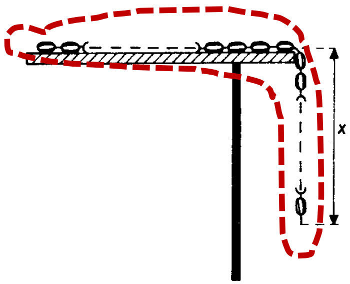
Padajúca reťaz



Ohybná retiazka dĺžky l je prevesená cez stôl (obr.). Vplyvom vlastnej tiaže sa začne pohybovať. Nájdite ako sa bude meniť dĺžka previsnutej časti x(t), ak v počiatočnom čase visela zo stola dĺžka l_0. Najskôr uvažujte pohyb bez trenia a potom s trením.

$$m\ddot{x} = \frac{mg}{L}x \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{g}{L}x$$

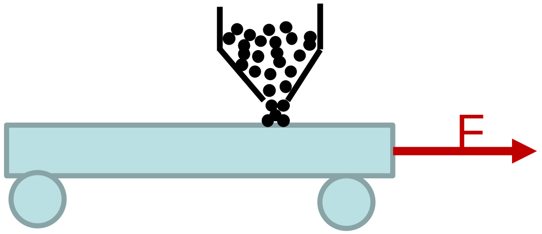
x – visiaca časť lana

m/L – dĺžková hustota lana

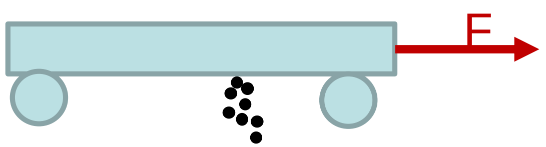
$$m\ddot{x} = \frac{mg}{L}x - f\,\frac{(L-x)}{L}mg \quad \rightarrow \quad \ddot{x} - \frac{g}{L}x(1+f) = -fg$$

Vagón s hmotnosťou m_0 sa začal pohybovať pôsobením konštantnej sily F z pokoja.
A, Predpokladajte, že z násypu padal naň piesok z rýchlosťou α[kg/s]
B, Predpokladajte, že z vlaku sa vysýpal piesok z rýchlosťou α[kg/s]
Určte rýchlosť a zrýchlenie vagónu

u(0)=0



A



B

Prípad 1

$$M=\left(m_0+\alpha t\right)$$

$$F=u\frac{dM}{dt}+M\frac{du}{dt}=u\alpha+\left(m_0+\alpha t\right)\frac{du}{dt}\Rightarrow\frac{du}{dt}+\frac{\alpha}{\left(m_0+\alpha t\right)}u=\frac{F}{\left(m_0+\alpha t\right)}$$

$$u=\frac{Ft}{m_0}/\left(1+\frac{\alpha t}{m_0}\right)\qquad a=\frac{F}{m_0}\left(1+\frac{\alpha t}{m_0}\right)^2$$

Prípad 2

$$M=\left(m_0-\alpha t\right)$$

$$F=\left(m_0-\alpha t\right)\frac{du}{dt}$$

$$u=\frac{F}{\alpha}\ln\frac{m_0}{m_0-\alpha t}\qquad a=\frac{F}{m_0-\alpha t}$$

Harmonický pohyb

$$x = \boxed{x_m} \cos\left(\boxed{\omega t + \varphi}\right)$$

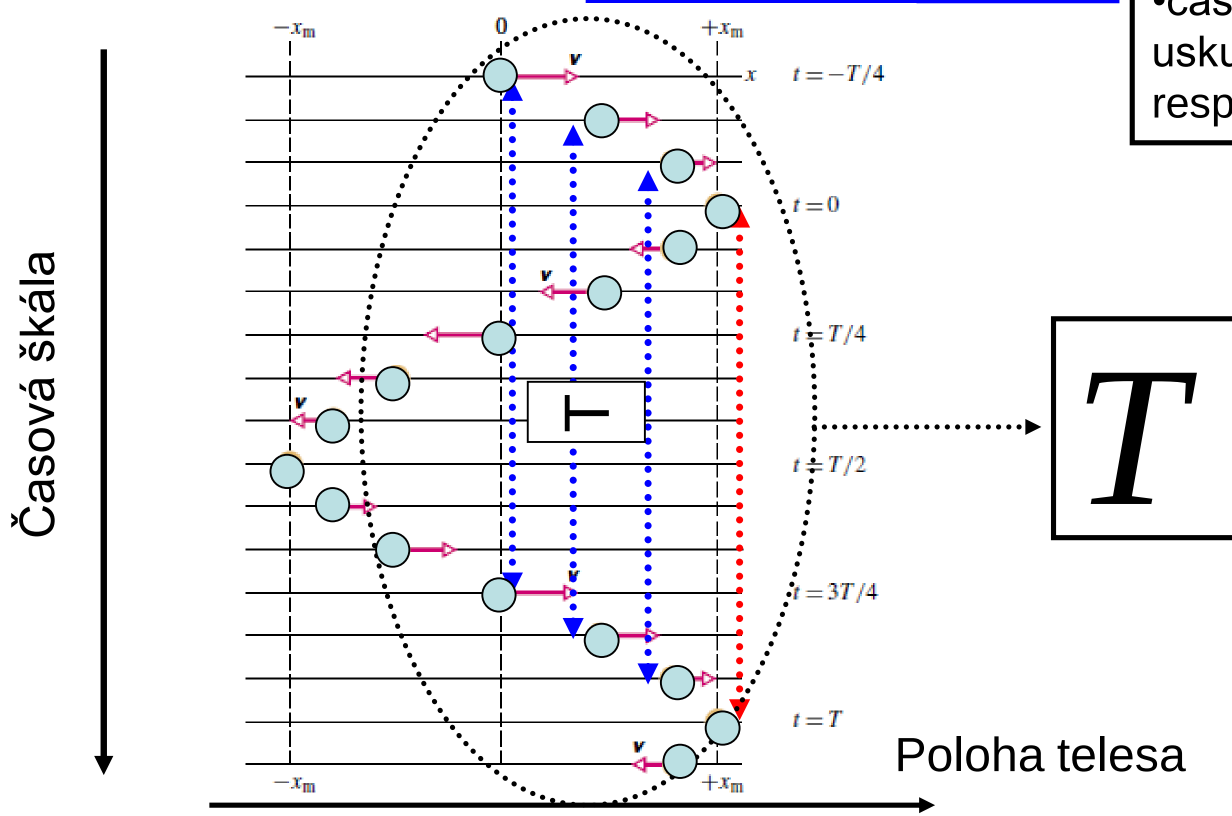
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

