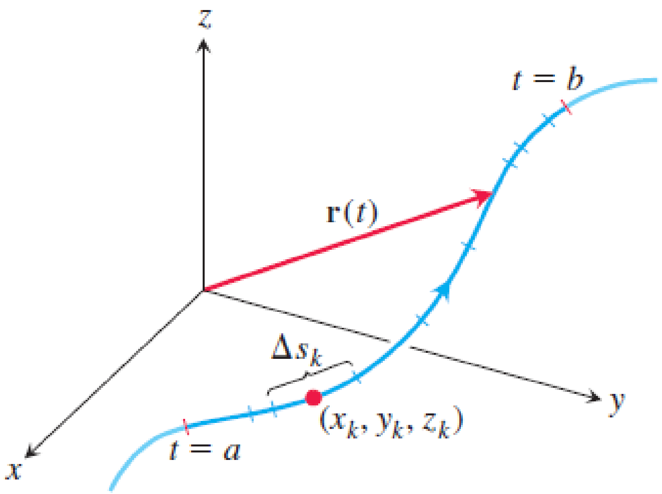
Krivkové integrály

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\boxed{ds}$$ ·····> dĺžkový element krivky Γ

$$\int_\Gamma \vec{F}\bullet\boxed{d\vec{l}}$$

$$\int_\Gamma F_x dx \quad \int_\Gamma F_y dy \quad \int_\Gamma F_z dz$$

Orientovaná krivka



- **parametrizácia krivky**

$$x(t) \Rightarrow dx = \frac{dx}{dt}dt$$

$$y(t) \Rightarrow dy = \frac{dy}{dt}dt$$

$$z(t) \Rightarrow dz = \frac{dz}{dt}dt$$

Parametrizácia krivky vytvára z krivkového integrálu „obyčajné integrály“ a preto je klúčom k ich riešeniu

$$ds = \left|\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt\right|$$

$$\int_a^b f\left(\vec{r}(t)\right)\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|dt$$

Rôzne parametrizácie tej istej krivky vedú k rovnakým výsledkom

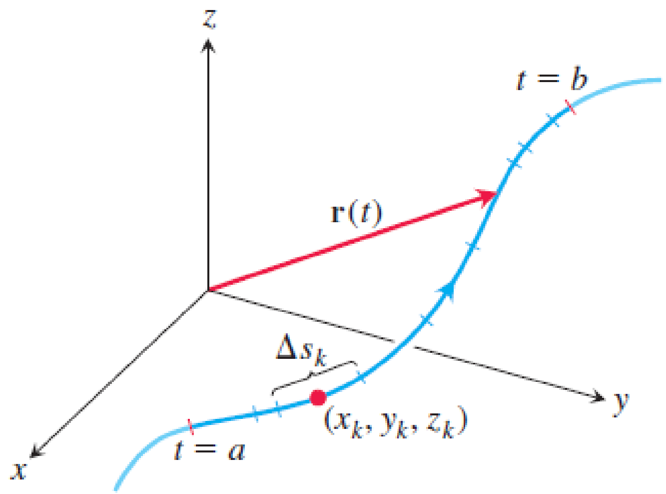
Krivkové integrály

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\boxed{ds}$$ dĺžkový element krivky Γ

$$\int_\Gamma \vec{F} \bullet \boxed{d\vec{l}}$$

Orientovaná krivka

$$\int_\Gamma F_x dx \quad \int_\Gamma F_y dy \quad \int_\Gamma F_z dz$$



- **parametrizácia krivky**

$$x = \alpha(t) \Rightarrow dx = \frac{d\alpha}{dt}dt$$

$$y = \beta(t) \Rightarrow dy = \frac{d\beta}{dt}dt$$

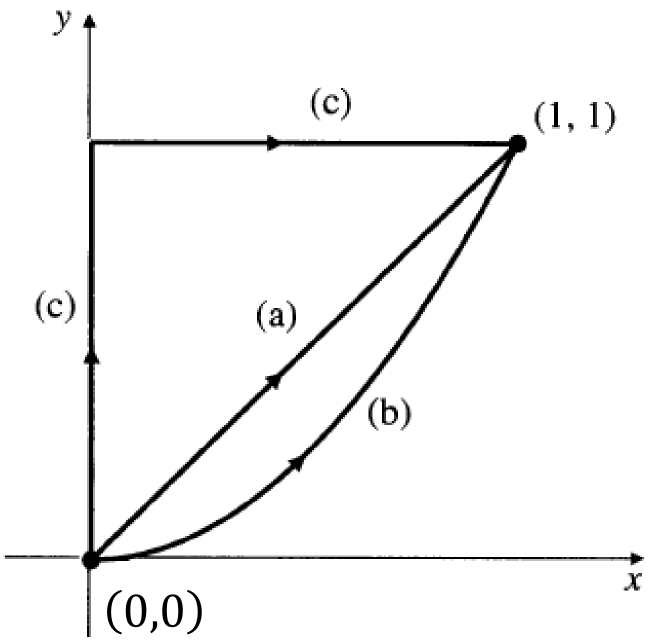
$$z = \gamma(t) \Rightarrow dz = \frac{d\gamma}{dt}dt$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$\int_a^b f\left(\vec{r}(t)\right)\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$$

