Komplexný čísla a ich zobrazenie

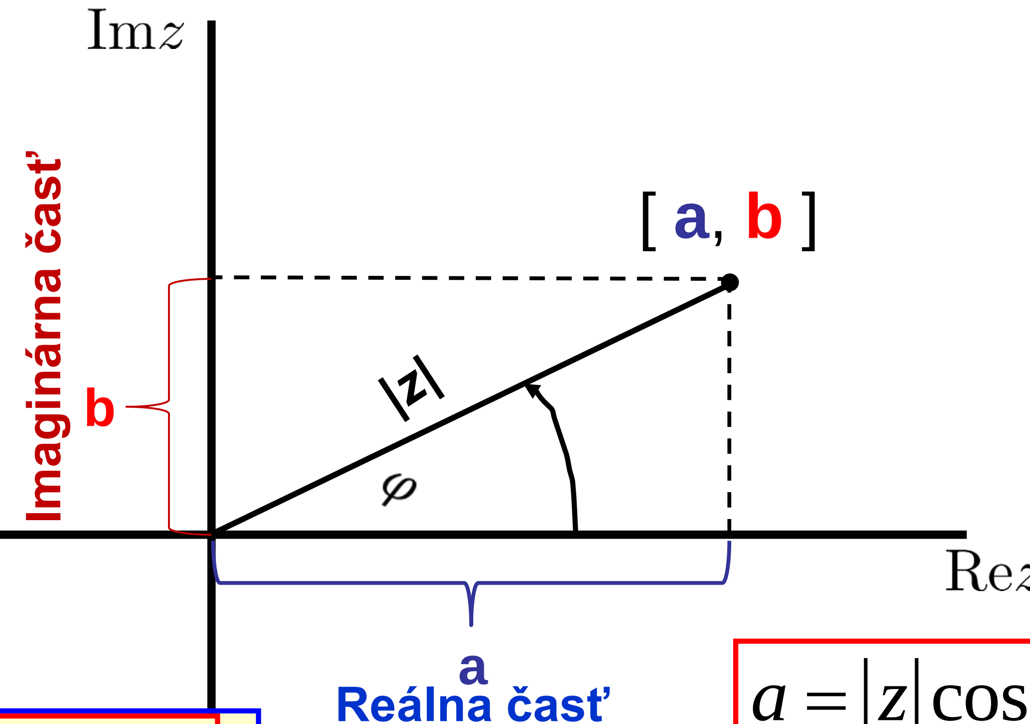
Obraz komplexného čísla je bod

$$a = \mathrm{Re}\{z\}$$

$$b = \mathrm{Im}\{z\}$$

|z| –modul komplexného čísla

$$\boxed{z = a + ib}$$



$$z = a + ib = \begin{cases} \boxed{|z|\left[\cos\varphi + i\sin\varphi\right]} \\ \\ \boxed{|z|\, e^{i\varphi}} \end{cases}$$

$$a = |z|\cos\varphi$$

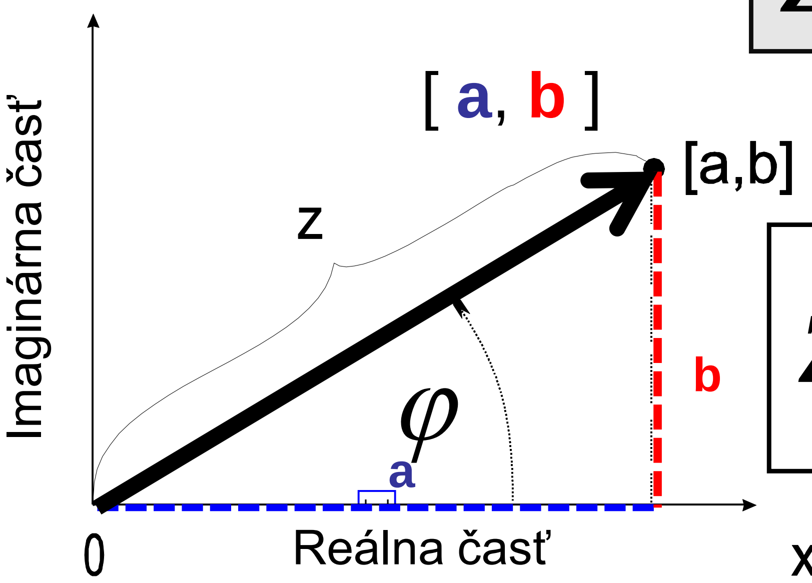
$$b = |z|\sin\varphi$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Komplexný vektor a jeho zobrazenie

Obraz komplexného vektora je orientovaná úsečka



$$z = a + ib$$

Charakteristiky komplexného čísla

Veľkosť **fáza** **zložky**

$$z = |z| e^{i\varphi}$$

$$tg\varphi = \frac{\mathrm{Im}\{z\}}{\mathrm{Re}\{z\}} = \frac{b}{a}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{zz^{\bullet}}$$

$$|z| = \sqrt{Re^2\{z\} + Im^2\{z\}}$$

Rôzne tvary komplexných čísel

$$z = a + ib$$ algebraický

$$z = |z|\left[\cos\varphi + i\sin\varphi\right]$$ trigonometrický

$$z = |z|\, e^{i\varphi}$$ exponenciálny

|z| –modul komplexného čísla

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Komplexné čísla využitie rôznych tvarov

$$z_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 = e^{i\varphi_1}$$
$$z_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2 = e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 z_2$$