X_m – amplitúda výchylky (veľkosť najväčšej možnej výchylky častice od rovnovážnej polohy)

(ω+φt)– fáza pohybu

φ - počiatočná fáza

T – perióda pohybu,
•čas, za ktorý sa častica dostane do východzieho stavu
•čas, za ktorý sa uskutoční jeden úplný kmit resp.cyklus



Čítanie rovníc:

Často používané rovnice popisujúce harmonický pohyb sústavy s jedným stupňom voľnosti

Ekvivalentné rovnice

$$\ddot{q} = -\frac{\beta}{\alpha} q$$

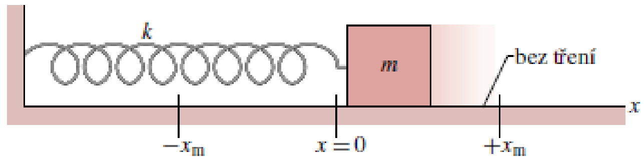
$$\frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\beta q^2 = E$$

$$q = q_m \cos\left(\underbrace{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}_{\omega_0} t + \theta\right)$$

Malé kmity analýza cez ZZE

Predpoklad: výchylky x také malé, že možno zanedbať ich vyššie ako druhé mocniny x

Harmonický oscilátor



Energetický prístup

$$\frac{1}{2}\underbrace{\boxed{k}}_{\beta}x^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\boxed{m}}_{\alpha}\dot{x}^2 = E_0$$

Energia má tvar kvadratickej formy $\Rightarrow$ Systém vykonáva harmonický pohyb s frekvenciou ω

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dynamika

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi) = x_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

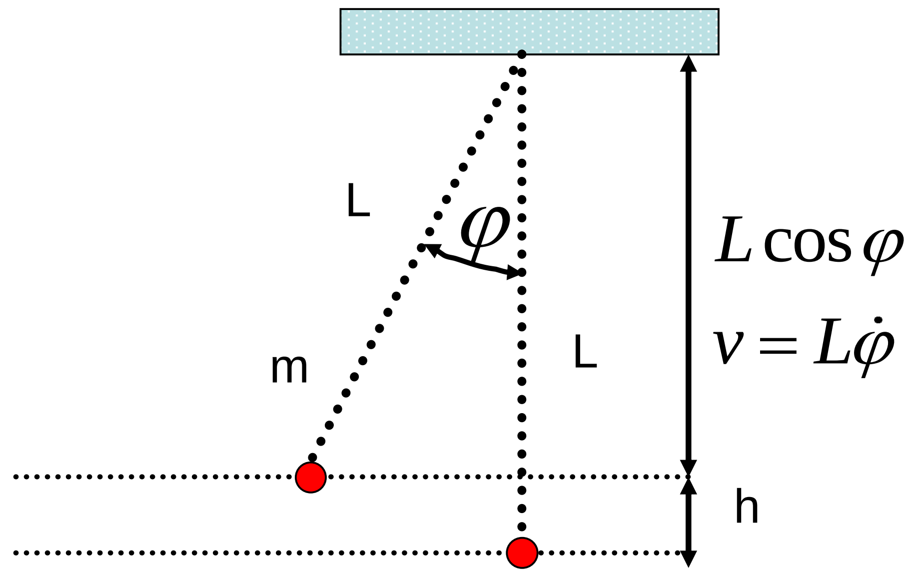
Matematické kyvadlo

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!}$$

$$mgL\underbrace{\left[1-\cos\varphi\right]}_{h} + \frac{1}{2}m\Big[\underbrace{L\,\dot{\varphi}}_{v}\Big]^2 = E_0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\underbrace{gmL}_{\beta}\,\varphi^2 + \frac{1}{2}\underbrace{mL^2}_{\alpha}\,\dot{\varphi}^2 = E_0}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$



