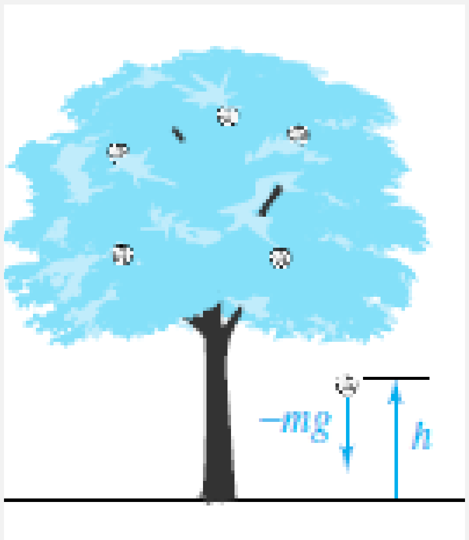
Diferenciálne rovnice

Základný jazyk fyziky

Motivácia

Typická úloha fyziky – hľadanie časových priebehov veličín, ktoré spĺňajú daný fyzikálny zákon.



Určte trajektóriu telesa padajúceho v gravitačnom poli.

$$\vec{r}(t) = ????$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F} = \begin{cases} -m\vec{g} \\ -m\vec{g} - \gamma\vec{v} = -m\vec{g} - \gamma\dot{\vec{r}} \end{cases}$$

Fyzikálny zákon

$$\vec{r}(0) = h$$
$$\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$$

Počiatočné podmienky

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3$$

$$e^{y} \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

$$4\frac{d^3 y}{dx^3} + (\sin x)\frac{d^2 y}{dx^2} + 5xy = 0$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Rovnica, v ktorej vystupuje neznáma funkcia spolu so svojimi deriváciami sa nazýva **diferenciálna rovnica**.

Klasifikácia DR

Rovnica, v ktorej vystupuje neznáma funkcia spolu so svojimi deriváciami sa nazýva **diferenciálna rovnica**.

druh DR

- obyčajné $$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} = \cos x$$
- parciálne $$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$$

analytický tvar

- lineárne $$\sin t\,\ddot{f} - \left(t^2 + at\right)\dot{f} = \exp t$$
- nelineárne

najvyšší stupeň derivácie

- prvého
- druhého
- n-tého rádu

Stupeň DR

najvyšší stupeň derivácie

$\dfrac{dy}{dx} = 3y$	1
$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 8y = 0$	2
$\dfrac{d^3y}{dt^3} - t\dfrac{dy}{dt} + (t^2 - 1)y = e^t$	3
$y' - y = e^{2x}$	1
$y'' + y' = \cos t$	2

najvyšší stupeň derivácie

$$\boxed{\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}}$$

Všeobecné riešenie

$$y = e^{2x} + Ce^{x}$$

Obsahuje toľko konštánt, koľkého rádu je DR, tieto konštanty sa určujú s počiatočných podmienok, ktorých je toľko, koľkého rádu je DR

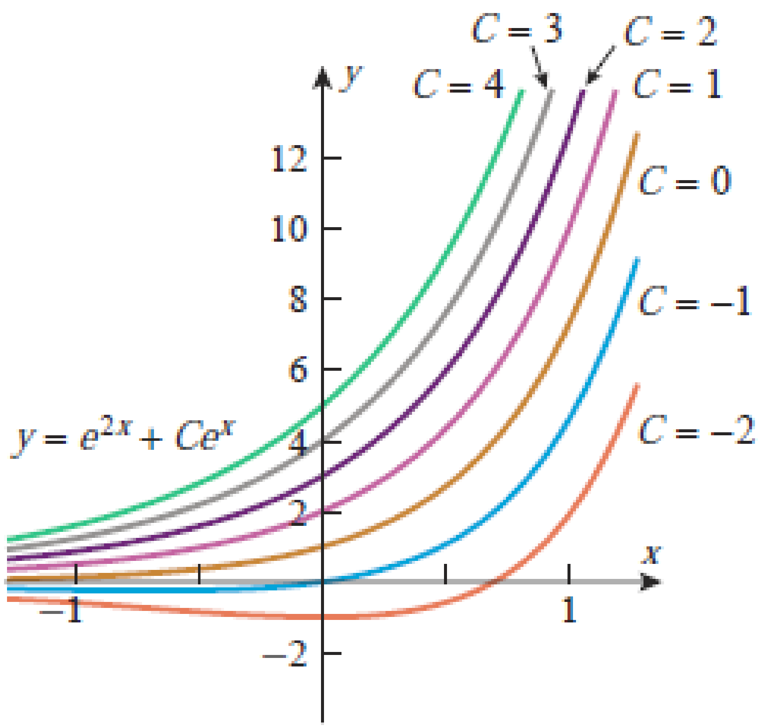
Partikulárne riešenie

$$y = e^{2x}$$

$$y = e^{2x} + 10e^{x}$$

$$y = e^{2x} - 3e^{x}$$

Neobsahuje žiadnu neznámu konštantu



Počiatočná podmienka vybere jednu krivku:

