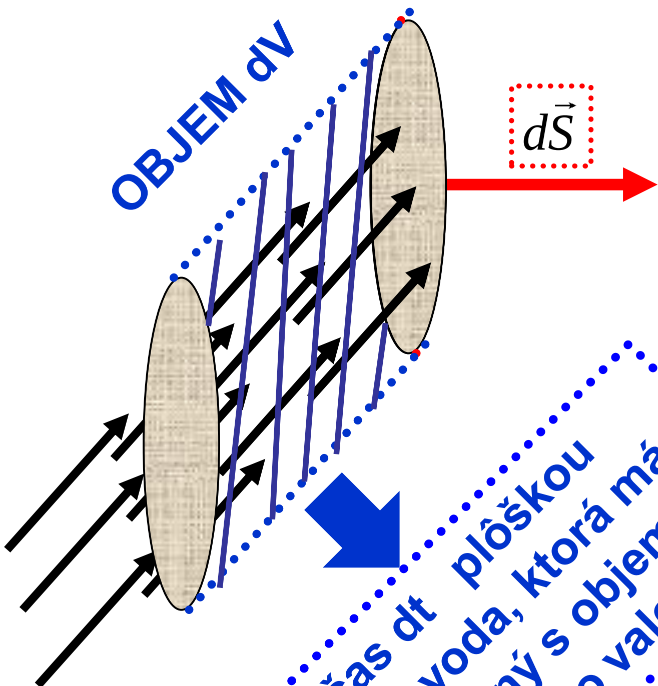
Zoberme najskôr infinitenzimálnu plochu dS na ktorej možno považovať rýchlosť kvapaliny za konštantnú

Umiestnime do rieky malú plochu dS a určme, koľko kvapaliny pretieklo cez ňu za krátky čas dt

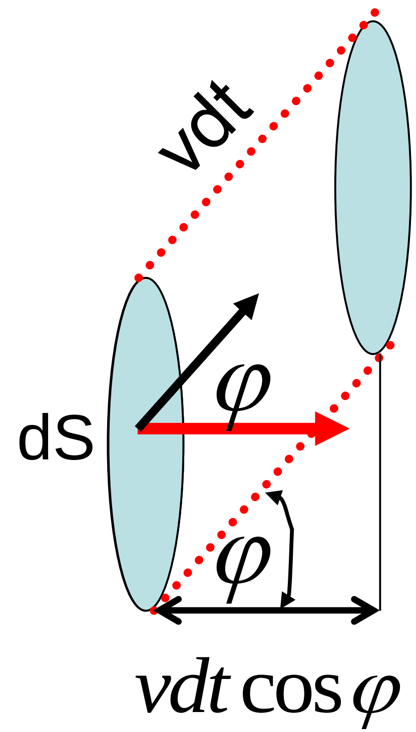


Za čas dt plôškou pretečie voda, ktorá má objem totožný s objemom objem dV šikmého valca.

Zoberme najskôr infinitenzimálnu plochu dS na ktorej možno považovať rýchlosť kvapaliny za konštantnú



Za čas dt plôškou pretečie voda, ktorá má objem totožný s objemom dV šikmého valca.



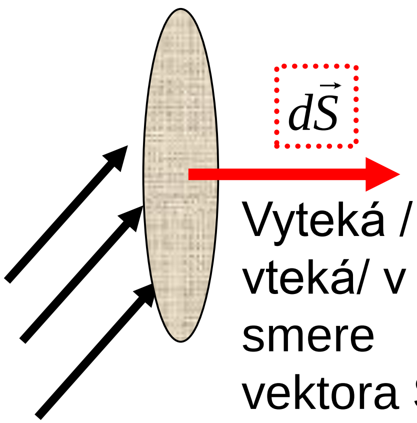
φ - uhol medzi vektorom **dS** a **v**

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = dSv\cos\varphi = \vec{v} \bullet d\vec{S}}$$

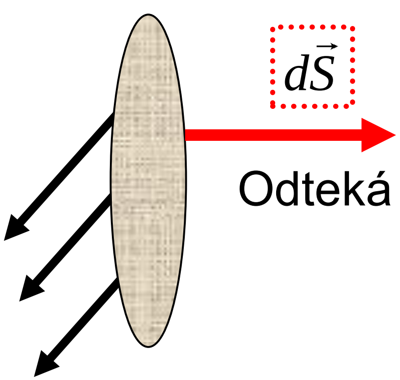
Objem kvapaliny pretečenej cez infinitezimálnu plôšku za jednotku času.

