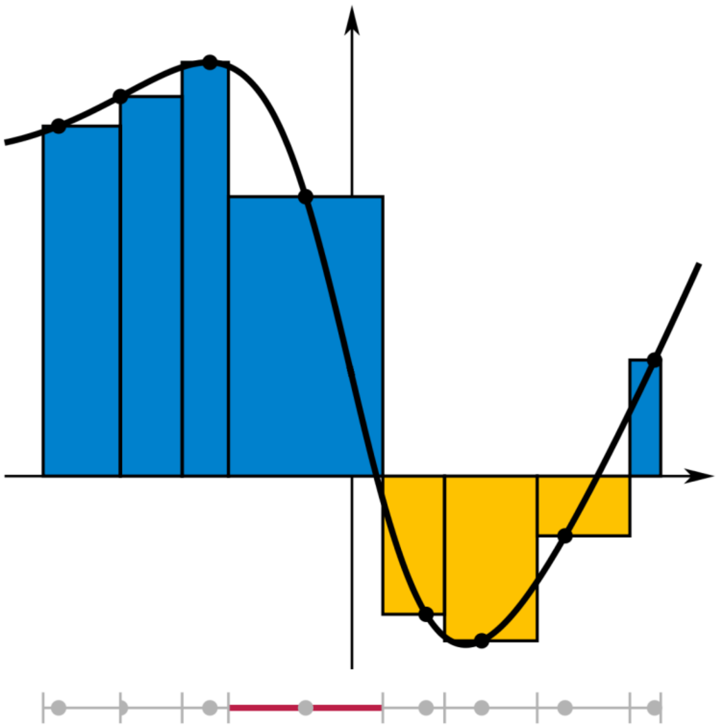
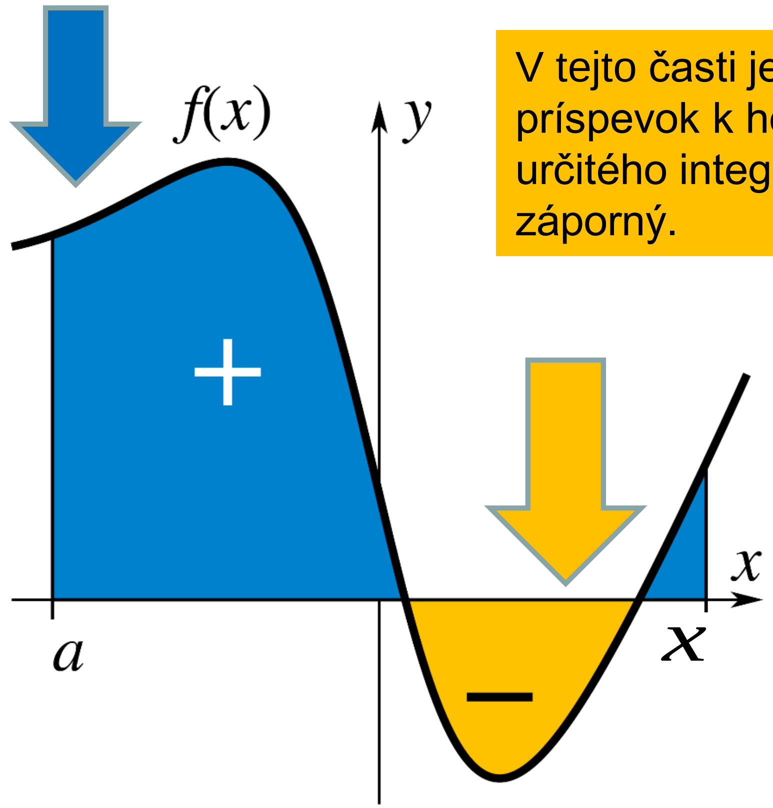
Rady

Fourierove rady

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

V tejto časti je príspevok k určitému integrálu kladný





V tejto časti je príspevok k hodnote určitého integrálu záporný.