$$y(0) = 3$$

$$3 = e^{0} + Ce^{0} = 1 + C$$

$$y = e^{2x} + 2e^{x}$$

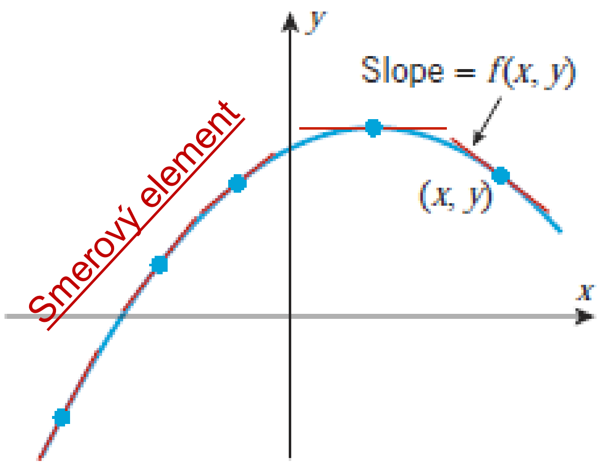
počiatočné podmienky – hodnoty hľadanej funkcie a jej derivácii až do n-1 stupňa (vrátane)

Počiatočné podmienky DR rôznych rádov

počiatočné podmienky – hodnoty hľadanej funkcie a jej derivácii až do n-1 stupňa (vrátane)

DIFERENCIÁLNE ROVNICE PRVÉHO RÁDU

Smernicová metóda



Informácia o smerniciach hľadanej funkcie

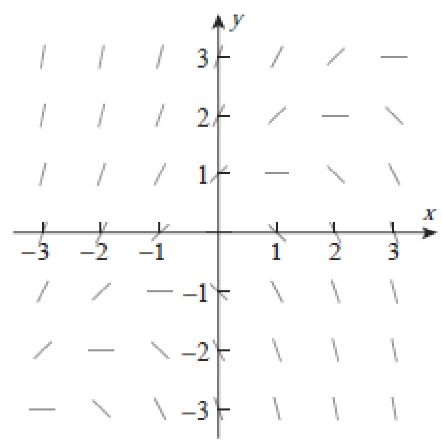
$$\boxed{y' = f(x, y)}$$

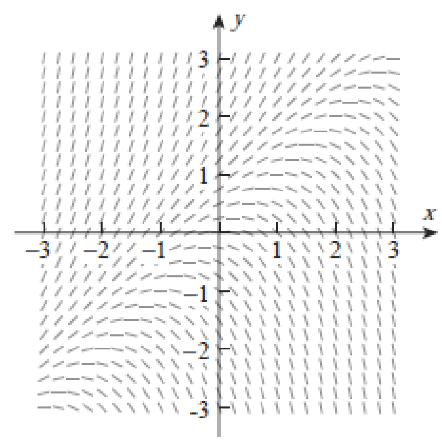
V podstate hľadáme krivku, ktorej smernicu v jednotlivých bodoch poznáme

$$y' = y - x$$

	$y=-3$	$y=-2$	$y=-1$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=-3$	0	1	2	3	4	5	6
$x=-2$	–1	0	1	2	3	4	5
$x=-1$	–2	–1	0	1	2	3	4
$x=0$	–3	–2	–1	0	1	2	3
$x=1$	–4	–3	–2	–1	0	1	2
$x=2$	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
$x=3$	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0

Smerové pole





Diferenciálne rovnice so separovanými alebo separovateľnými premennými

$$\boxed{y' = f(x, y) = h(x)g(y)}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)\,dx$$