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = dSv\cos\varphi = \vec{v}\bullet d\vec{S}}$$

Hodnota môže byť kladná, záporná, nulová, závisí od uhla medzi vektormi



Vyteká / vteká/ v smere vektora S



Odteká

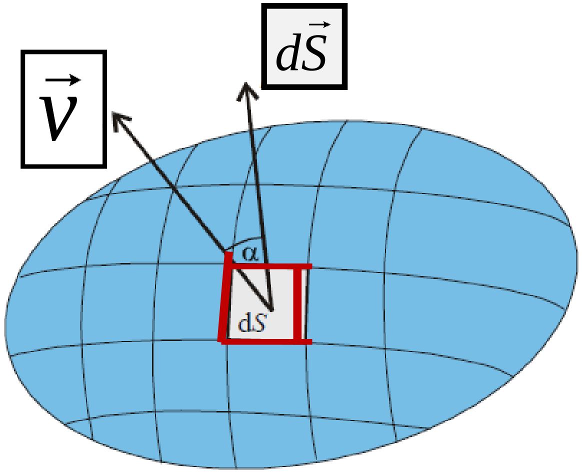
Vektory **dS** orientujme von z uzavretej plochy

Na dannej **infinitesimálnej ploche dS môžu nastať tieto možnosti:**

$$\vec{v}\bullet d\vec{S} = \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

- > 0 → Kvapalina vyteká z plochy **dS** von z uzavretej plochy Σ
- $= 0$ → Cez plochu nič nevtečie ani nevytečie
- < 0 → Kvapalina vteká cez plochu **dS** do vnútra uzavretej plochy Σ

Tok cez uzavretú plochu

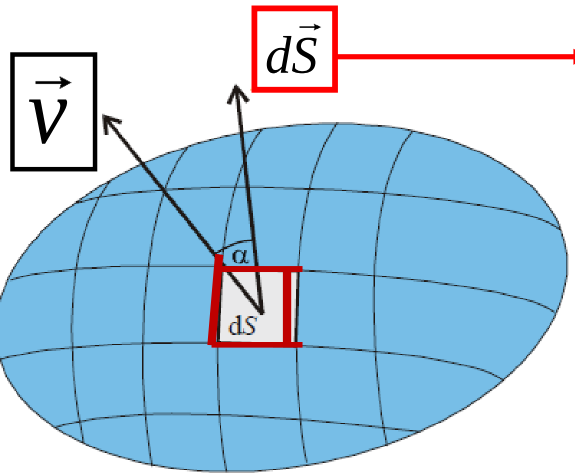


Uzavretú plochu vyskladáme z infitenzimálnych plôch, ktoré sme už analyzovali

DOHODA

Vektory **dS** orientujme von z uzavretej plochy

infinitesimálna plocha dS



Vektory **dS** orientujme von z uzavretej plochy

Na dannej **infinitesimálnej ploche dS môžu nastať tieto možnosti:**

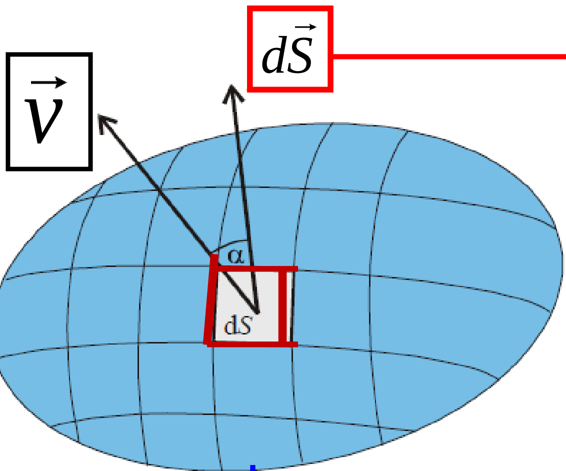
$$\vec{v} \bullet d\vec{S} = \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