Periodické funkcie

$$T = \frac{1}{f}$$

Koľkokrát sa opakuje daný priebeh za jednu sekundu

$$f\left(t+T\right)=f\left(t\right)$$

Základná perióda

Pod periódov rozumieme najmenšiu z kladných periód

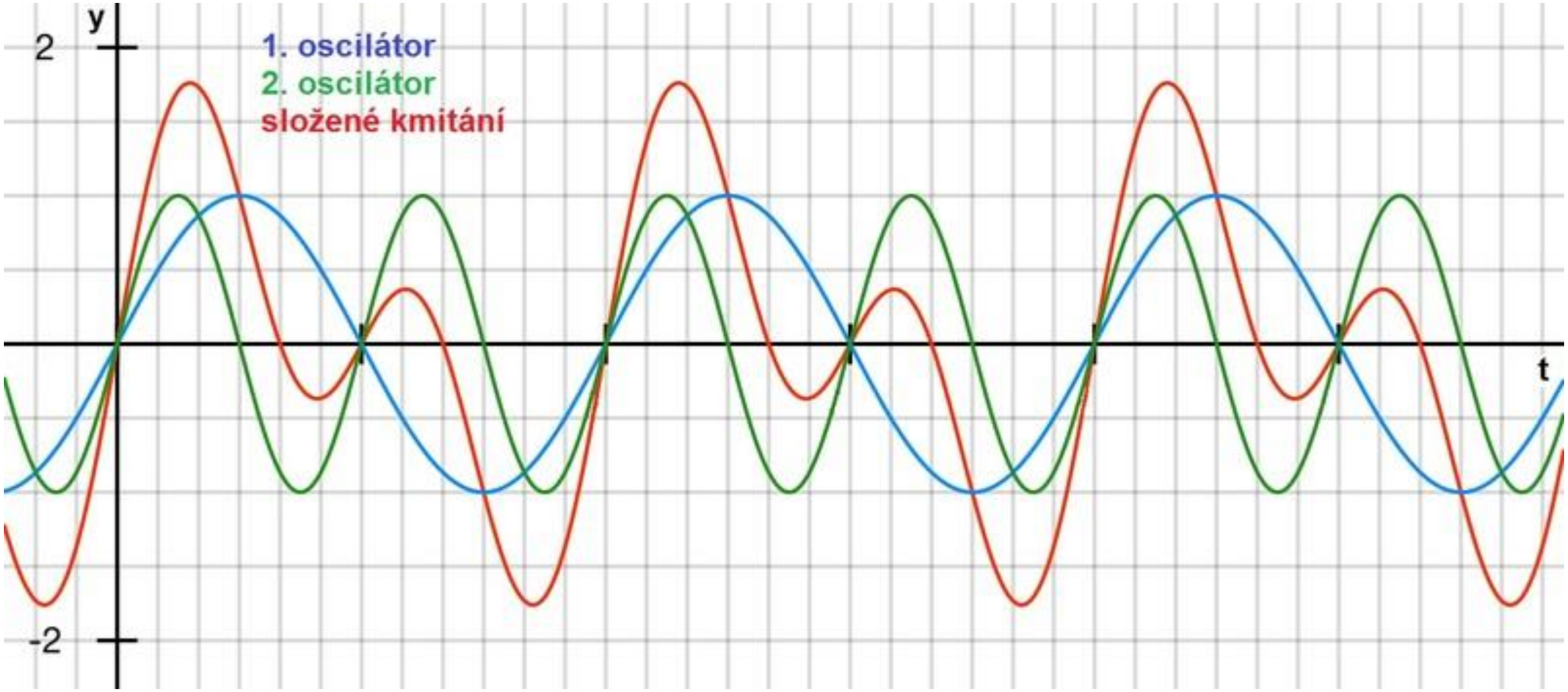
Ak funkcia f(t) má periódu T, potom integrál tejto funkcie pozdĺž integračného intervalu rovnému perióde, nezávisí od spodnej hranice integrovania:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} f\left(x\right)dx = \int_{0}^{T} f\left(x\right)dx$$

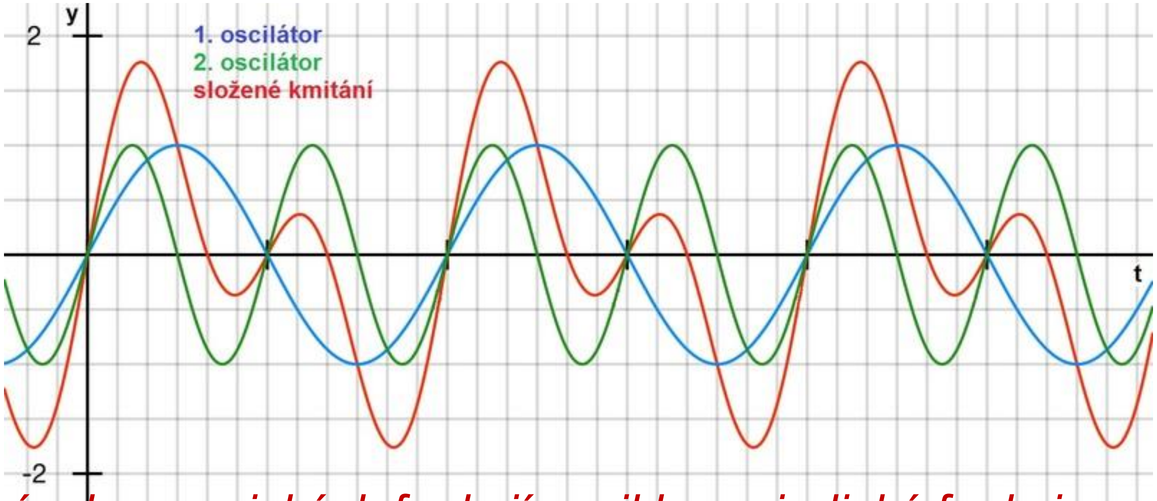
Pozn. Hodnota určitého integrálu je číselne rovná ploche, ktorú daná krivka ohraničuje

Rozklad periodických funkcií na harmonické zložky

Zložením harmonických funkcií možno dostať komplikované , za istých okolností periodické funkcie.