Úprava: Každá strana rovnice obsahuje len jednu premennú

$$y' = e^{x+y}$$

Rádioktívny rozpad

EQUATION	FORM (1)	$h(y)$	$g(x)$
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$	$y\dfrac{dy}{dx} = x$	y	x
$\dfrac{dy}{dx} = x^2y^3$	$\dfrac{1}{y^3}\dfrac{dy}{dx} = x^2$	$\dfrac{1}{y^3}$	x^2
$\dfrac{dy}{dx} = y$	$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = 1$	$\dfrac{1}{y}$	1
$\dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{y}{x}$	$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{y}$	$1 - \dfrac{1}{x}$

$$(1+x)\,dy - y\,dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{(1+x)}$$

Tvary konštant mnohokrát volíme tak, aby sa nám ľahšie vyjadroval výsledok

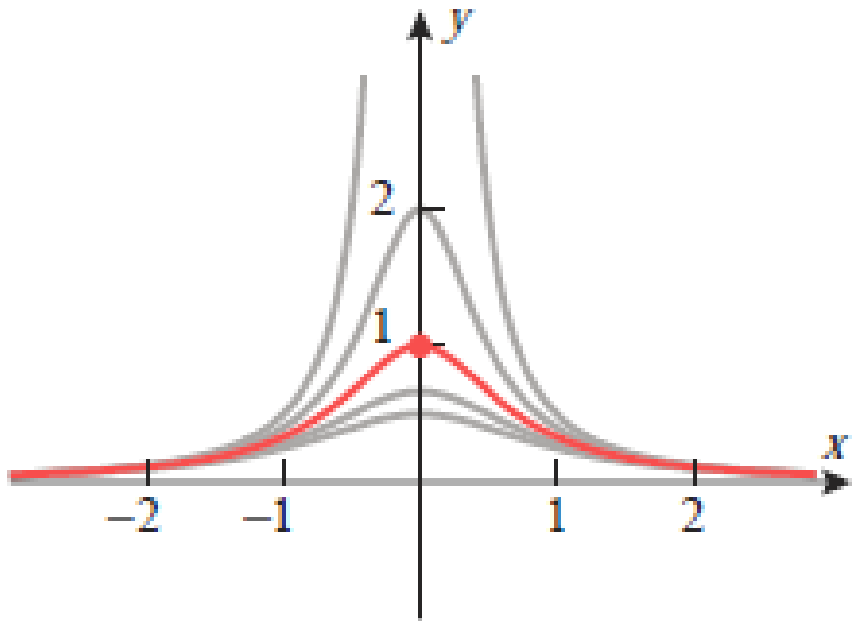
$$\begin{aligned} \ln|y| &= \ln|1+x| + c_1 \\ y &= e^{\ln|1+x|+c_1} = e^{\ln|1+x|} \cdot e^{c_1} \\ &= |1+x|\, e^{c_1} \\ &= \pm e^{c_1}(1+x). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |1+x| = 1+x, & x \geq -1 \\ |1+x| = -(1+x), & x < -1 \end{cases}$$

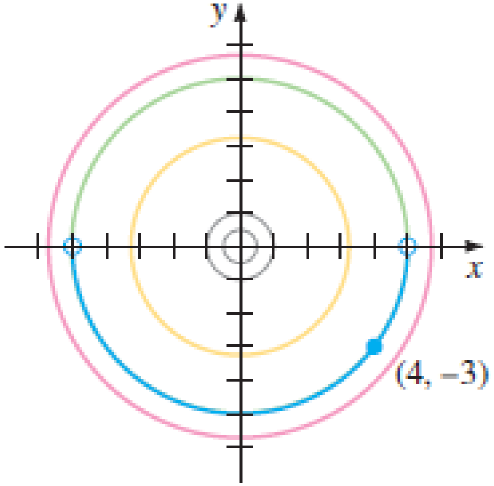
$$\frac{dy}{dx} = -4xy^2 \qquad y(0) = 1$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -4\int x\,dx$$