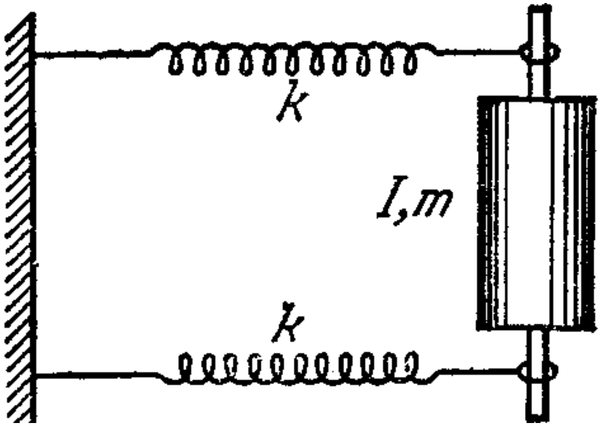
Energia má tvar kvadratickej formy $\Rightarrow$ Systém vykonáva harmonický pohyb s frekvenciou ω

$$\boxed{\varphi = \varphi_m \cos\left(\omega t + \theta\right) = \varphi_m \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \theta\right)}$$

Príklad

- Valček s polomerom r je spojený s pružinami s tuhosťami k podľa obr. Určte jeho periódu.

$$\boxed{E = 2\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}$$

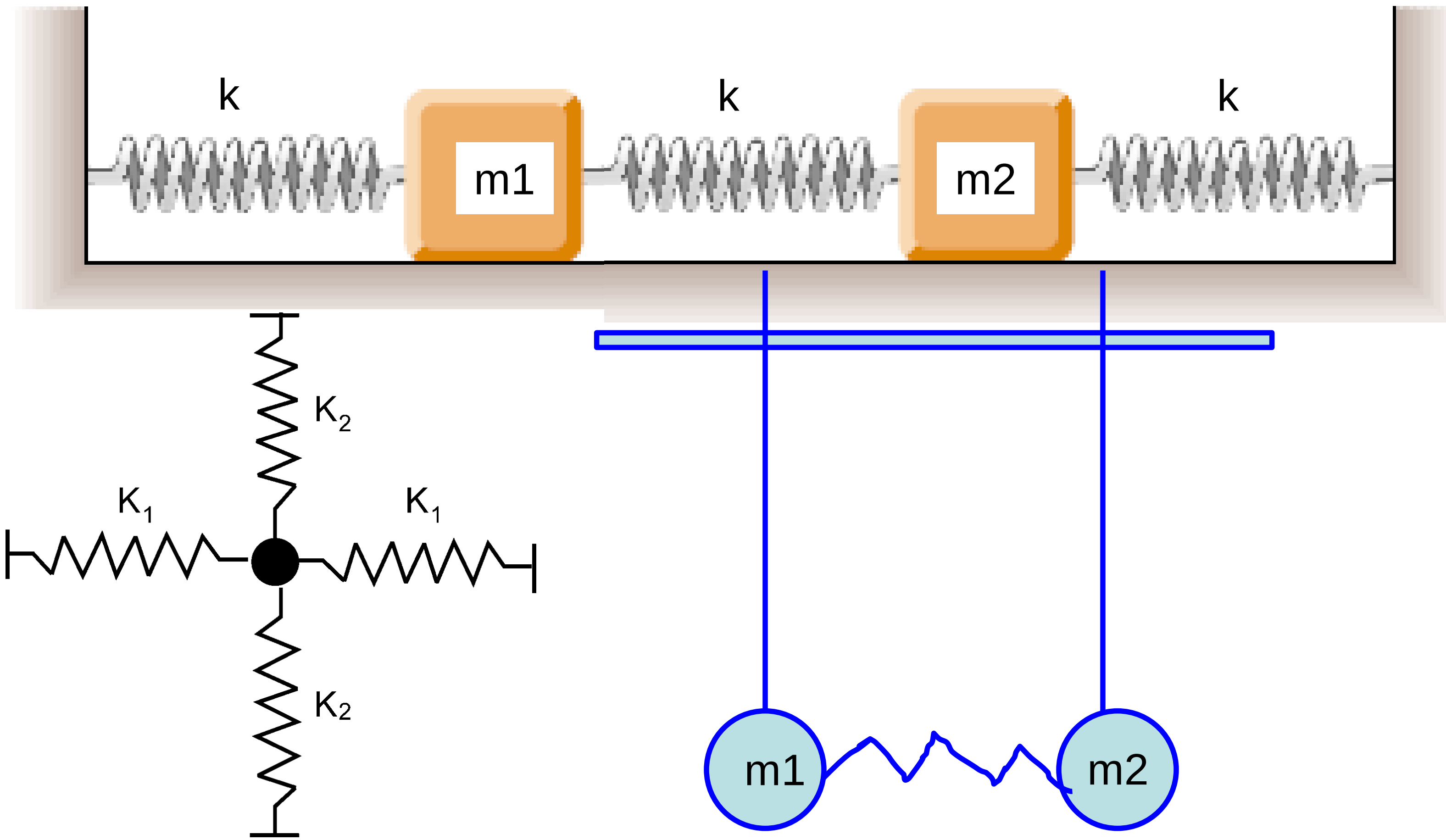


$$\begin{aligned} x &= R\varphi \\ v_T &= \dot{x} = R\dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2}[2k]x^2 + \frac{1}{2}\left[m + \frac{I}{R^2}\right]\dot{x}^2 \\ E_\varphi &= \frac{1}{2}\left[2kR^2\right]\varphi^2 + \frac{1}{2}\left[mR^2 + I\right]\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2k}{m + \frac{J}{R^2}}}}$$