Skladanie – superpozícia **harmonickćh funkcií** ⇒ rozklad funkcie na harmonické zložky, **pokiaľ existujú**



Aby zložením harmonických funkcií vznikla periodická funkcia s periódou T, obe zložky musia mať periódu T ako jednu zo svojich periód t.j. frekvencie zložiek musia byť celistvé násobky základnej frekvencie

$$f = a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t$$

$$T = n_1 T_1 \qquad T = n_2 T_2$$

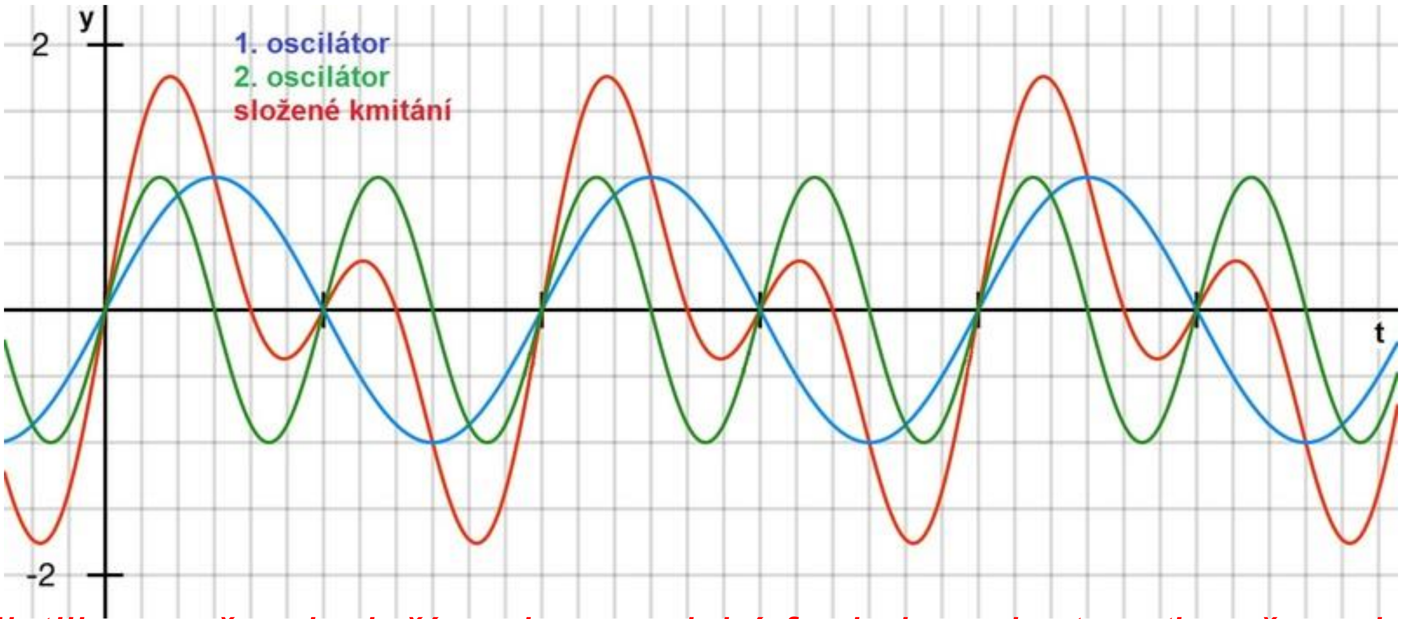
Musi existovať také n1 a n2: $T = n_2 T_2 = n_1 T_1$

$$\frac{2\pi}{\omega} = n_1 \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \Rightarrow \omega_1 = n_1 \omega$$

$$\frac{2\pi}{\omega} = n_2 \frac{2\pi}{\omega_2} \quad \Rightarrow \omega_2 = n_2 \omega$$

frekvencie zložiek musia byť celistvé násobky základnej uhlovej frekvencie

Zistili sme, že ak zložíme harmonické funkcie s vlastnosťou existuje celé n: ω_n=nω potomvzniká periodic funkcia s frekvenciou



Zistili sme, že ak zložíme harmonické funkcie s vlastnosťou, že existuje celé n: $\omega_n = n\omega$, potom vzniká periodická funkcia s frekvenciou ω

Očakávame, že je možné urobiť aj opačnú operáciu, ktorá nám rozloží každú periodickú funkciu na harmonické zložky s frekvenciami $\omega_n = n\omega$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$$

Fourierove rady

Ak funkcia f(t) je periodická s periódou T, potom sa dá rozvinúť:

Základná stavebná jednotka

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \boxed{\cos(n\omega t)} + b_n \boxed{\sin(n\omega t)}\right)$$

Vyššie harmonické frekvencie $\omega_n = n\omega$

$$\boxed{n = \{1, 2, 3, \ldots\}}$$

Každá zložka rozkladu má T ako jednu zo svojich periód.

$$\int_T \cos(n\omega t)\,dt = \int_T \sin(n\omega t)\,dt = 0, \qquad \int_T dt = T$$

$$\int_T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t) = 0$$

$$\int_T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = \int_T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = \frac{T}{2}\delta_{n,m}$$

Fourierove rady f(t)

Ak funkcia f(t) je periodická s periódou T, potom sa dá rozvinúť:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_T f(t) dt$$

Fourierove rady f(x)

Ak funkcia f(x) je periodická s periódou λ, potom sa dá rozvinúť:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nkx) + b_n \sin(nkx)\right)$$

$$a_n = \frac{2}{\lambda}\int_{\lambda} f(x)\cos(nkx)dx$$

$$b_n = \frac{2}{\lambda}\int_{\lambda} f(x)\sin(nkx)dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\lambda}\int_{\lambda} f(x)dx$$

Príklad

- Nájdite Fourierov rozvoj periodickej funkcie f(t) s periódou T:

$$f(t) = \begin{cases} A & t \in \left(0, \dfrac{T}{2}\right) \\ -A & t \in \left(\dfrac{T}{2}, T\right) \end{cases}$$