$$y = \frac{1}{2x^2 - C}$$

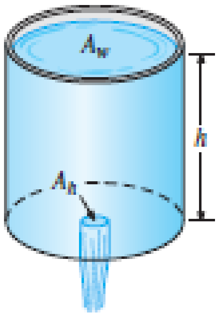


$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad y(4) = -3$$



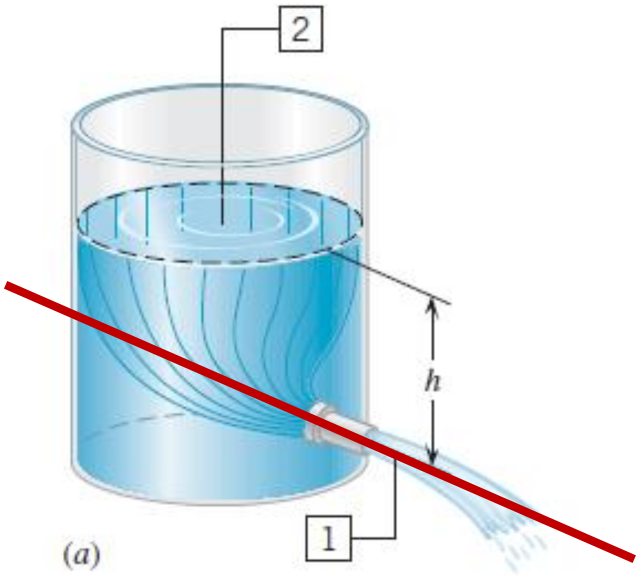
HYDRODYNAMIKA

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = konst$$



$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

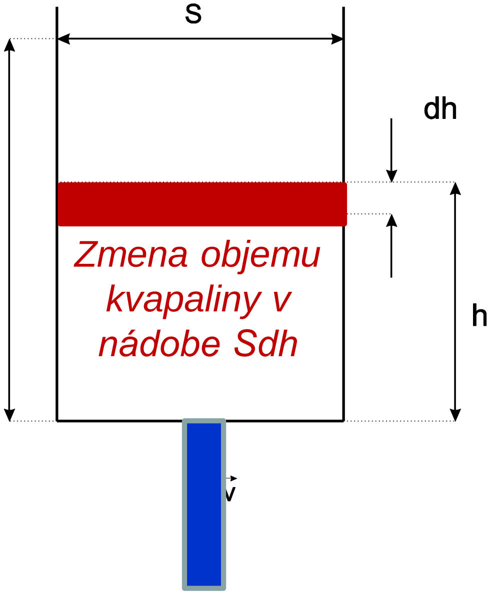


Vo valcovej nádobe s prierezom S siaha kvapalina do výšky H.
Určte závislosť výšky kvapaliny v nádobe od času
Určte čas, za aký vytečie voda z nádoby cez otvor s prierezom s.
Nájdite taký tvar nádoby, aby hladina kvapaliny klesala s konštantnou rýchlosťou, tj. dh/dt=a

$$v = \sqrt{2gh}$$

Za čas dt vytečie z nádoby objem dV, ktorý sa rovná úbytku objemu kvapaliny v nádobe:

Za čas dt vytečie z nádoby objem dV, ktorý sa rovná úbytku objemu kvapaliny v nádobe



Vytečený objem kvapaliny: dV=svdt

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\,dt$$

Počiatočná podmienka: $h(0) = H$

$$h(t) = \left[\sqrt{H} - \frac{s}{2S}\sqrt{2g}\,t\right]^2$$

$$T = \frac{2S\sqrt{H}}{\sqrt{2g}\,s}$$

Adiabatický dej

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} \qquad C_p = C_v + R$$

1. veta termodynamická

$$\delta Q = \delta W' + dU \quad \Rightarrow \quad 0 = pdV + nc_v \boxed{dT}$$

Stavová rovnica

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad dpV + pdV = nR\boxed{dT}$$

$$dpV + pdV = -\frac{R}{C_V} pdV$$

$$\frac{dp}{p} + \chi \frac{dV}{V} = 0$$

$$pV^{\kappa} = konst$$

Homogénne diferenciálne rovnice

x, y sa vyskytuje vo forme podielu

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \sin\left(\frac{y}{x}\right) + 2$$

$$y' = \frac{y}{x}\cos\ln\frac{y}{x}$$

$$y' = \left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)$$

substitúcia $u = \dfrac{y}{x}$ $\quad y' = u'x + u$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

Vedie k separovateľnej DR

$$xy' - y + x = 0$$

$$yy' = 2y - x$$

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$$

Dá sa upraviť na rovnicu so separovanými premennými

Lineárne DR 1. rádu
metóda viariácie konštánt

$$a_1(x)y' + a_0(x)y + g(x) = 0$$
$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Q(x)=0
Homogénna LDR
LDR bez pravej strany
$$y' + P(x)y = 0$$
Rovnica so separovanými premennými