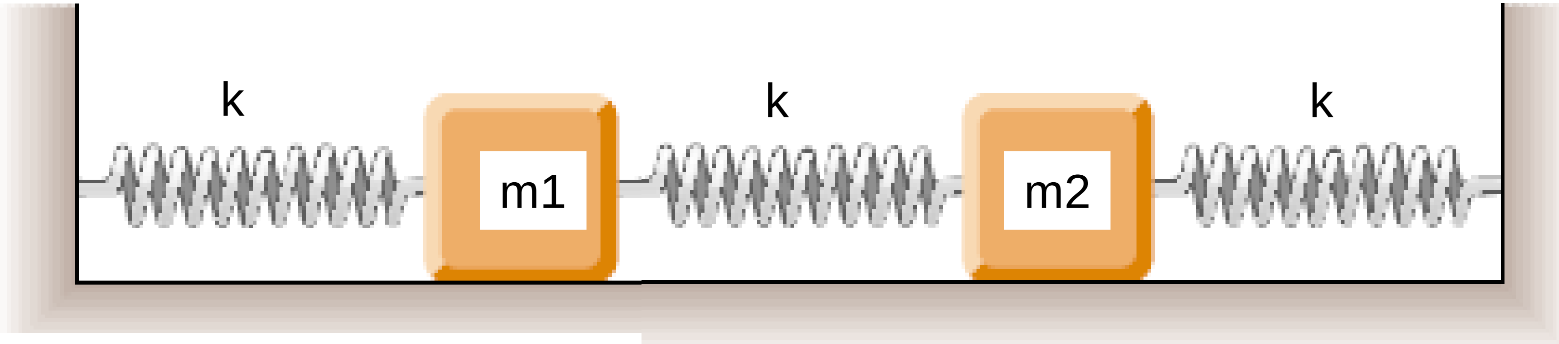
kmity systémov s dvomi stupňami volnosti



PRINCÍP SUPERPOZÍCIE
Všeobecné riešenie je dané superpozíciou dvoch nezávislých harmonických kmitaní

Voľné kmity systémov s dvomi stupňami volnosti

$\boxed{x, y}$



$y > x$

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + k(y - x)$$

$$m_2 \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - k(y - x)$$

Sústava zviazaných rovníc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{k}{m_1}x + \frac{k}{m_1}y$$

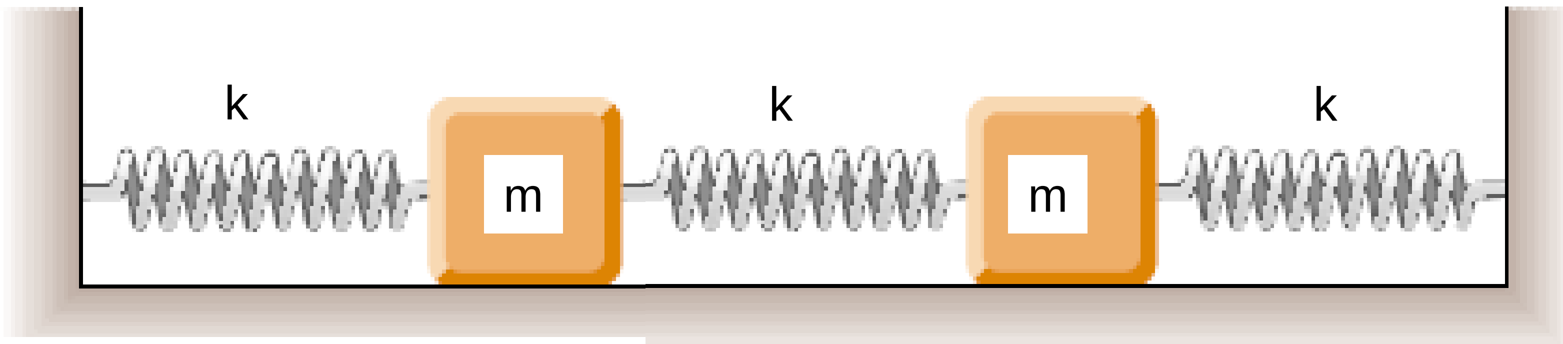
$$\frac{d^2y}{dt^2} = +\frac{k}{m_2}x - 2\frac{k}{m_2}y$$

PRINCÍP SUPERPOZÍCIE
Všeobecné riešenie je dané superpozíciou dvoch nezávislých harmonických kmitaní

PRÍPAD M1=M2=M

Voľné kmity systémov s dvomi stupňami volnosti

$\boxed{x, y}$



Sústava zviazaných rovníc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{k}{m}x + \frac{k}{m}y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = +\frac{k}{m}x - 2\frac{k}{m}y$$