Nepárna funkcia $\Rightarrow a_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T \underbrace{f(t)\sin(n\omega t)}_{\text{Párna funkcia}}\,dt$$

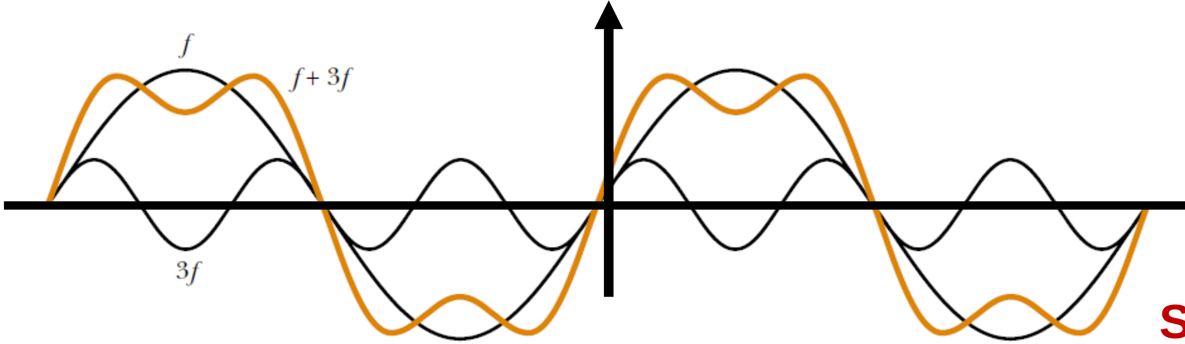
Fourierov rozklad

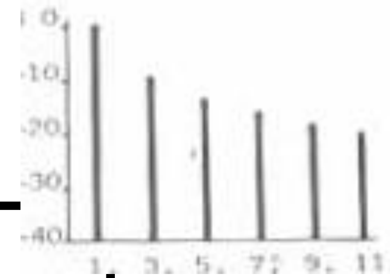
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \cancel{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cancel{a_n \cos(n\omega t)} + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

Neparne n: $b_n = \frac{4A}{n\pi}$

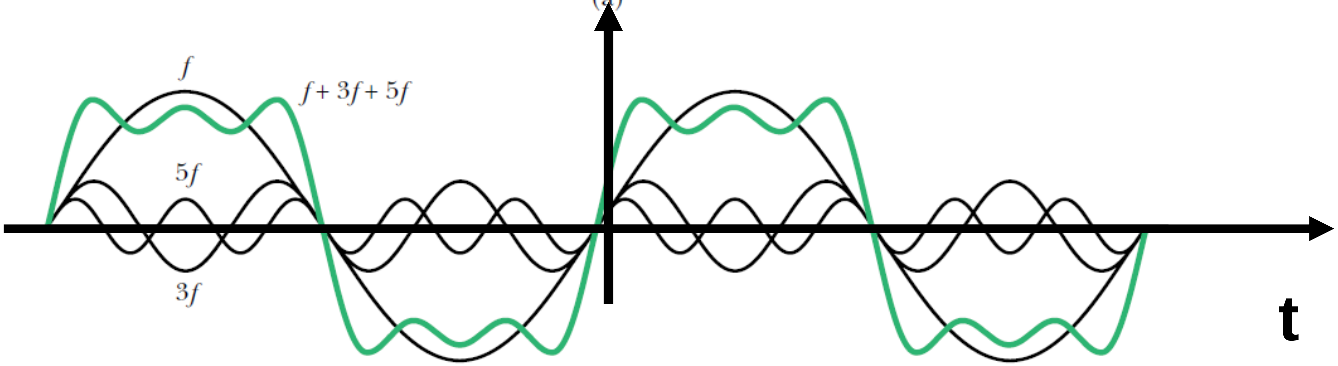
$$\boxed{f(t) = \frac{4A}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \ldots\right]}$$



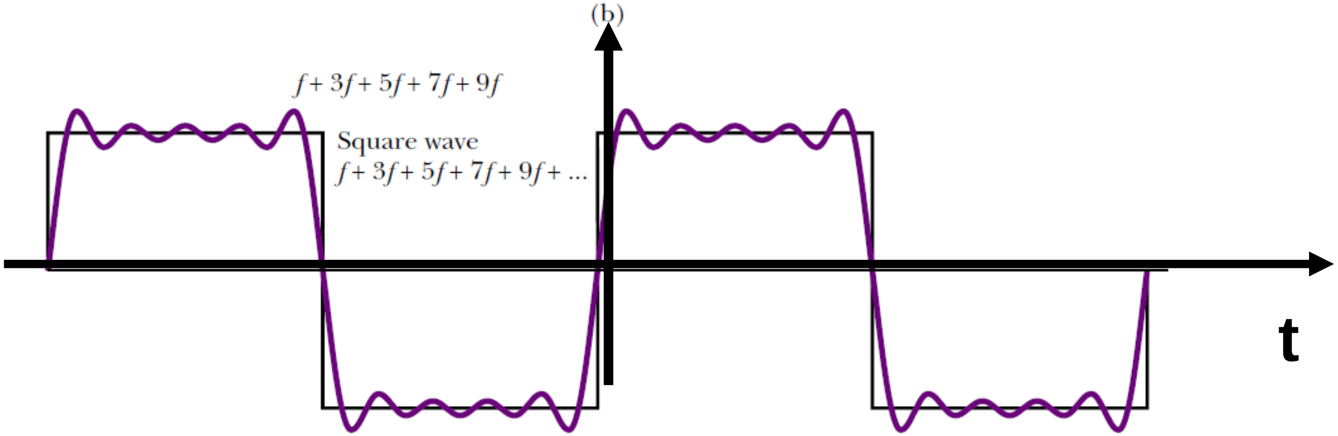


Spektrum funkcie

(a)