Trigonometrická forma

$$\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) =$$
$$\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right] + i\left[\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right]$$

Exponenciálna forma

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = \cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$
$$\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2 = \sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

Nahrádzanie harmonických funkcií komplexnými

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad x = \mathrm{Im}\left\{Ae^{i(\omega t+\varphi)}\right\}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad x = \mathrm{Re}\left\{Ae^{i(\omega t+\varphi)}\right\}$$

$$\boxed{\hat{x} = Ae^{i(\omega t+\varphi)}}$$

Častokrát pri skladaní vlnení potrebujeme poznať len druhú mocninu výsledého vlnenia v danom bode, pretože určuje intenzitu. K amplitúde sa dostaneme jednoducho:

$$\boxed{A^2 = \hat{x} \bullet \hat{x}^{\bullet}}$$

Modul komplexného vektora zodpovedá amplitúde harmonickej funkcie, ktorú tento vektor reprezentuje

Použitie komplexných čísel na výpočet integrálu

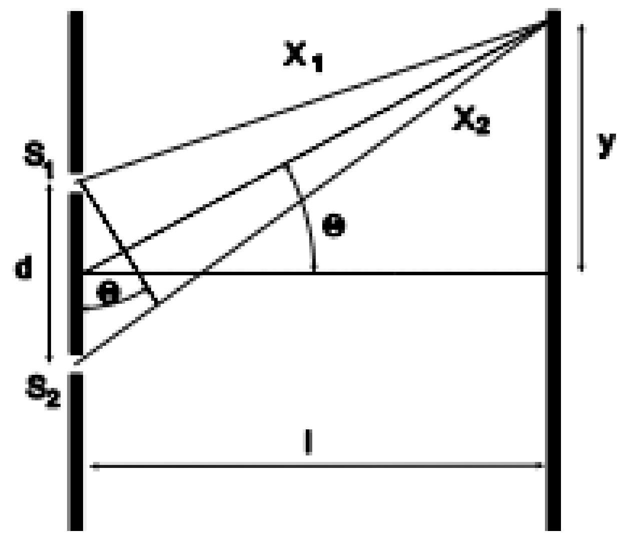
$$\int e^x \cos x \, dx = \mathrm{Re}\left\{ \int e^x e^{ix} \; dx \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \int e^{x(i+1)} \; dx \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{e^{x(i+1)}}{i+1} + C \right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \frac{e^{x(i+1)}}{i+1} \bullet \frac{-i+1}{-i+1} + C \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{e^x \left(\cos x + i \sin x\right)}{2} \bullet \left(-i+1\right) + C \right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \frac{e^x \left(\cos x + i \sin x\right)}{2} \bullet \left(-i+1\right) + C \right\} = \frac{1}{2}\left\{ e^x \cos x + e^x \sin x \right\}$$

Youngov experiment

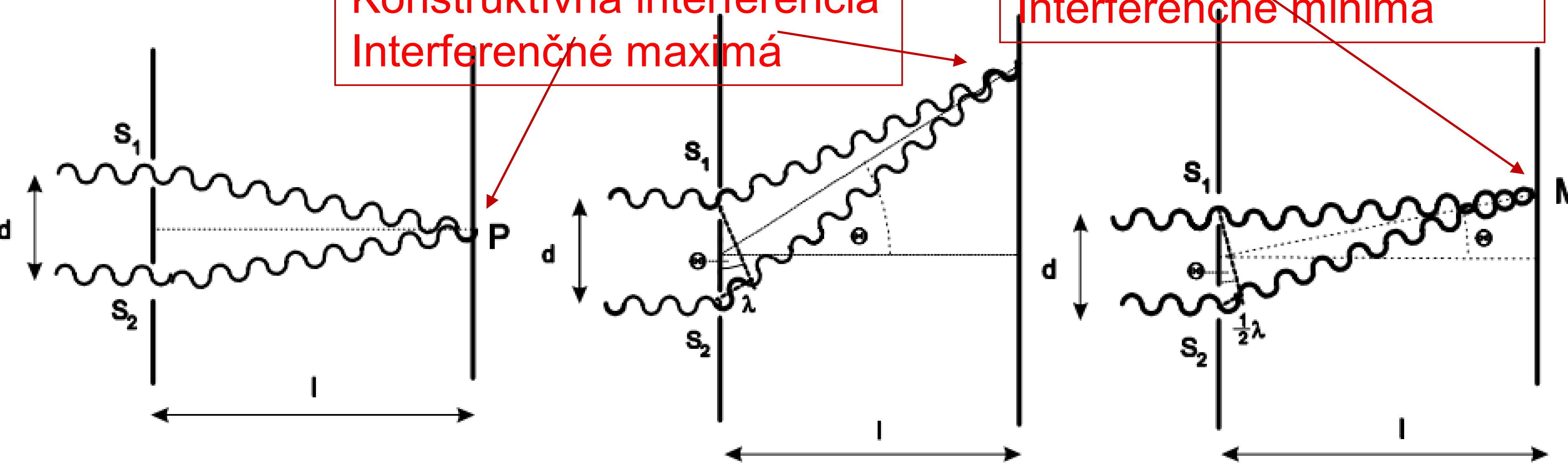
Dvojzväzková interferencia



$$E_1 = A_1 \cos\left[\omega t - \varphi_1\right]$$
$$E_2 = A_2 \cos\left[\omega t - \varphi_2\right]$$