> 0 → Kvapalina vyteká z plochy **dS** von z uzavretej plochy Σ

$= 0$ → Nič nevteká ani nevyteká

< 0 → Kvapalina vteká cez plochu **dS** do vnútra uzavretej plochy Σ

Tok cez uzavretú plochu



Vektory **dS** orientujme von z uzavretej plochy

Na dannej **infinitezimálnej ploche dS môžu nastať tieto možnosti:**

$$\vec{v} \bullet d\vec{S} = \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

- > 0 → Kvapalina vyteká z plochy **dS** von z uzavretej plochy Σ
- $= 0$ → Nič nevtečie ani nevytečie
- < 0 → Kvapalina vteká cez plochu **dS** do vnútra uzavretej plochy Σ

$$\Sigma$$

Po sčítaní všetkých príspevkov zistíme, či v uzavretej ploche kvapalina vzniká, zaníká :

$$\oint_{\Sigma} \vec{v} \bullet d\vec{S} = \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

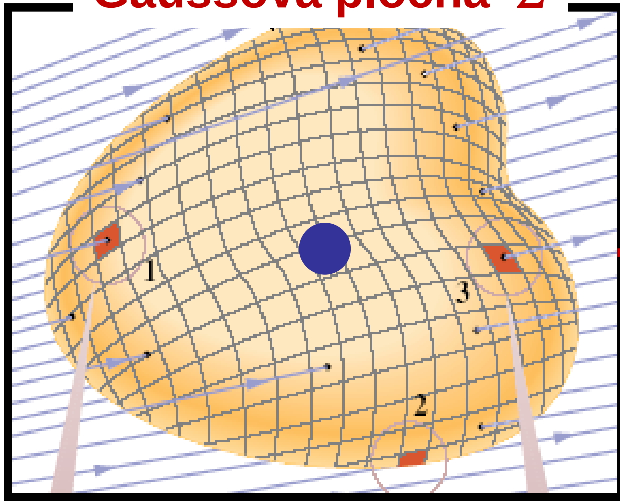
Kvapalina vznikla (> 0)

Kvapalina zanikla (< 0)

Interpretácia

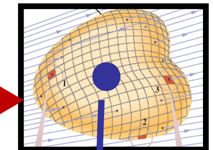
$$\boxed{\oint_{\Sigma} \vec{v} \bullet d\vec{S}}$$

Tok vektora po uzavretej ploche určuje mnoztvo kvapaliny,
ktorá VZNIKLA za jednotku času



Sťahujem plochu okolo bodu

$$V_{\Sigma} \rightarrow 0$$



BODOVÁ CHARAKTERISTIKA POĽA

$$div\vec{v} = \lim_{V_{\Sigma}\rightarrow 0} \frac{\oint_{\Sigma} d\vec{S} \bullet \vec{v}}{V} = \lim_{V_{\Sigma}\rightarrow 0} \frac{\Phi}{V}$$

Divergencia určuje, koľko kvapaliny za jednotku času v jednotkovom objeme v danom mieste vzniklo.

Divergencia je objemová hustota výtoku danej vektorovej veličiny cez uzavretú plochu, a teda určuje výtok kvapaliny z daného bodu

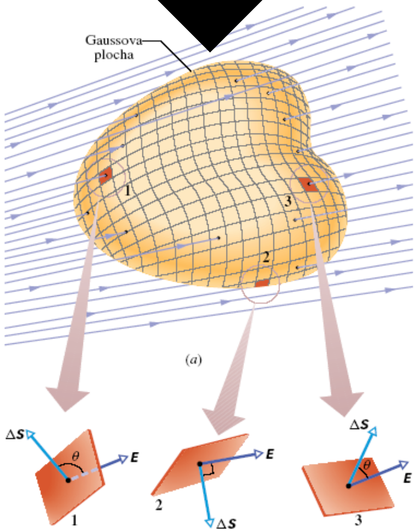
Ak divergencia je kladná, v danom mieste je žriedlo kvapaliny – Kvapalina sa zrodila
Ak divergencia záporná, v danom mieste je nor kvapaliny