(b)



$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \ldots\right]$$

Fourierove rady
párna funkcia f(t)

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T f(t)dt \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega t)dt \quad \rightarrow \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega t)dt \quad \rightarrow \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt = 0$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)}$$

Párna funkcia obsahuje len koeficienty a_n, **rozkladá sa iba na kosínusové zložky**

Fourierove rady
nepárna funkcia f(t)

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T f(t)dt \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega t)dt \quad \rightarrow \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega t)dt \quad \rightarrow \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\lambda/2} f(t)\sin(n\omega t)dt$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)}$$

Nepárna funkcia obsahuje len koeficienty b_n, **rozkladá iba na sínusové zložky**

Fourierove rady f(x)

Ak funkcia f(x) je periodická s periódou λ, potom sa dá rozvinúť:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

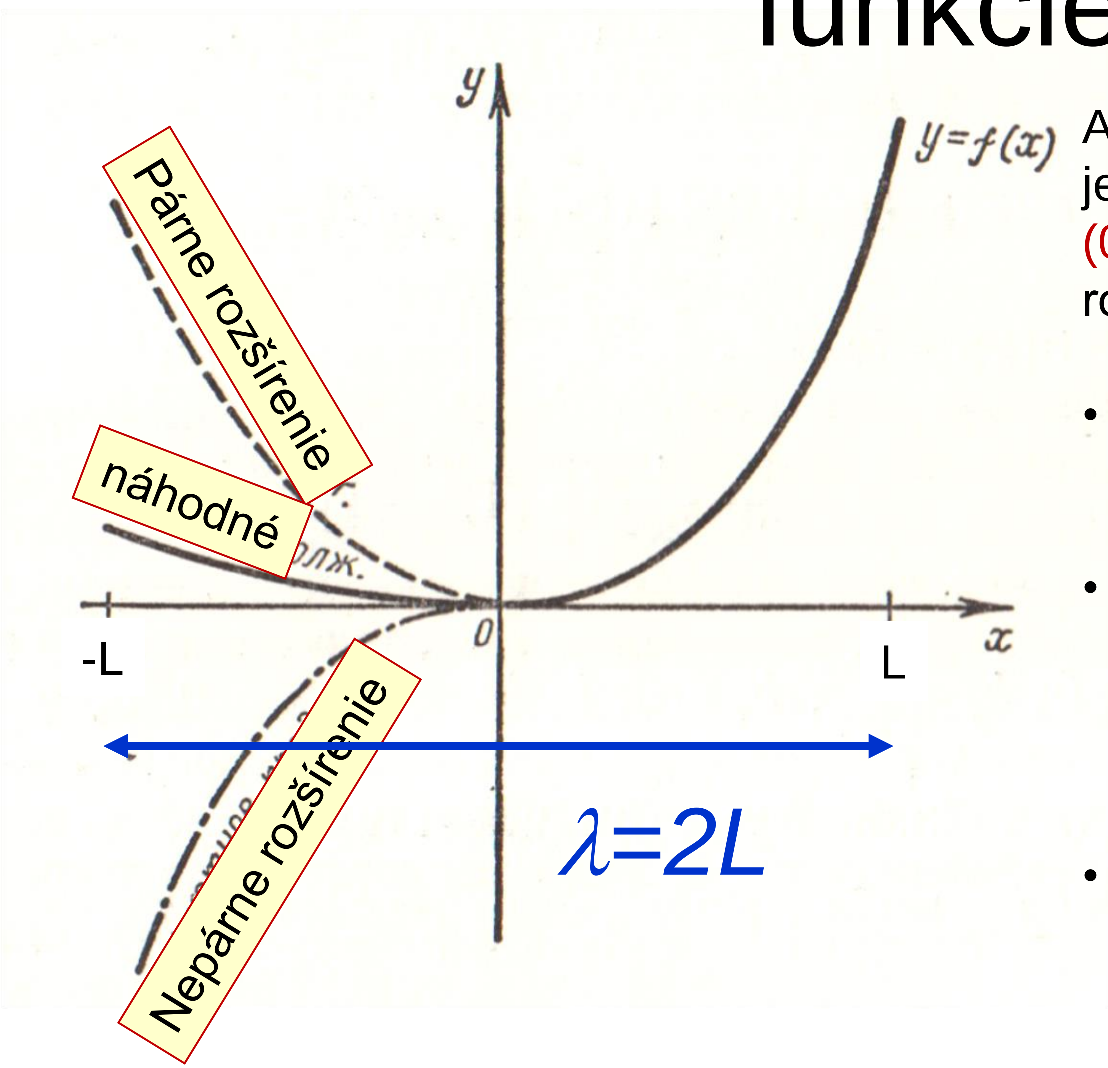
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nkx) + b_n \sin(nkx) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{\lambda} \int_{\lambda} f(x) \cos(nkx)\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\lambda} \int_{\lambda} f(x) \sin(nkx)\, dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\lambda} \int_{\lambda} f(x)\, dx$$

Párne a nepárne rozšírenie funkcie



Ak je funkcia f(x) je neperiodická, ale je zadaná iba na zúženom intervale (0,L) môžeme ju na tomto intervale rozložiť do FR.:

- Nájdeme periodickú funkciu, ktorá je na intervale (0,L) **identická s funkciou** f(x)
- Na intervale (-L,0) ju dodefinujeme buď párne alebo neparne, podľa toho, či požadujeme rozklad funkcie f(x) na sinusy alebo kosínusy.
- Takto definovanú **periodickú funkciu, s periódou 2L** rozložíme do FR.