Konštruktívna interferencia
Interferenčné maximá

Deštruktívna interferencia
Interferenčné minimá



Dvojzväzková interferencia

Interferenciou vznikne opäť harmonická funkcia so svojimi charakteristikami

$$E_1 = A_1 \cos\left[\omega t - \varphi_1\right]$$

$$E_2 = A_2 \cos\left[\omega t - \varphi_2\right]$$

$$E = A\cos\left[\omega t - \varphi\right]$$

Analýza cez trigonometrické funkcie

$$E = E_1 + E_2 \rightarrow A\cos\left(\omega t - \varphi\right)$$

$$E = \boxed{\left[A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2\right]}\cos\omega t + \boxed{\left[A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2\right]}\sin\omega t$$

$$\boxed{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} = A\cos\varphi$$

$$\boxed{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2} = A\sin\varphi$$

Pripomína súčtové vzorce

$$E = A\cos\varphi\cos\omega t + A\sin\varphi\sin\omega t = A\cos\left[\omega t - \varphi\right]$$

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}$$

Dvojzväzková interferencia

Analýza cez trigonometrické funkcie

$$E = A\cos\varphi\cos\omega t + A\sin\varphi\sin\omega t = \boxed{A}\cos\left[\omega t - \boxed{\varphi}\right]$$

V týchto rovniciach sú charakteristiky výslednej vlny:

$$A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 = A\cos\varphi$$
$$A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 = A\sin\varphi$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$\left[A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2\right]^2 + \left[A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2\right]^2 = A^2$$
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

Dvojzväzková interferencia

Analýza cez komplexné čísla

$$E_1 = A_1 \cos[\omega t - \varphi_1] = \mathrm{Re}\left\{A_1 e^{i[\omega t - \varphi_1]}\right\}$$

KÓDOVANIE cez komplexné čísla

$$E_2 = A_2 \cos[\omega t - \varphi_2] = \mathrm{Re}\left\{A_2 e^{i[\omega t - \varphi_2]}\right\}$$

$$E = E_1 + E_2 = A_1 \cos[\omega t - \varphi_1] + A_2 \cos[\omega t - \varphi_2] = \mathrm{Re}\left\{A_1 e^{i[\omega t - \varphi_1]} + A_2 e^{i[\omega t - \varphi_2]}\right\} = \mathrm{Re}\left\{E\right\}$$

$$\hat{E} = A_1 e^{i[\omega t - \varphi_1]} + A_2 e^{i[\omega t - \varphi_2]} = \underbrace{\left[A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}\right]}_{\text{Komplexné číslo s amplitúdou A a fázou } \varphi} e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Komplexné číslo s amplitúdou A a fázou φ

$$A = \sqrt{E \times E^*} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Ae^{i\varphi}} \quad \Leftarrow \quad tg\varphi = \frac{\mathrm{Im}\{\hat{E}\}}{\mathrm{Re}\{\hat{E}\}}$$

Dvojzväzková interferencia

Analýza cez komplexné čísla

$$E = \mathrm{Re}\Big\{\underbrace{A_1 e^{i[\omega t-\varphi_1]} + A_2 e^{i[\omega t-\varphi_2]}}_{\boxed{\hat{E}}}\Big\} = \mathrm{Re}\Big\{\underbrace{\big[A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 - i\left(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2\right)\big]}_{\text{Komplexné číslo s amplitúdou A a fázou } \varphi} e^{i\omega t}\Big\}$$

$$tg\varphi = \frac{\mathrm{Im}\{\hat{E}\}}{\mathrm{Re}\{\hat{E}\}}$$

$$\boxed{Ae^{i\varphi}}$$

$$|A| = \sqrt{E\times E^*}$$

$$tg(-\varphi) = \frac{\mathrm{Im}\{E\}}{\mathrm{Re}\{E\}}$$

DEKÓDOVANIE:

Amplitúda A:

$$\hat{E}\times\hat{E}^* = \left[A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}\right]\times\left[A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}\right] = A^2$$