Osobná preferencia – prehľadnejšie -MODY

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \quad y = B\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = Ae^{\alpha t} \quad y = Be^{\alpha t}$$

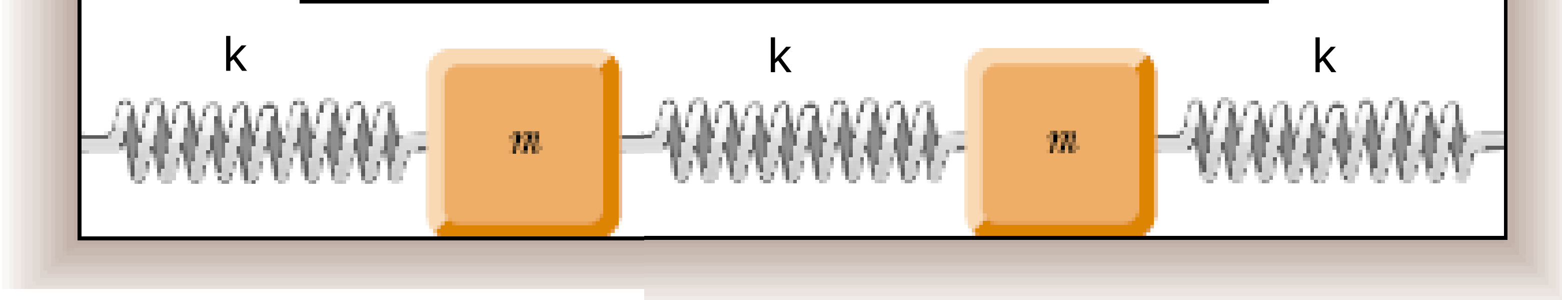
$$x = Ae^{-\gamma t} \quad y = Be^{-\gamma t}$$

Hocijaký tvar navrhovaného riešenia, ktorý urobí zo ***sústavy algebraické rovnice***

PRINCÍP SUPERPOZÍCIE

Všeobecné riešenie je dané superpozíciou dvoch nezávislých harmonických kmitaní

Hľadáme transformáciu, ktora DR rozviaže



Zviazané rovnice

$$\frac{d^2}{dt^2}[x+y] = -\frac{k}{m}[x+y]$$

$$\frac{d^2}{dt^2}[x-y] = -\frac{3k}{m}[x-y]$$

Normálové súradnice

$$\psi_1 = x+y$$

$$\psi_2 = x-y$$

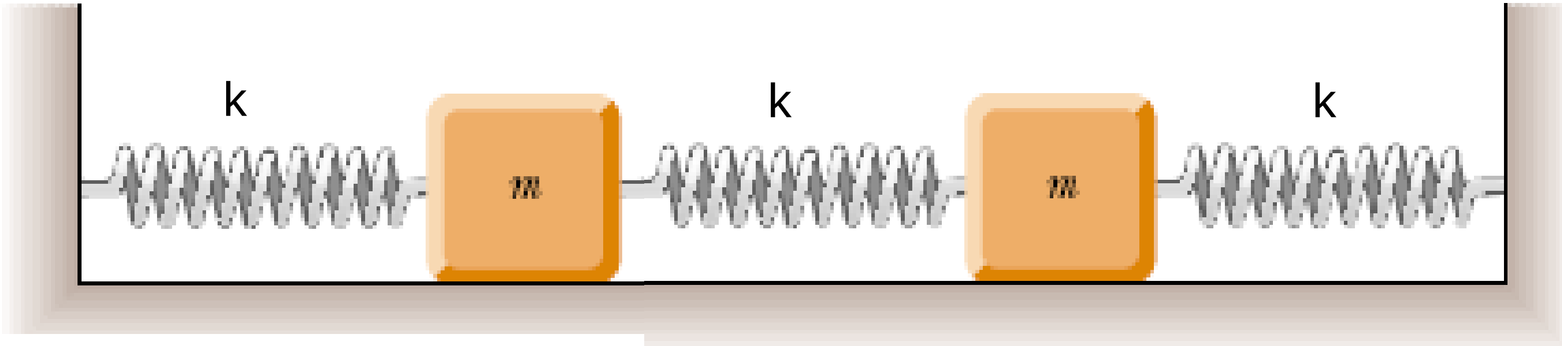
Rozviazané rovnice

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\frac{k}{m}\psi_1$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\frac{3k}{m}\psi_2$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\frac{k}{m}\psi_1 \quad \Rightarrow \psi_1 = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\frac{3k}{m}\psi_2 \quad \Rightarrow \psi_2 = B\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \varphi_2\right)$$



Normálové súradnice

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\frac{k}{m}\psi_1 \quad \Rightarrow \psi_1 = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\frac{3k}{m}\psi_2 \quad \Rightarrow \psi_2 = B\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \varphi_2\right)$$

$$\psi_1 = x + y$$

$$\psi_2 = x - y$$

$$x = \frac{1}{2}\left\{A\cos\left[\omega_1 t + \varphi_1\right] + B\cos\left[\omega_2 t + \varphi_2\right]\right\}$$

$$y = \frac{1}{2}\left\{A\cos\left[\omega_1 t + \varphi_1\right] - B\cos\left[\omega_2 t + \varphi_2\right]\right\}$$