1. Nájdeme homogénne riešenie: $y' + P(x)y = 0$

$$\boxed{y = A\exp\left[-\int P(x)dx\right]}$$

2. Konštantu povýšime na funkciu $A \rightarrow A(x)$

$$\boxed{y = A(x)\exp\left[-\int P(x)dx\right]}$$

3. Dosadíme počiatočné podmienky

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v$$

$$\frac{dv}{g - \frac{\gamma}{m} v} = dt$$

$$-\frac{m}{\gamma} \ln\left| g - \frac{\gamma}{m} v \right| = t + C$$

$$v = \frac{m}{\gamma}\left[g - Ae^{-\frac{\gamma}{m}t} \right]$$

$$v = \left[\frac{m}{\gamma} g + Ke^{-\frac{\gamma}{m}t} \right]$$

$$v_h = Ae^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

$$v = \left[\frac{mg}{\gamma} e^{\frac{\gamma}{m}t} + K \right] e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

$$v = \left[\frac{mg}{\gamma} + Ke^{-\frac{\gamma}{m}t} \right]$$

Zníženie rádu DR

Všeobecný tvar DR druhého rádu

$$y'' = f(x, y, y')$$

DR možno zavedení vhodnej substitúcie previesť na DR prvého rádu, ak sa v nich nevyskytuje jedna z premenných x,y

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' = f(x) \\ y'' = f(x, y') \end{array}} \Rightarrow$$

Chýba y – hľadaná funkcia $\Rightarrow \boxed{y' = z(x)}$

$$\boxed{y'' = f(y, y')} \Rightarrow$$

Chýba x – premenná, podľa ktorej derivujeme $\Rightarrow \boxed{y' = z(y)}$

Zníženie rádu

Vhodnou transformáciou treba previest DR 2. rádu do tvaru DR prvého rádu $y' = f(x,y)$

Neobsahuje ani y ani jeho deriváciu

$$y'' = f(x) \qquad y' = z$$

$$y'' = z'$$

$$z' = f(x)$$

$$y'' = \sin x$$

$$z' = \sin x \qquad z = -\cos x + C_1 \qquad y = -\sin x + C_1 x + C_2$$

Chýba y – hľadaná funkcia

$$y'' = f(x, y') \qquad y' = z(x)$$

$$y'' = z'$$

$$z' = f(x, z)$$

$$y'' = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)} y'$$

$$\left(1+x^2\right) y'' - 2xy' = 0$$

$$\left(1+x^2\right) z' - 2xz = 0 \qquad z = C_1\left(1+x^2\right)$$

$$y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$$

Chýba x – premenná, podľa ktorej derivujeme

$$y'' = f(y, y')$$

$$y' = z(y)$$

$$y'' = z' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$z\frac{dz}{dy} = f(y, z)$$

$$y'' = \frac{1+y'^2}{2y}$$

$$1 + y'^2 = 2yy''$$

$$1 + z^2 = 2yz\frac{dz}{dy}$$

Zníženie rádu

Chýba y – hľadaná funkcia

$$y'' = f(x, y')$$

$$z' = f(x, z)$$

$$y' = z$$

$$y'' = z'$$

Chýba x – hľadaná funkcia

$$m\ddot{x} = F(t)$$

$$m\dot{v} = F(t)$$

$$v = \dot{x}$$

Chýba x – premenná, podľa ktorej derivujeme

$$y'' = f(y, y')$$

$$z\frac{dz}{dy} = f(y, z)$$

$$y' = z(y) = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = z' = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

Chýba t – premenná, podľa ktorej derivujeme

$$m\ddot{x} = F(x)$$

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= F(x) \\ mdv &= F(x)dt \\ mvdv &= F(x)vdt \end{aligned}$$

Keďže za čas dt teleso sa posunie o dx=vdt

$$mvdv = F(x)dx$$

$$\int_{v_0}^{v} mvdv = \int_{x_0}^{x} F(x)dx$$

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F(x)dx$$

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F(x)dx$$

Zmena kinetickej energie sa rovná práci síl

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma}{m}\dot{x}^2}$$

Počiatočné podmienky

$$\boxed{\begin{matrix} x(0) = 0 \\ v(0) = v_0 \end{matrix}}$$

Chýba t

$$\dot{x} = v(x) \qquad \ddot{x} = \frac{dv}{dx}v$$

Separovateľná DR

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{\gamma}{m}v^2$$

$$\boxed{v(x) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}x}}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}x}$$

Chýba x

$$\dot{x} = v(t) \qquad \ddot{x} = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v^2$$

$$\boxed{v(t) = \frac{v_0}{1+\frac{\gamma}{m}v_0 t}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1+\frac{\gamma}{m}v_0 t}$$