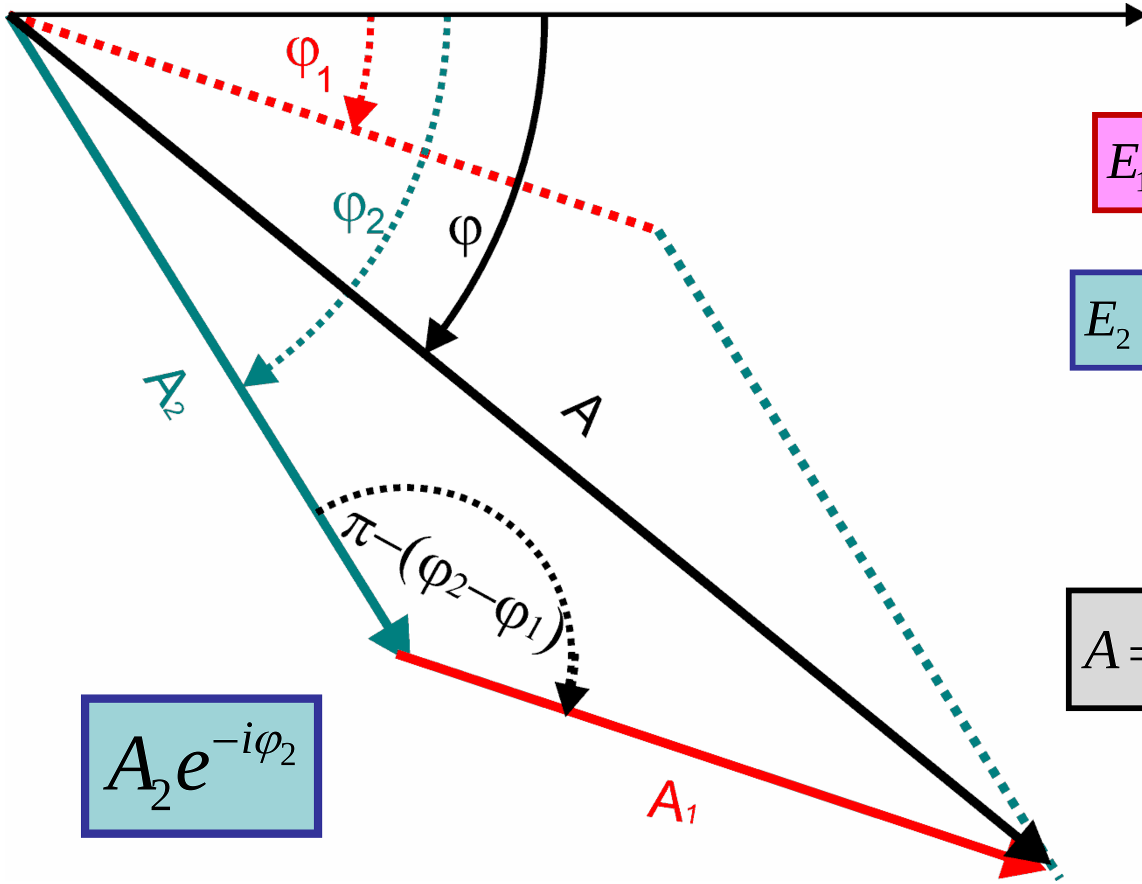
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

Fáza φ:

$$tg\varphi = -\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

Dvojzväzková interferencia

Analýza cez grafické zobrazenie fázorov



$$E_1 = A_1 \cos\left[\omega t - \varphi_1\right] \quad \rightarrow \quad A_1 e^{i[\omega t - \varphi_1]}$$

$$E_2 = A_2 \cos\left[\omega t - \varphi_2\right] \quad \rightarrow \quad A_2 e^{i[\omega t - \varphi_2]}$$

Zobrazme v čase t=0

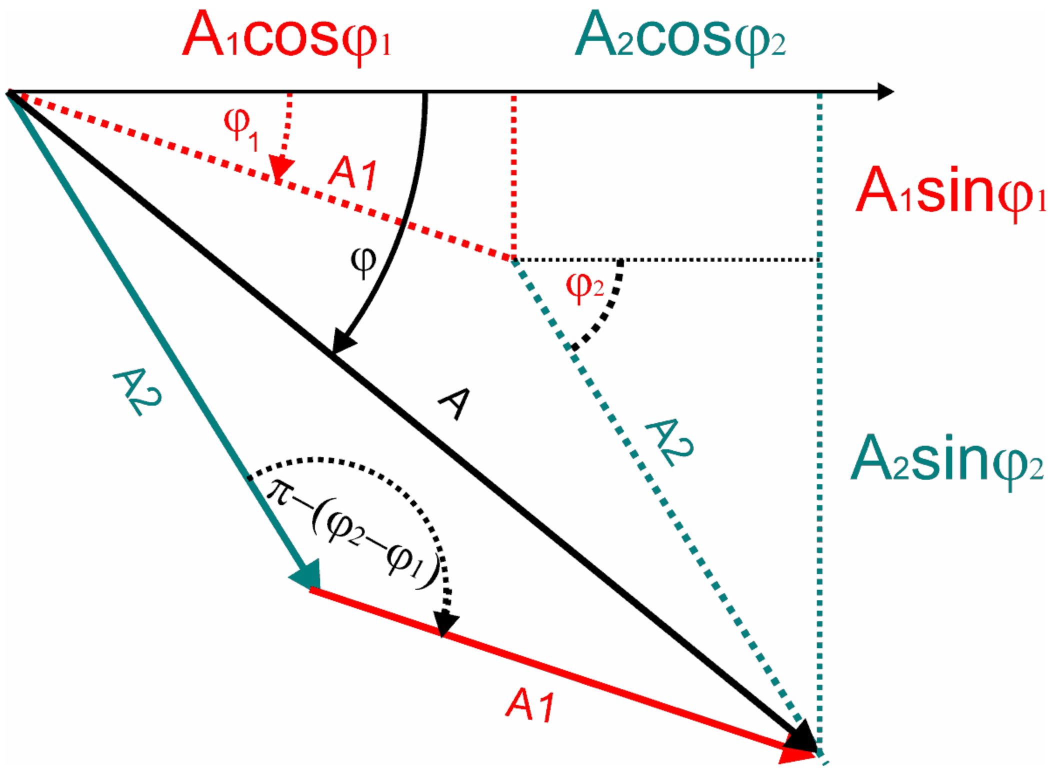
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}$$