Univerzálna metóda hľadania módov

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{2k}{m}\right)x \quad -\left(-\frac{k}{m}\right)y$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(-\frac{k}{m}\right)x \quad -\left(\frac{2k}{m}\right)y$$

$$x = A\cos\left[\omega t + \varphi\right]$$
$$y = B\cos\left[\omega t + \varphi\right]$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$
$$\ddot{y} = -\omega^2 y$$

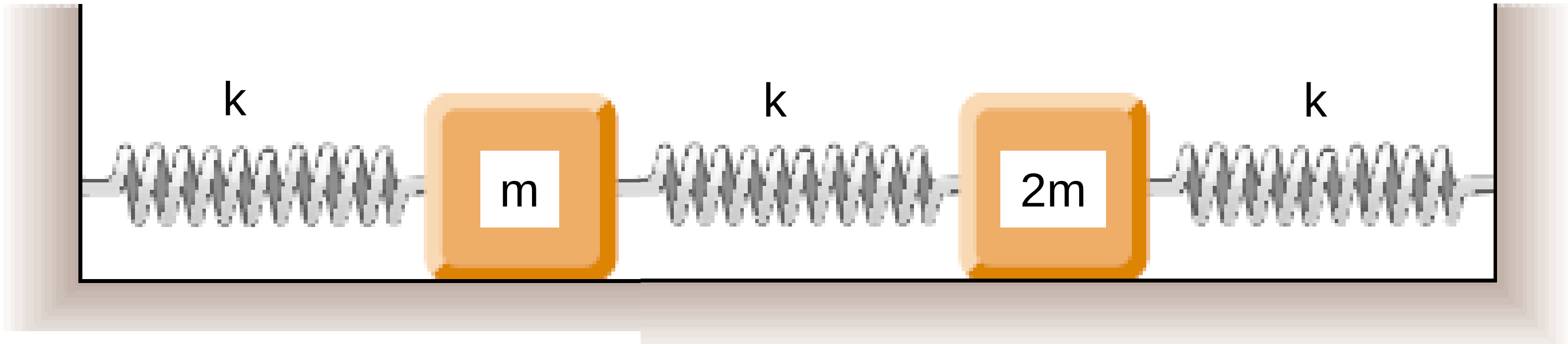
$$\left[\left(\frac{2k}{m}\right) - \omega^2\right]x \quad -\left(\frac{k}{m}\right)y = 0$$
$$\left(-\frac{k}{m}\right)x + \left[\left(\frac{2k}{m}\right) - \omega^2\right]y = 0$$

$$\left[\left(\frac{2k}{m}\right) - \omega^2\right]A \quad -\left(\frac{k}{m}\right)B = 0$$
$$\left(-\frac{k}{m}\right)A + \left[\left(\frac{2k}{m}\right) - \omega^2\right]B = 0$$

Triviálne riešenie nás nezaujíma. Homogenna sústav lineárnych rovníc bude mať iné ako triviálne riešenie vtedy, ked D=0

$$D = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$



Hľadanie módov

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{k}{m}x + \frac{k}{m}y$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = +\frac{k}{2m}x - \frac{k}{m}y$$

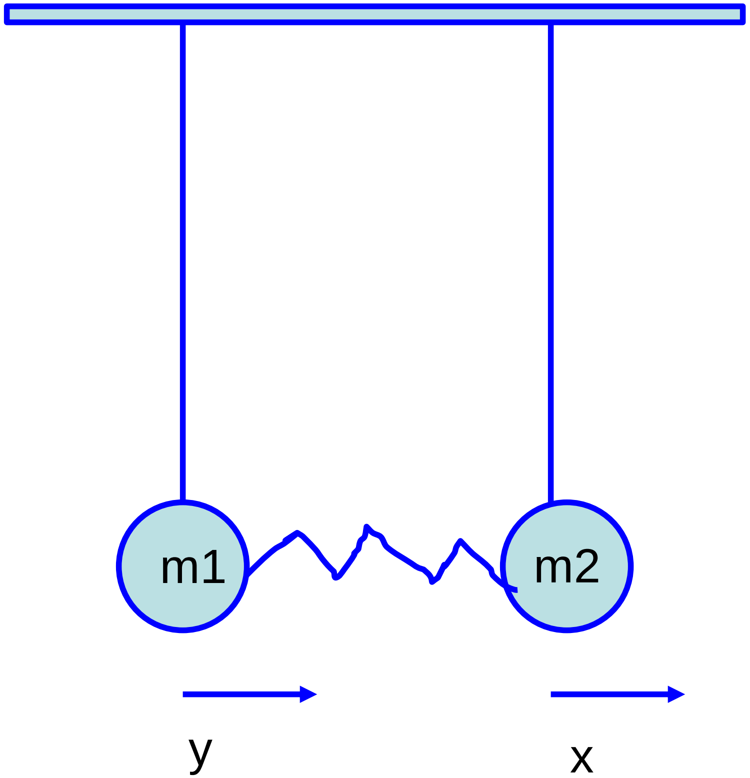
$$-\omega^2 x = -2\frac{k}{m}x + \frac{k}{m}y$$
$$-\omega^2 y = +\frac{k}{2m}x - \frac{k}{m}y$$

$$\left[2\frac{k}{m} - \omega^2\right]x - \frac{k}{m}y = 0$$
$$-\frac{k}{2m}x + y\left[\frac{k}{m} - \omega^2\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2\frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{2m} & \frac{k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Homogénna sústava lineárnych rovníc, ktorá má triviálne riešenie, ale to nás nezaujíma