$$div\vec{v}\; dV = \oint_{\Gamma} \vec{v} \bullet d\vec{S}$$

Množstvo kvapaliny, ktorá v danom mieste vznikla

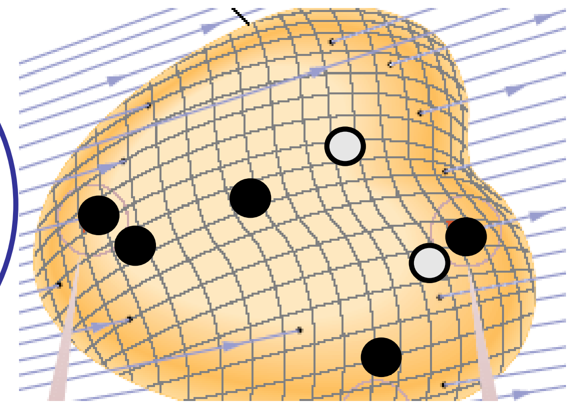
Porucha toku

Gaussova veta



Gaussova veta

$$\oint_{\Sigma_{makro}} d\vec{S}\cdot\vec{v} = \int_{V_{\Sigma makro}} \boxed{div\,\vec{v}\; dV}$$

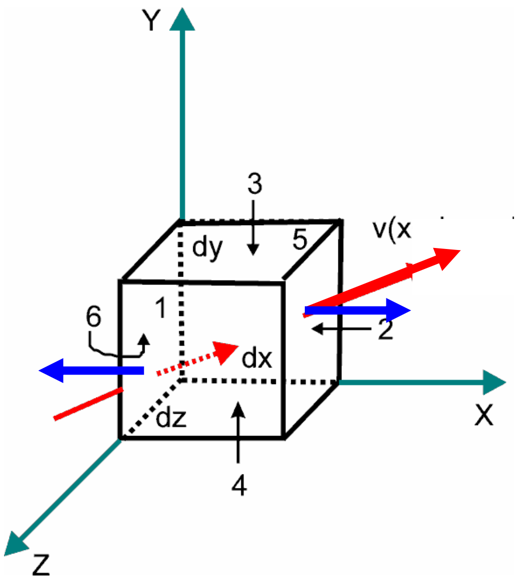


Množstvo kvapaliny vzniknutej v uzavretej ploche za jednotku času môžeme určiť tak, že spočítame <u>celkové</u> sumárne množstvo kvapaliny, ktoré za jednotku času <u>vytieklo</u> povrchom.

Vyjadruje, množstvo kvapaliny, ktorá sa <u>zrodila za jednotku</u> času v makroskopickom objeme

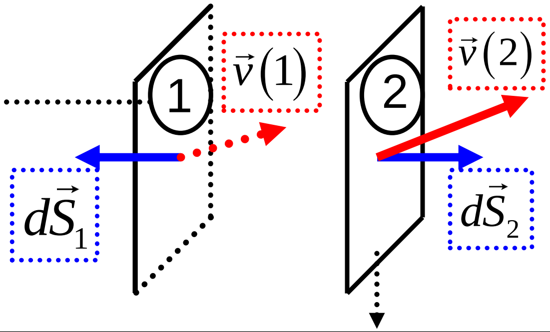
Množstvo kvapaliny <u>vzniknutej</u> v uzavretej ploche za jednotku času môžeme určiť tak, že spočítame aké sumárne množstvo kvapaliny <u>vzniklo v jednotlivých infinitezimálnych objemoch</u>.