$$A_2 e^{-i\varphi_2}$$

$$A_1 e^{-i\varphi_1}$$

Dvojzväzková interferencia

Analýza cez grafické zobrazenie fázorov



$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$y = \mathrm{Re}\left\{ Ae^{i(\omega t - \varphi)} \right\}$$

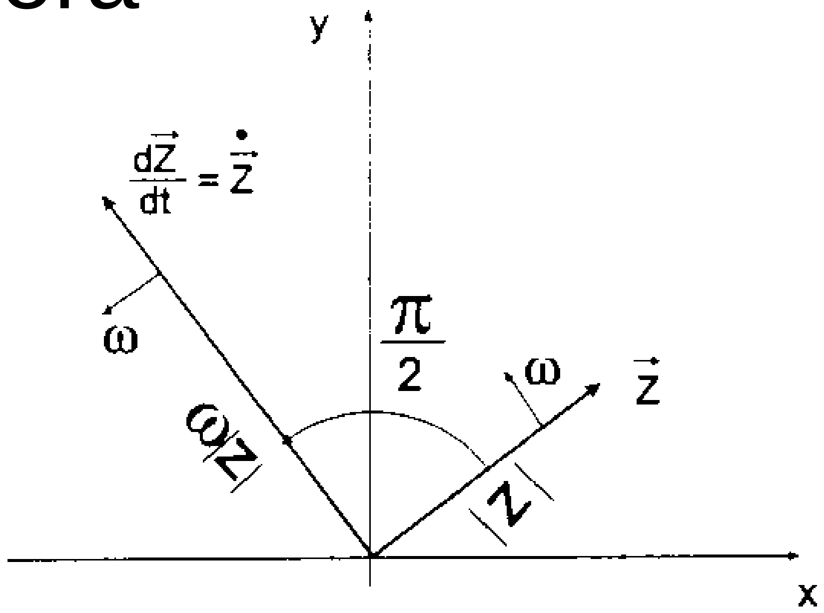
Násobenie komplexného čísla imaginárnou jednotkou

$$i\hat{z}_1 = i\left|z_1\right|e^{i\varphi_1} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left|z_1\right|e^{i\varphi_1} = \left|z_1\right|e^{i\left[\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right]}$$

$$i\hat{z}_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}\hat{z}_1$$

Vynásobením komplexného vektora imaginárnou jednotkou dostávame komplexný vektor, ktorý je otočený vzhľadom na pôvodný vektor o π/2

Derivácia komplexného časového vektora

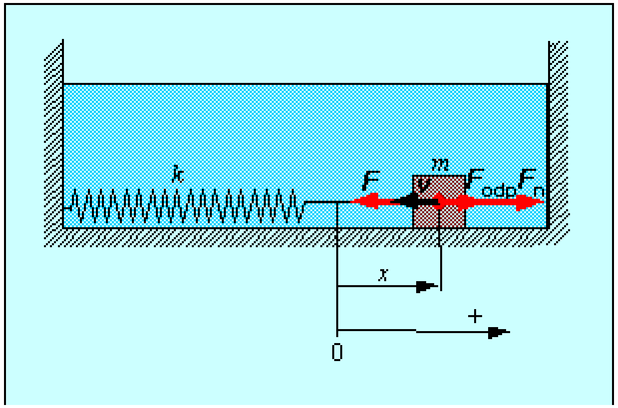


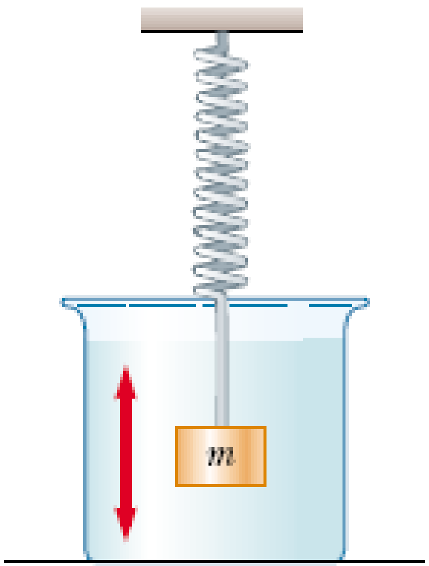
$$\boxed{\hat{Z}(t) = |z| e^{i\,[\omega t + \varphi]}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\hat{Z}(t) = i\omega |z| e^{i\,[\omega t+\varphi]} = i\omega\,\hat{Z}(t) = \omega\,\hat{Z}(t) e^{i\,\frac{\pi}{2}}}$$

Derivovať časový vektor znamená natiahnuť ho ω krát a otočiť vzhľadom na pôvodný vektor o $\pi/2$