Viazané kmity



$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = -m_1 g \frac{x}{l} - k\left(x - y\right)$$

$$m_2 \frac{d^2y}{dt^2} = -m_2 g \frac{y}{l} x + k\left(x - y\right)$$

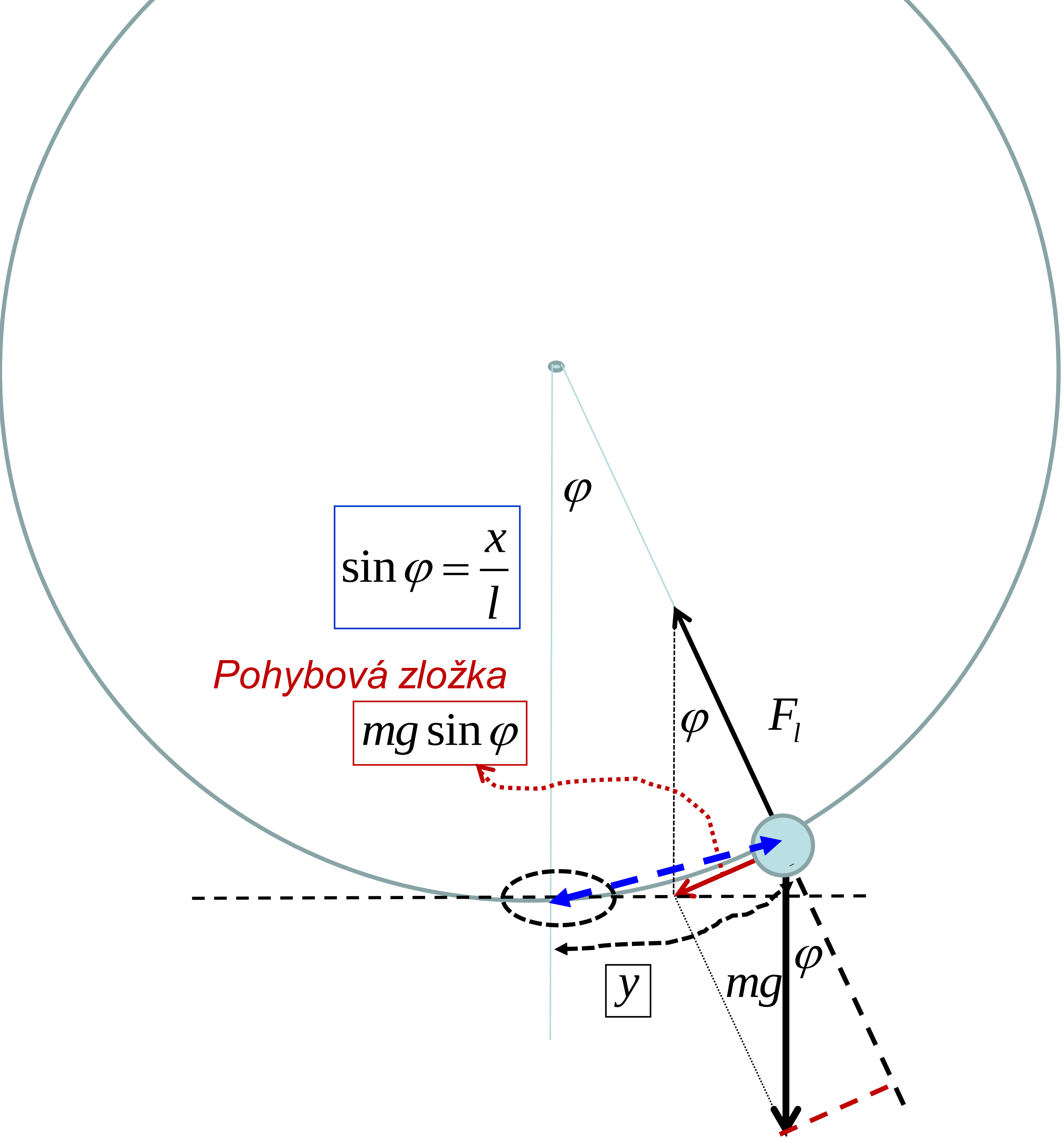
Normálové súradnice

$$X = \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2}$$

$$Y = x - y$$

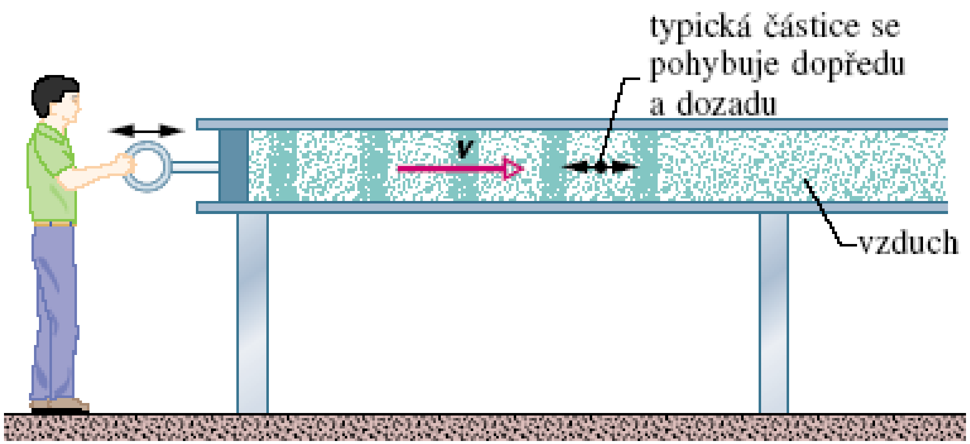
$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