Tok cez protiľahlé steny infinitezimálneho kvádra



Tok cez protiležiace steny 1,2:

$$N_{1,2} = \iint_2 d\vec{S} \cdot \vec{v} + \iint_1 d\vec{S} \cdot \vec{v}$$

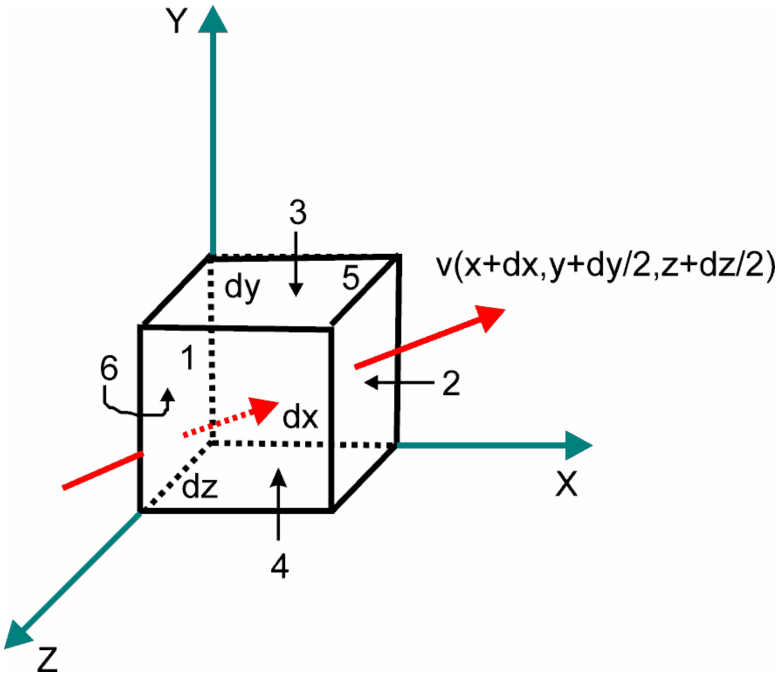


$$N_1 = \left[v_x(1), v_y(1), v_z(1)\right] \bullet [-dydz, 0, 0] = -v_x(1)\,dydz$$

$$N_2 = \left[v_x(2), v_y(2), v_z(2)\right] \bullet [dydz, 0, 0] = v_x(2)\,dydz$$

$$N_{1,2} = v_x(2)\,dydz - v_x(1)\,dydz = \frac{v_x(2)\,dydz - v_x(1)\,dydz}{dx}\,dx = \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dxdydz$$

Tok cez infinitezimálny kváder



$$\iint_{1,2} d\vec{S}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x}dxdydz$$

$$\iint_{3,4} d\vec{S}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial y}dxdydz$$

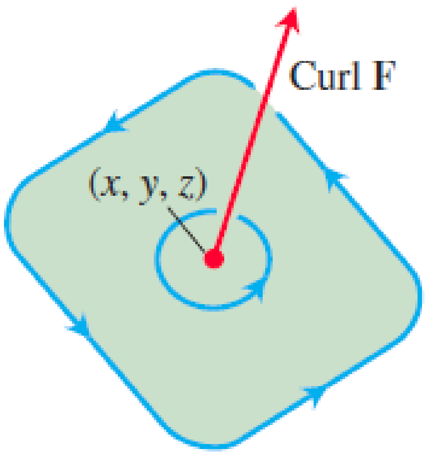
$$\iint_{5,6} d\vec{S}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial z}dxdydz$$

Sumárny tok z kvádra-mikroplochy

$$div\vec{v} = \lim_{V_\Sigma\to 0}\frac{\oint_{\Sigma_{mikroplocha}} d\vec{S}\bullet\vec{v}}{V} = \lim_{V_\Sigma\to 0}\frac{\boxed{\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]dxdydz}}{dxdydz} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]$$

$$\boxed{div\vec{v} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]}$$

Cirkulácia vektorového poľa



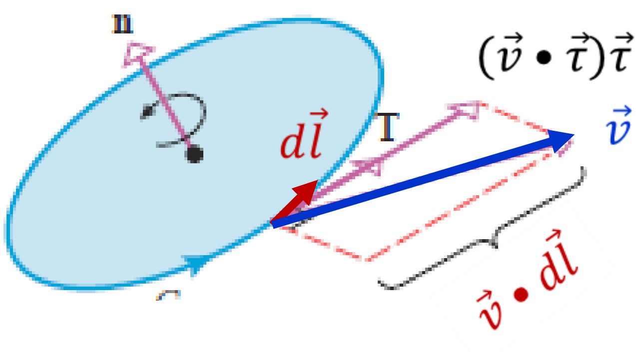
VÝPOČET:

Orientovaná uzavretá krivka

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \bullet \vec{dl} = \oint_{\Gamma} v_l dl$$

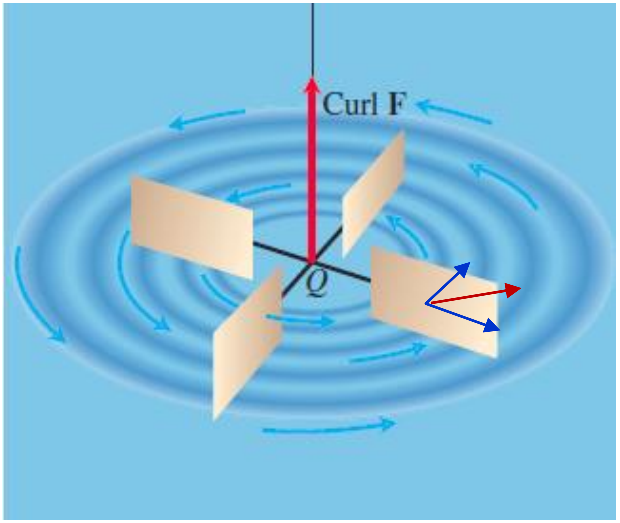
Dotyčnice ku krivke

*Priemet vektora **v** do smeru vektora **dl***



Cirkulácia bude tým väčšia, čím sa orientácia vektora **v** bude viac blížiť k dotyčnici k **dl** po celom úseku integračnej krivky

Zariadenie na meranie cirkulácie kvapaliny.



Do každého úseku krivky vložíme lopatku.

Rotáciu koleska ovplyvňuje iba tangencialna zložka rýchlosti.

Koleso sa bude tým rýchlejšie otáčať/ tym vacsou uhlovou rychlosťou/ , čím bude cirkulácia po danej krivke (vystlanej lopatkami) väčšia.

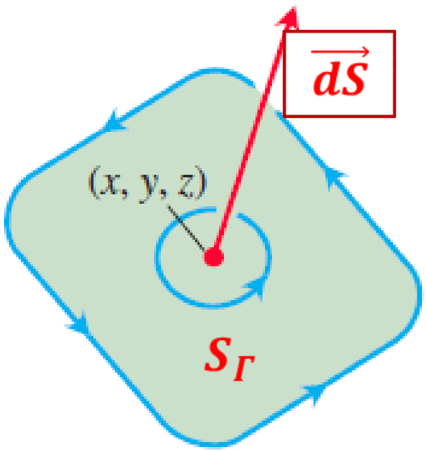
$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \bullet d\vec{l}$$

Roztočenie kolieska závisí aj od natočenia smerom k víru

Hlavný smer víru – os víru

$$rot\vec{v}\cdot\vec{n} = \lim_{\Gamma\to P_0}\frac{\oint_\Gamma \vec{v}\bullet d\vec{l}}{S_\Gamma}$$

„priemet víru“ do rôzneho smeru



Dosledky definície pre nekonečne malé slučky

Pre infinitenzimálny element

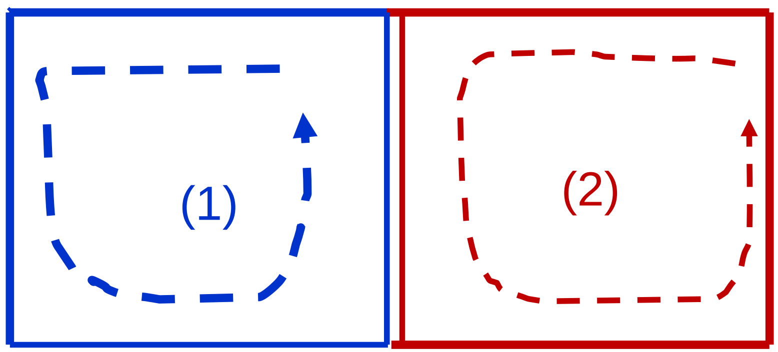
$$rot\vec{v}\cdot\vec{n}S_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{v}\bullet d\vec{l}$$

$$rot\vec{v}\cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{v}\bullet d\vec{l}$$

$$\boxed{rot\vec{v}\cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{v}\bullet d\vec{l}}$$