NEPERIODICKÉ FUNKCIE A ICH ROZKLAD

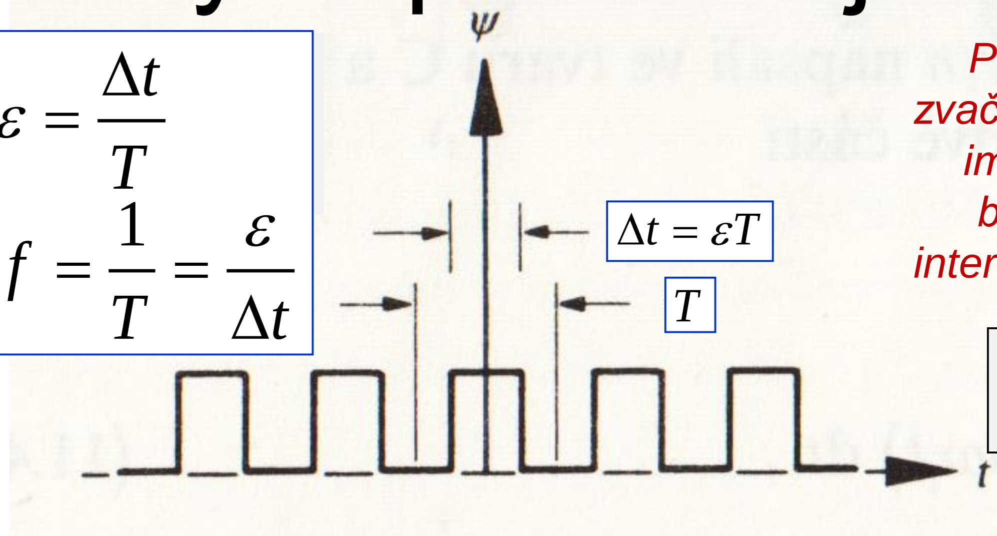
Obdĺžnikový impulz trvajúci čas Δt

Frakcia „aktívnej“ časti pulzu:

$$\varepsilon = \frac{\Delta t}{T}$$

Frekvencia pulzov:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\varepsilon}{\Delta t}$$



$\boxed{\Delta t = \varepsilon T}$

$\boxed{T}$

Pomocou ε budeme zvačšovať periódu – šírku impulzu zachováme, budeme zvačšovať intervaly medzi impulzami

$$\omega_n = n\,\omega_1 = \frac{2\pi n}{m\Delta t} = \frac{2\pi}{\Delta t} n\varepsilon$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_1 t) + \cancel{b_n \sin(n\omega_1 t)}\right)$$

Párna funkcia

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{\Delta t/2} A dt$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{4}{T}\int_0^{\Delta t/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$\cancel{b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt = 0}$$

$$\boxed{a_0 = 2A\varepsilon}$$

$$\boxed{a_n = \frac{4}{T} A \frac{\sin\left(n\omega_1 \frac{\Delta t}{2}\right)}{n\omega_1}}$$

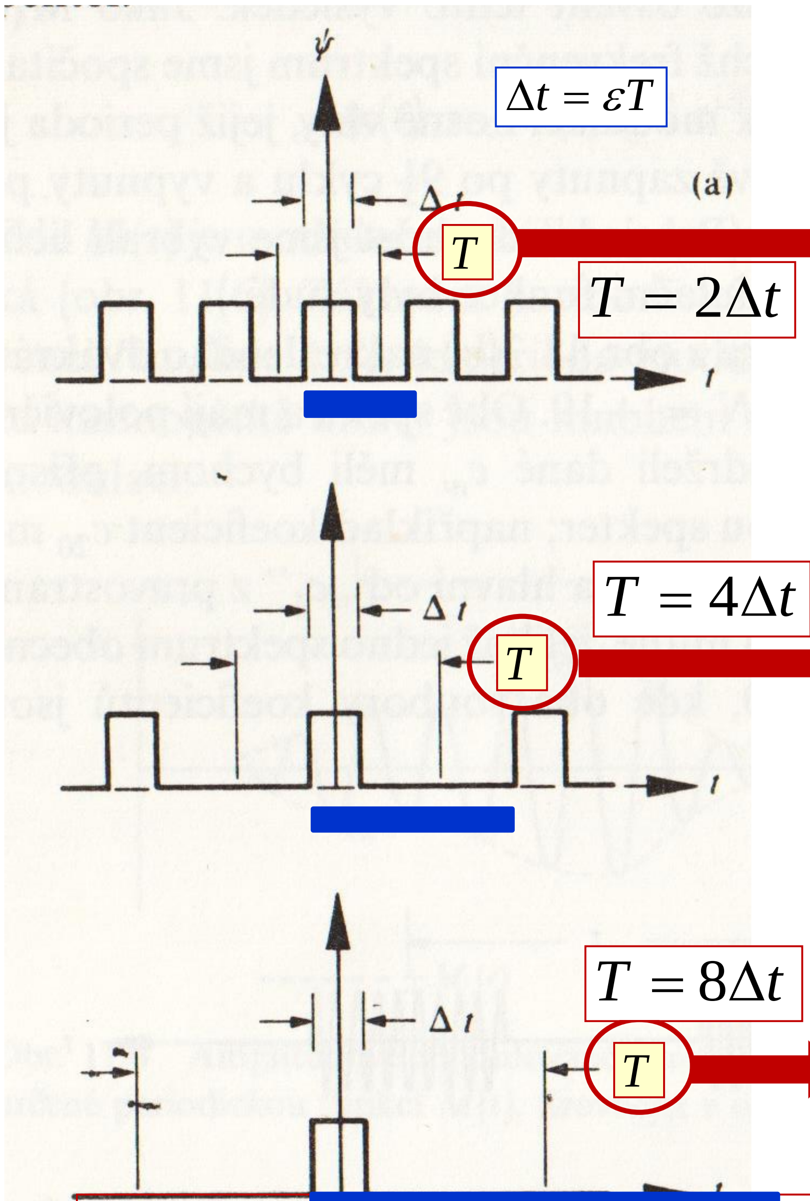
$$a_n T = 4A\frac{\sin\left(\omega_n \frac{\Delta t}{2}\right)}{\omega_n}$$