Vynútené kmity





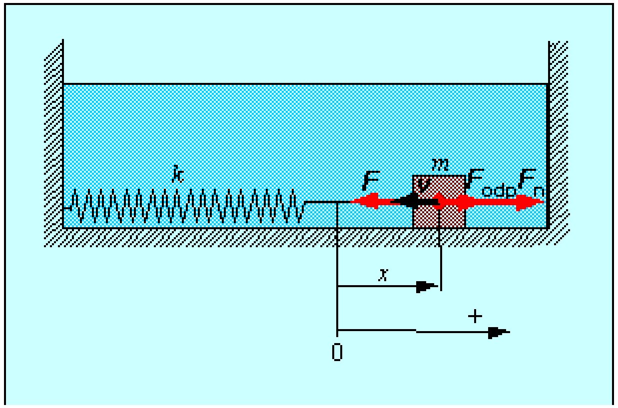
$$m\ddot{x} + \gamma \dot{x} + kx = F_0 \cos[\omega t]$$

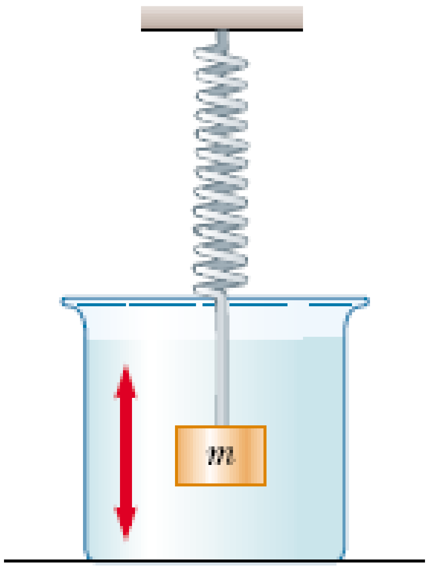
$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos[\omega t]$$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos[\omega t]$$

$$\mathrm{Re}\left\{\ddot{\hat{x}} + \frac{\gamma}{m}\dot{\hat{x}} + \omega_0 \hat{x}\right\} \quad = \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{F_0}{m}e^{i\omega t}\right\}$$