Orientáciu plošného elementu určíme podľa pravidla pravej ruky

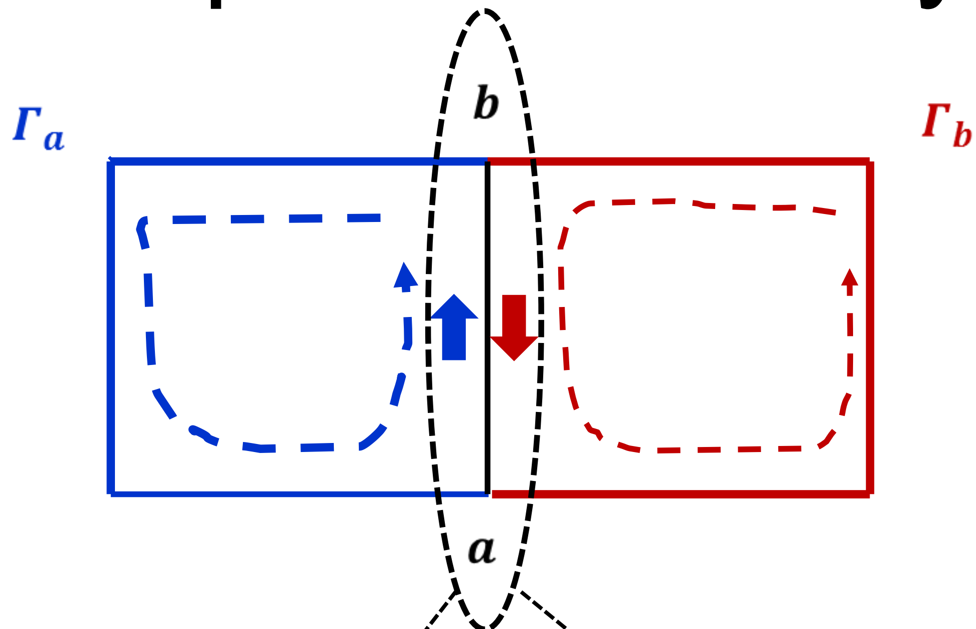
Výpočet cirkulácie cez dve spoločné slučky



Vlastnosť aditívnosti

$$\oint_{(1)} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \oint_{(2)} \vec{v} \cdot d\vec{l} =$$

Výpočet cirkulácie cez dve spoločné slučky

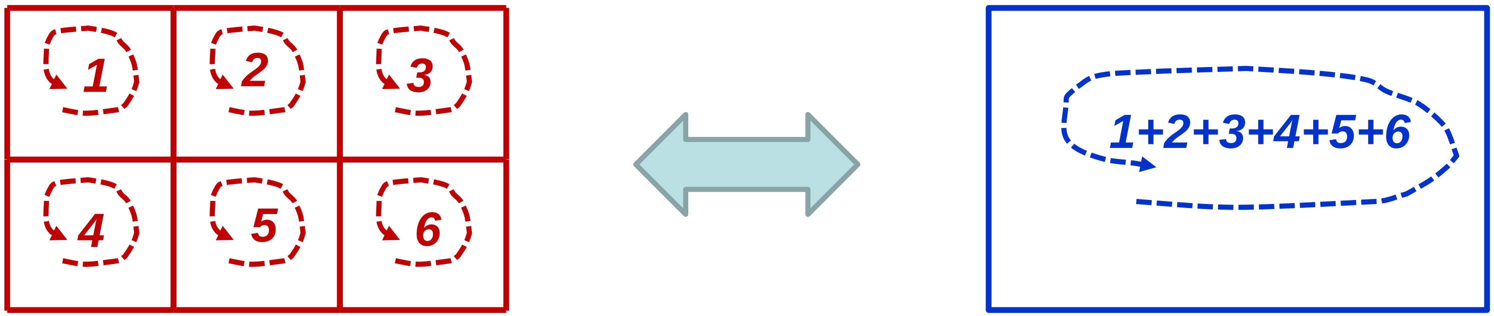


$$\oint_{(1)} \vec{v}\cdot d\vec{l} + \oint_{(2)} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_a} \vec{v}\cdot d\vec{l} + \underbrace{\int_{\Gamma_{ab}} \vec{v}\cdot \boxed{d\vec{l}} + \int_{\Gamma_{ba}} \vec{v}\cdot \boxed{d\vec{l}}}_{0} + \int_{\Gamma_b} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_a} \vec{v}\cdot d\vec{l} + \int_{\Gamma_b} \vec{v}\cdot d\vec{l}$$