Frekvencia pulzov nemá vplyv na obálku frekvenčného spektra

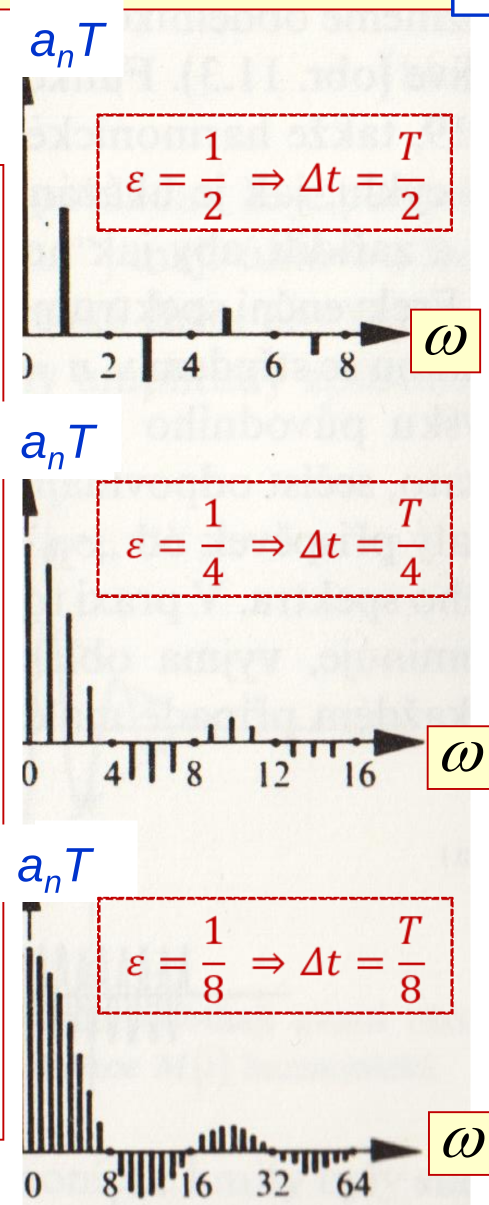
Postupné zväčšovanie periódy funkcie má za následok približovanie spektrálnych čiar

$$a_n T = 4A\frac{\sin\left(\omega\frac{\Delta t}{2}\right)}{\omega}$$

Frekvencia pulzov nemá vplyv na obálku frekvenčného spektra, rozsah frekvencií potrebných potrebných na reprodukciu sa nemení, len treba použi väčší počet harmonických