Kombinovaný postup

$$\boxed{\begin{matrix} v(x) = v(t) \\ v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}x} = \frac{v_0}{1+\frac{\gamma}{m}v_0 t} \end{matrix}}$$

$$\boxed{x = \frac{m}{\gamma}\ln\left(\frac{\gamma}{m}v_0 t + 1\right)}$$

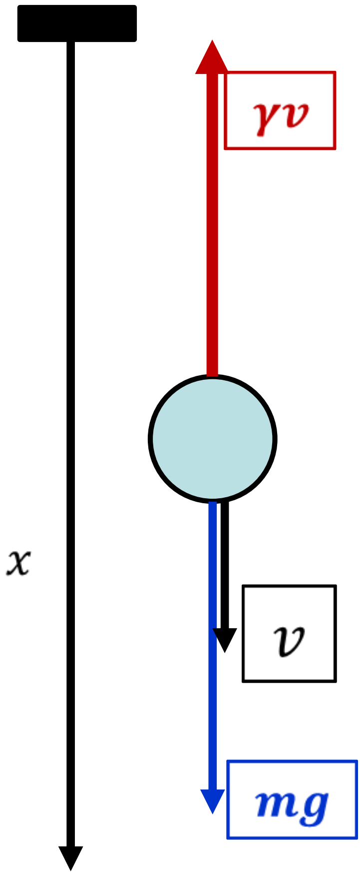
$$\boxed{m\ddot{x} = mg - \gamma\dot{x}}$$

$$\dot{x} = v(t) \qquad \ddot{x} = \frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \rightarrow \begin{cases} separovate \ln a \\ LDR \end{cases}$$

$$\dot{x} = v(x) \qquad \ddot{x} = \frac{dv}{dx}v$$

$$m\frac{dv}{dx}v = mg - \gamma v \rightarrow m\frac{vdv}{mg - \gamma v} = dx$$



$$m\frac{d}{dt}v = mg - \gamma v \qquad \boxed{v(0) = v_0}$$

$$|mg - bv| = e^{-bc}e^{-bt/m}$$

$$mg - bv = Ae^{-bt/m},$$

$$v = \frac{mg}{\gamma} + \left[v_0 - \frac{mg}{\gamma}\right]e^{-\frac{\gamma t}{m}}$$

$$\boxed{x(0) = 0}$$

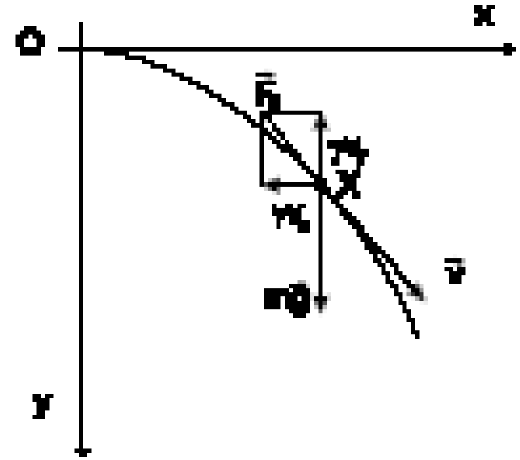
$$x(t) = \frac{mg}{\gamma}t - \frac{m}{\gamma}\left(v_0 - \frac{mg}{\gamma}\right)e^{-\gamma t/m} + c$$

$$0 = -\frac{m}{b}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) + c$$

$$c = \frac{m}{b}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right).$$

$$x(t) = \frac{mg}{\gamma}t - \frac{m}{\gamma}\left(v_0 - \frac{mg}{\gamma}\right)\left(1 - e^{-\gamma t/m}\right)$$

Príklad 10 Nájdite trajektóriu vodorovne vrhnutého telesa vo vzduchu. Odpor prostredia je priamo úmerný okamžitej rýchlosti



Diferenciálna rovnica

$$m\frac{d}{dt}\vec{v} = m\vec{g} - \gamma\vec{v} \quad \Rightarrow$$

Diferenciálna rovnica v zložkovom tvare

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v_x + \dfrac{\gamma}{m}v_x = 0 \\ \dfrac{d}{dt}v_y + \dfrac{\gamma}{m}v_y = g \end{cases}$$

Počiatočné podmienky

$$v_x(0) = v_0$$
$$v_y(0) = 0$$

Príklad

Lopta je hodená smerom nahor počiatočnou rýchlosťou v0. Opor prostredia je úmerný rýchlosti.

Určte výšku, do ktorej sa teleso dostane $\rightarrow v(x)$

Určte rýchlosť lopty, ktoru dopadne na zem.

Určte čas letu lopty