Príspevky na spoločných hraniciach sa rušia

Výpočet cirkulácie

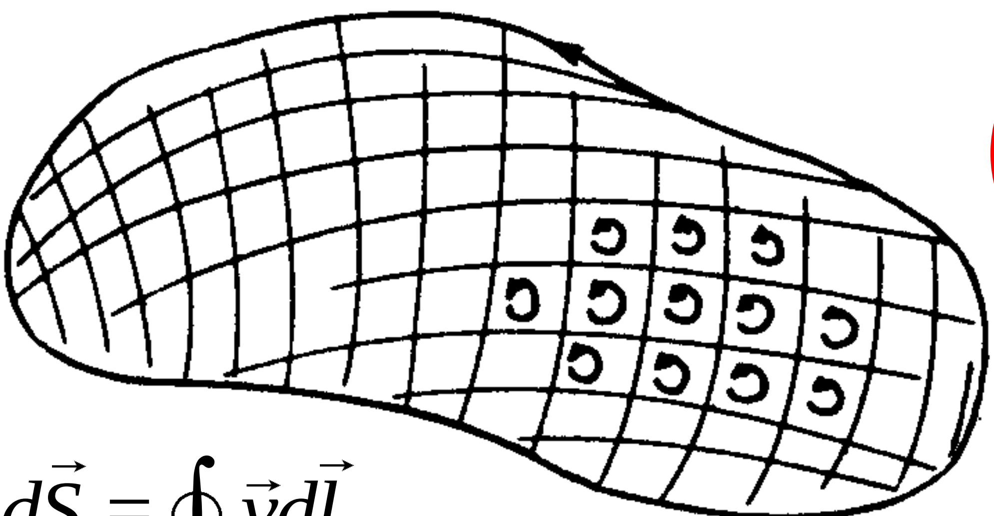
Príspevky na spoločných hraniciach sa rušia



$$\oint_1 \vec{v}\cdot d\vec{l} + \oint_2 \vec{v}\cdot d\vec{l} + \oint_3 \vec{v}\cdot d\vec{l} + \oint_4 \vec{v}\cdot d\vec{l} + \oint_5 \vec{v}\cdot d\vec{l} + \oint_6 \vec{v}\cdot d\vec{l}$$

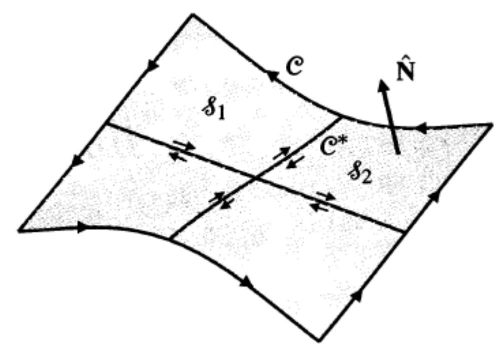
Cirkulácia po ľubovoľnej krivke

Vnútro krivky možno vyplniť ľubovoľnou plochou ktorú vyskladáme infitenzimálnymi obdĺžnikmi



Príspevky na spoločných hraniciach sa rušia

$$rot\vec{v}\cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{v}d\vec{l}$$



STOKESOVA VETA

$$\oint_{\Gamma}\vec{v}\cdot d\vec{l} = \sum\oint_{\square}\vec{v}\cdot d\vec{l} = \sum rot\vec{v}\cdot d\vec{S}_i = \iint_{S_\Gamma} rot\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

Polia bez rotácie

$$A = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_\Gamma} rot\vec{F} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow rot\vec{F} = \vec{0}$$

Krivku mozno vyplniť nekonečným množstvom ploch !!!!