Rôzne parametrizácie tej istej krivky vedú k rovnakým výsledkom

$$F\left(x,y\right)=y^2\vec{i}+2xy\vec{j} \qquad \left(0,0\right)\rightarrow\left(1,1\right)$$



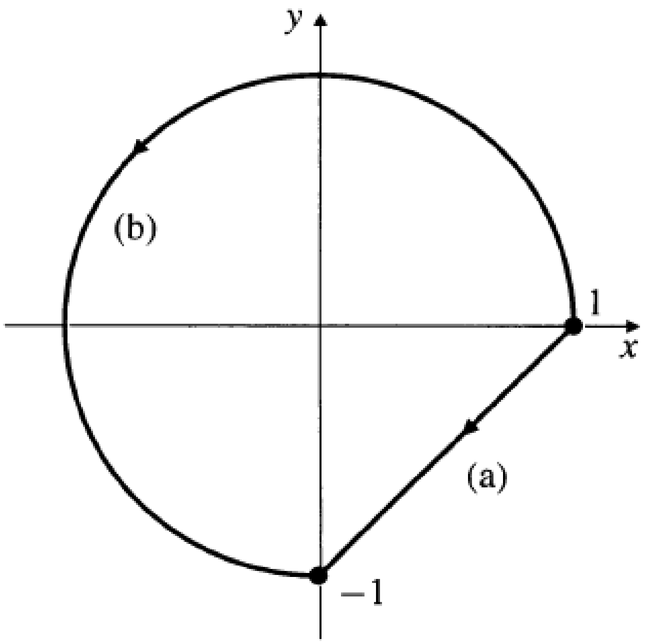
Vypočítajte prácu sily, ak sa teleso presunulo z bodu $(0{,}0) \rightarrow (1{,}1)$ po roznych krivkách

$$F\left(x,y\right)=y^2\vec{i}+2xy\vec{j}$$

Priamka $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t\mathbf{j},\ 0 \le t \le 1.$

Parabola $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j},\ 0 \le t \le 1.$

Lomená krivka



$$F(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j} \qquad (1,0) \to (0,-1)$$

Priamka $\quad \mathbf{r} = (1-t)\mathbf{i} - t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$

Úsek kružnice $\quad \mathbf{r} = \cos t\, \mathbf{i} + \sin t\, \mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \frac{3\pi}{2}$

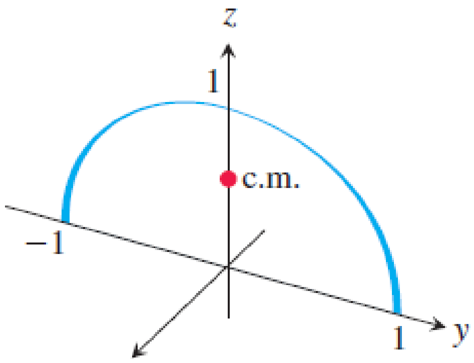
$$x = \frac{1}{M}\int_{\Gamma} x\lambda dl$$

$$y = \frac{1}{M}\int_{\Gamma} y\lambda dl$$

$$z = \frac{1}{M}\int_{\Gamma} z\lambda dl$$

Príklad

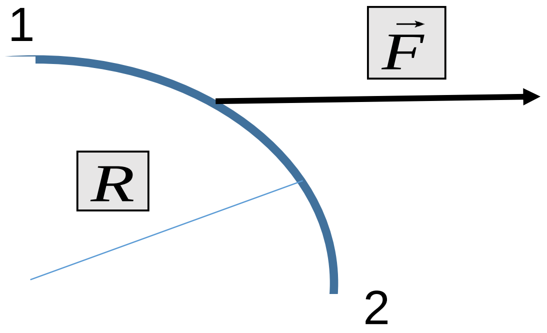
- Nájdite súradnice ťažiska polkružnice s polomerom R.



$y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$

$$\lambda = 2 - z$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}, \qquad 0 \leq t \leq \pi$$



Vypočítajte prácu, ktorú vykonala sila F, ak premiestnila teleso s hmotnosťou m z bodu 1 do bodu 2, po kružnici s polomerom R. Sila F má horizontálny smer.
Určte rýchlosť telesa v bode 2, ak teleso bolo pôvodne v pokoji a iné sily na neho nepôsobili.
Ako by situácia vyzerala, kebyže je teleso ešte aj v gravitačnom poli.

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_{v_1}^{v_2} m dv\, v = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Príklad

- Vypočítajte prácu, ktorú vykonala sila :

$$\vec{F} = \left[xy; -2; y^2 - x^2 \right]$$

keď premiestnila teleso z bodu A[0,0,5] do bodu B[1,1,5] po dvoch roznych krivkách:

a, parabole

b, prianke