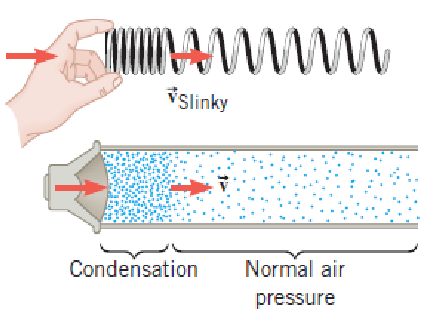
$$\ddot{Y} + \left(\omega_0^2 + k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)\right) Y = 0$$

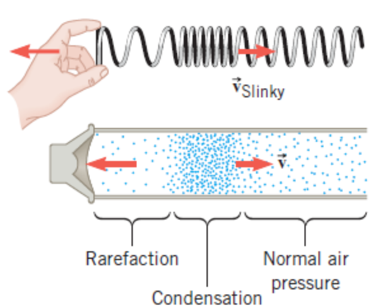


φ
$\sin\varphi = \frac{x}{l}$
Pohybová zložka
$mg\sin\varphi$
φ
F_l
y
mg
φ

Vlnenie
šírenie rozruchu







Postupná vlna je niečo, čo nemení profil a hýbe sa rýchlosťou v dopredu, alebo dozadu

$$\boxed{\Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

Rýchlosť vlny

Vlnová rovnica a jej riešenie
Metóda separácie premenných

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

PODMIENKY:

Okrajové podmienky (struna je upevnená na koncoch)

Počiatočné podmienky (profil a rýchlostný profil struny v čase t=0)

$$\Psi(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = konst$$

Riešenie priestorovej časti

Riešenie časovej časti

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = konst$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = konst$$

Riešenie priestorovej časti

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = konst$$

Okrajové podmienky

$$\boxed{X(0) = X(l) = 0}$$

$$\boxed{k > 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \begin{cases} k^2 & \cancel{X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \to X(x) \equiv 0 \Rightarrow \psi(x) = 0} \\ 0 & \cancel{X(x) = A + Bx \to X(x) \equiv 0 \Rightarrow \psi(x) = 0} \\ -k^2 & X(x) = D_1 \cos(kx) + D_2 \sin(kx) \end{cases}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 \Rightarrow X(x) = D_1 \cos(kx) + D_2 \sin(kx)$$

Dôsledky okrajových podmienok – filtrácia prijateľných riešení

$$\begin{aligned} X(0) &= D_1 = 0 \\ X(l) &= D_2 \sin(kl) = 0 \end{aligned} \Rightarrow k_n l = n\pi \quad \Rightarrow \quad k_n = \frac{n\pi}{l}$$

$$X_n(x) = D_n \sin\frac{\pi n}{l} x$$

Riešenie časovej časti

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \begin{cases} \cancel{k^2} \\ \cancel{0} \\ -k^2 \end{cases}$$

Triviálne riešenia

Netriviálne riešenie

$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}_n(t)}{T_n(t)} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

$$X_n(x) = D_n \sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$T_n(t) = E_n \cos\frac{\pi n}{l}vt + F_n \sin\frac{\pi n}{l}vt$$

$$\Psi_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

SUPERPOZÍCIA RIEŠENÍ

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}vt + B_n \sin\frac{\pi n}{l}vt\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

Módmi sú stojaté vlny

Priestorový profil struny v čase t=0

$$A_n$$

$$\Psi(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{l}x=f_1(x)$$

$$k_1=\frac{\pi}{l}=\frac{2\pi}{\lambda}\Rightarrow\lambda=2l$$

Ide o rozvoj nepárnej funkcie s vlnovou dĺžkou 2L

Rýchlostný profil struny v čase t=0

$$K_n$$

$$\dot{\Psi}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n\sin\frac{\pi n}{l}x=f_2(x)$$

Podobá sa to na Fourierov rozvoj pre nepárnu funkciu , ale naša funkcia f_1, f_2, nie je ani periodická a vo všeobecnosti ani nepárna. Je dokonca definovaná iba na intervale <0,L>

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)dx$$

Priestorový profil struny v čase t=0

$$A_n$$

$$\Psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l} x = f_1(x)$$

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_1(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)dx$$

Rýchlostný profil struny v čase t=0

$$K_n$$

$$\dot{\Psi}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n \frac{\pi n}{l} v\right)\sin\frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin\frac{\pi n}{l} x = f_2(x)$$

$$K_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_2(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)dx$$