Vynútené kmity- ustálený stav





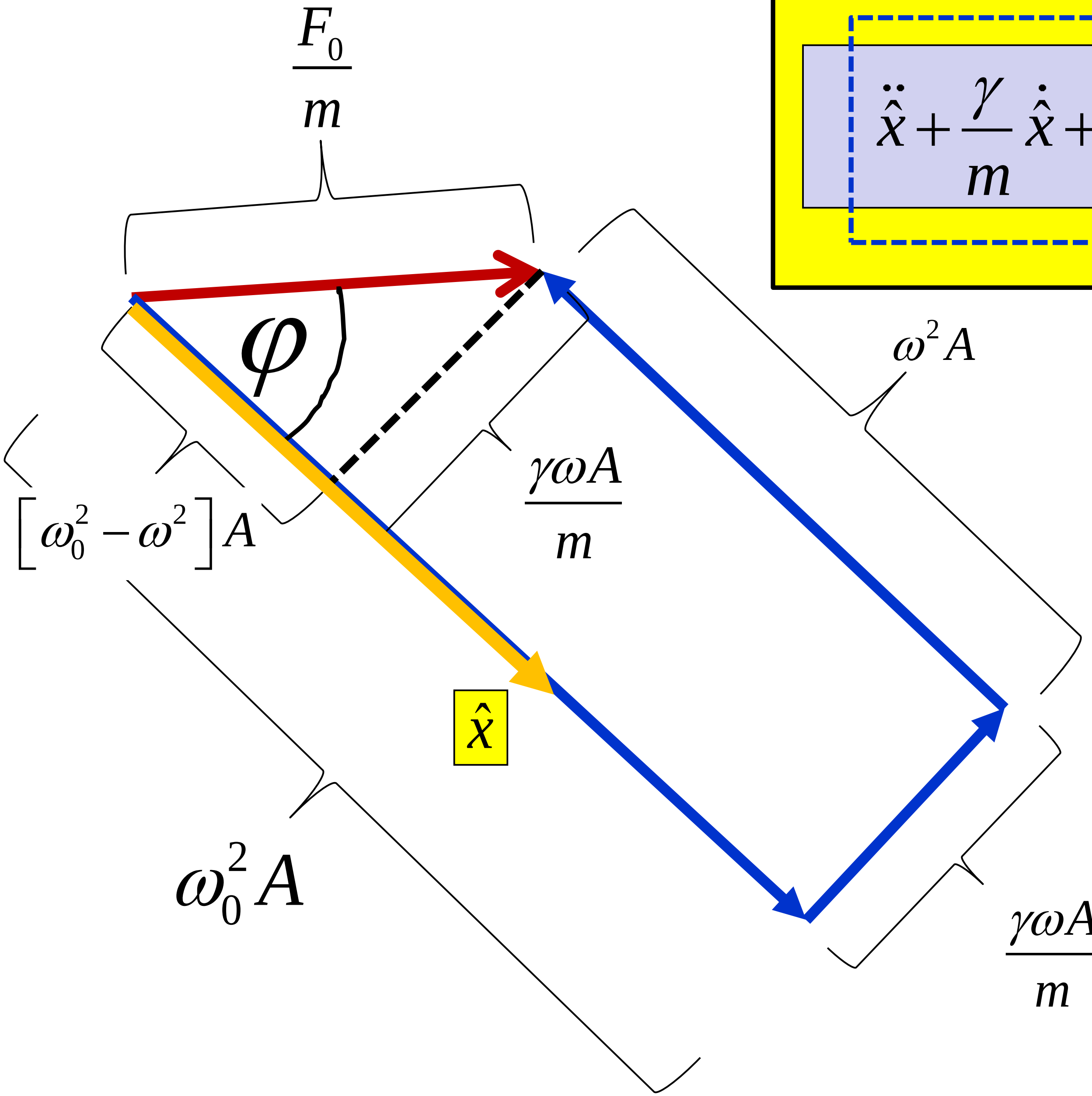
Rovnica pre komplexné vektory

$$\ddot{\hat{x}} + \frac{\gamma}{m}\dot{\hat{x}} + \omega_0^2 \hat{x} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

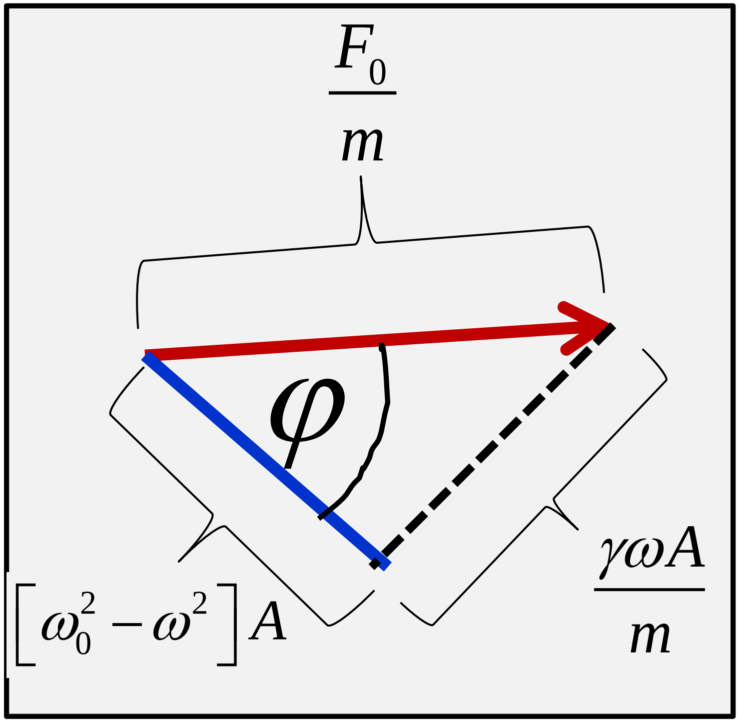
GRAFICKÝ PRÍSTUP – ZOBRAZENIE FÁZOROV

Vektorová rovnica

$$\ddot{\hat{x}} + \frac{\gamma}{m}\dot{\hat{x}} + \omega_0^2 \hat{x} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$



Zobrazenie rotujúceho obrazca v čase t=0



Vektorová rovnica

$$\ddot{\hat{x}}+\frac{\gamma}{m}\dot{\hat{x}}+\omega_0\hat{x}=\frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

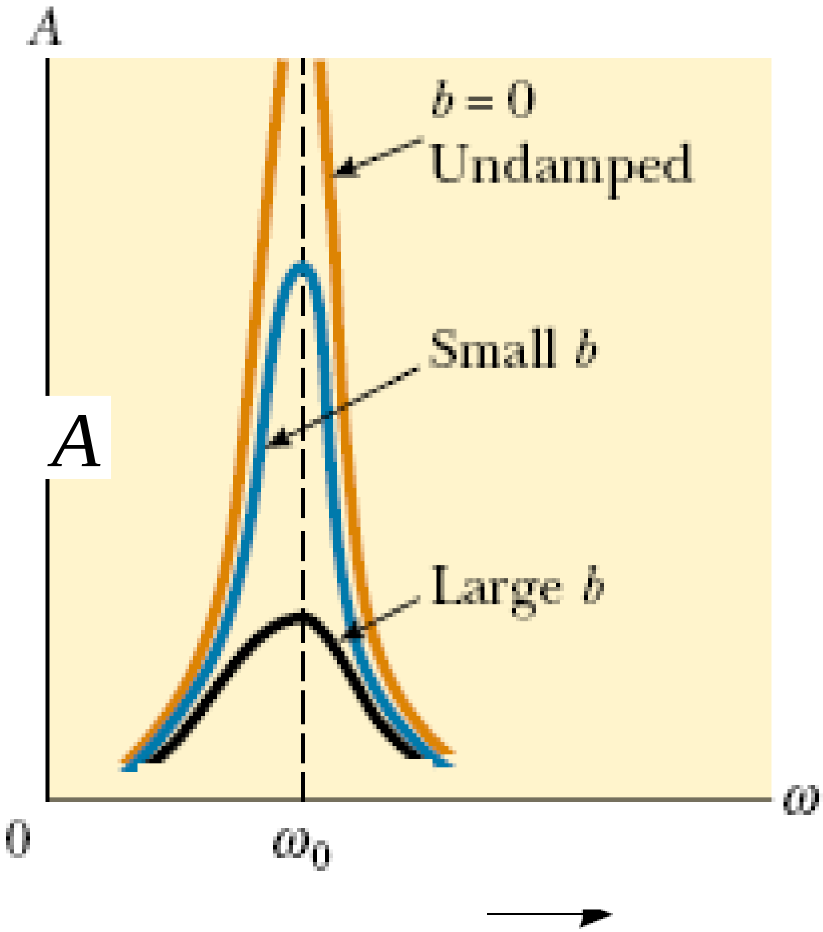
$$\left[\omega_0^2-\omega^2\right]^2A^2+\left(\frac{\gamma\omega A}{m}\right)^2=\left(\frac{F_0}{m}\right)^2$$

$$A=\frac{\left(\frac{F}{m}\right)}{\sqrt{\left[\omega_0^2-\omega^2\right]^2+\left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}}$$

$$tg\varphi=\frac{\left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)}{\left[\omega_0^2-\omega^2\right]}$$

$$x=A\cos\left(\omega t-\varphi\right)$$

Amplitúdová charakteristika



$$A = \frac{\left(\frac{F}{m}\right)}{\sqrt{\left[\omega_0^2 - \omega^2\right]^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}}$$

Rezonančná frekvencia:

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2}$$

Ak systém kmitá s rezonančnou frekvenciou, jeho rozkmit je maximálny

Rezonancia – veľké rozkmitanie systému periodickou vonkajšou silou s malou amplitúdou F_0

$$\ddot{x}+\frac{\gamma}{m}\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\cos\left(\omega t\right)$$

$$\ddot{x}+\frac{\gamma}{m}\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\sin\left(\omega t\right)$$

KODOVANIE

$$\ddot{\hat{x}}+\frac{\gamma}{m}\dot{\hat{x}}+\omega_0^2\hat{x}=\frac{F_0}{m}\exp\left(i\omega t\right)$$

DEKÓDOVANIE

$$x=\mathrm{Re}\left\{\hat{x}\right\}$$

$$x=\mathrm{Im}\left\{\hat{x}\right\}$$

$$\ddot{\hat{x}} + \frac{\gamma}{m}\dot{\hat{x}} + \omega_0^2 \hat{x} = \frac{F_0}{m}\exp(i\omega t)$$

$$\hat{x} = \hat{A}e^{i\omega t}$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}i\omega e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\hat{x}} = \hat{A}(i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 Ae^{i\omega t}$$

$$\hat{A} = \frac{F/m}{\sqrt{\left[\omega_0^2 - \omega^2\right]^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}} e^{-i\varphi} \qquad tg\varphi = \frac{\left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)}{\left[\omega_0^2 - \omega^2\right]}$$

$$\hat{x} = \hat{A}e^{i\omega t} = \frac{F/m}{\sqrt{\left[\omega_0^2 - \omega^2\right]^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}} e^{i(\omega t - \varphi)} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{\hat{x}\} = \dfrac{F/m}{\sqrt{\left[\omega_0^2 - \omega^2\right]^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \\ \mathrm{Im}\{\hat{x}\} = \dfrac{F/m}{\sqrt{\left[\omega_0^2 - \omega^2\right]^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

Nájdite štvorec výslednej amplitúdy A^2 vlnenia, ktoré vznikne superpozíciou nekonečného radu harmonických vlnení s tou istou frekvenciou. Amplitúdy vlnení tvoria geometrickú postupnosť a , a/2, a/4, ...a fázy aritmetickú postupnosť 0, $\pi/2$, π... Výpočet znázornite graficky

$$y_1 = a\cos(\omega t - 0) \quad \rightarrow \quad y_1 = \mathrm{Re}\left\{a\exp\left[i(\omega t - 0)\right]\right\}$$

$$y_2 = \frac{a}{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \rightarrow \quad y_2 = \mathrm{Re}\left\{\frac{a}{2}\exp\left[i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$y_3 = \frac{a}{4}\cos(\omega t - \pi) \quad \rightarrow \quad y_3 = \mathrm{Re}\left\{\frac{a}{4}\exp\left[i(\omega t - \pi)\right]\right\}$$

q

q

Geometrická postupnosť s q=1/2exp(-iπ/2) Prenásobením predchodcu q dostávame nasledovníka

...

$$y_n = \frac{a}{2^{n-1}}\cos\left(\omega t - (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \quad \rightarrow \quad y_n = \mathrm{Re}\left\{\frac{a}{2^{n-1}}\exp\left[i\left(\omega t - (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

Stačí spočítať súčet nekonečnej geometrickej postupnosti

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{2^{n-1}}\cos\left(\omega t - (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \quad \rightarrow \quad y = \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{2^{n-1}}\exp\left[i\left(\omega t - (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = \mathrm{Re}\left\{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a\exp[i\omega t]\left[\frac{\exp\left[-i\frac{\pi}{2}\right]}{2}\right]^{n-1}}\right\}$$

$$\boxed{A^2 = y \bullet y^* = \frac{4a^2}{5}}$$