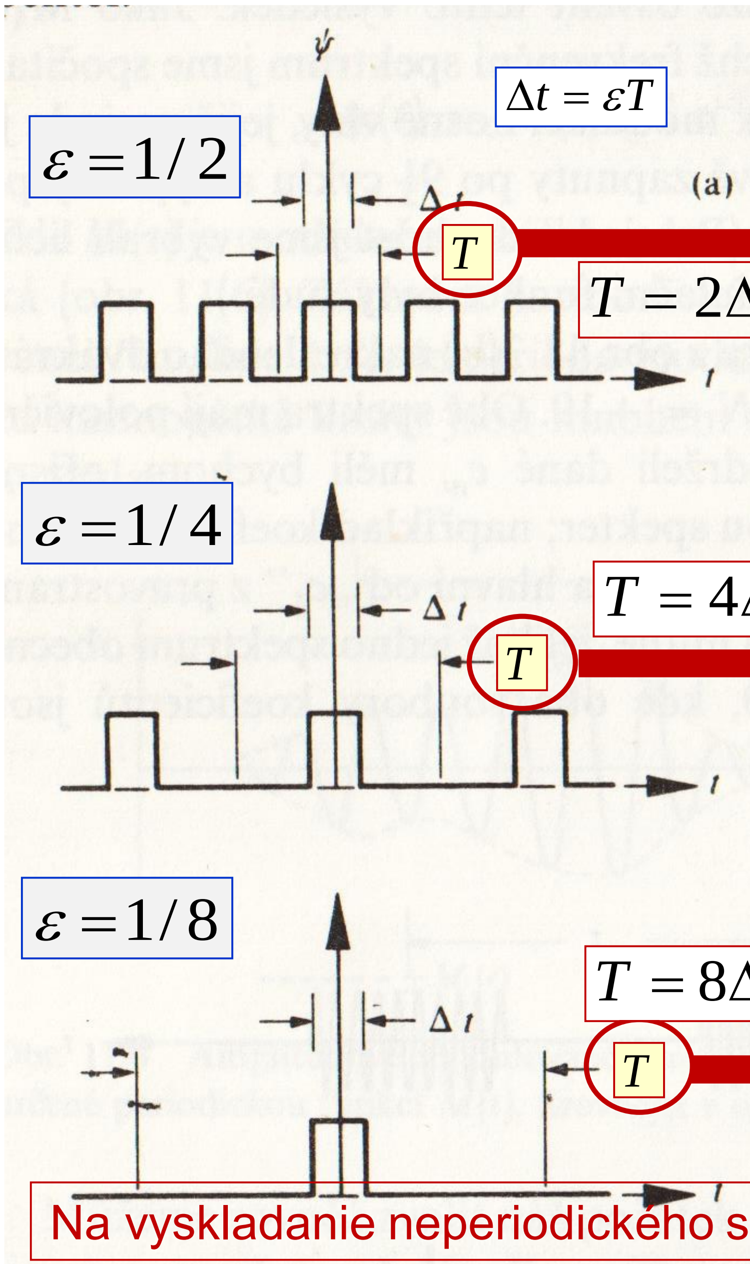


Perióda funkcie sa zväčšuje



Na vyskladanie neperiodického signálu budeme potrebovať spojité spektrum

Zvačšujme intervaly medzi impulzmy tak, že širku pulzu Δt zachováme a periódu zväčšíme



$\Delta t = \varepsilon T$

$\varepsilon = 1/2$ $\quad T = 2\Delta t$

$\varepsilon = 1/4$ $\quad T = 4\Delta t$

$\varepsilon = 1/8$ $\quad T = 8\Delta t$

Perióda funkcie sa zväčšuje

$$\omega_n = n\omega_1 = \frac{2\pi n}{\Delta t}\varepsilon = \frac{2\pi}{\Delta t}\varepsilon\ n$$

Vzdialenosť medzi susednými harmonických sa zmenšuje so zvačšovaním periódy

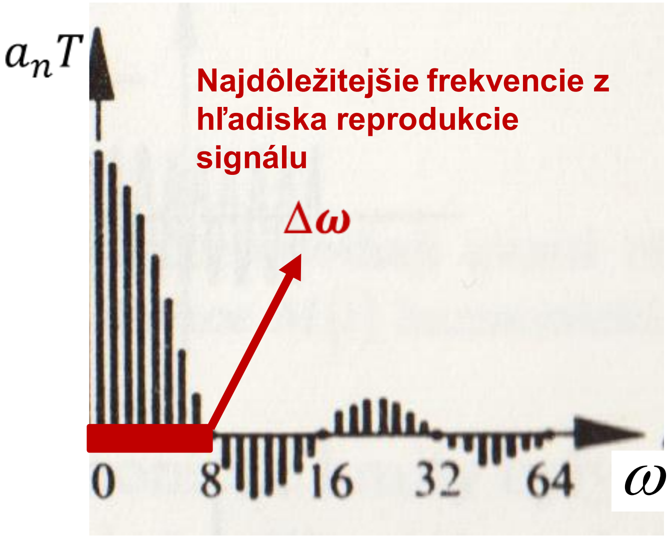
$$a_n T = 4A\frac{\sin\left(\omega\frac{\Delta t}{2}\right)}{\omega}$$

Frekvencia pulzov nemá vplyv na obálku frekvenčného spektra, rozsah frekvencií potrebných potrebných na reprodukciu sa nemení, len treba použi väčší počet harmonických

Na vyskladanie neperiodického signálu budeme potrebovať spojité spektrum

Šírka frekvenčného pásma

Interval , rozostup medzi impulzami zväčšíme tak, že sa ďalší impulz NIKDY neobjavi



Určené frekvenciou, kedy prvý krát obálka frekvenčného spektra klesne na nulu

$$a_n T = 4A \frac{\sin\left(\omega \frac{\Delta t}{2}\right)}{\omega}$$

$\Delta\omega$

*Rozsah frekvencií nutných k reprodukcii signálu, **bez ohľadu na periódu T** signálu*

Rozumný hrubý odhad frekvenčného pásma – najdoležitejšie frevencie pre reprodukciu signálu

$$\Delta\omega \frac{\Delta t}{2} = \pi \quad \Rightarrow \Delta\omega\Delta t = 2\pi \quad \Rightarrow 2\pi\Delta\upsilon\Delta t = 2\pi \quad \Rightarrow \Delta\upsilon\Delta t = 1$$

*Môžeme konštatovať, že pre daný impulz **existuje nejaké minimum** pre $\Delta\omega\Delta t$ resp, $\Delta\upsilon\Delta t$*

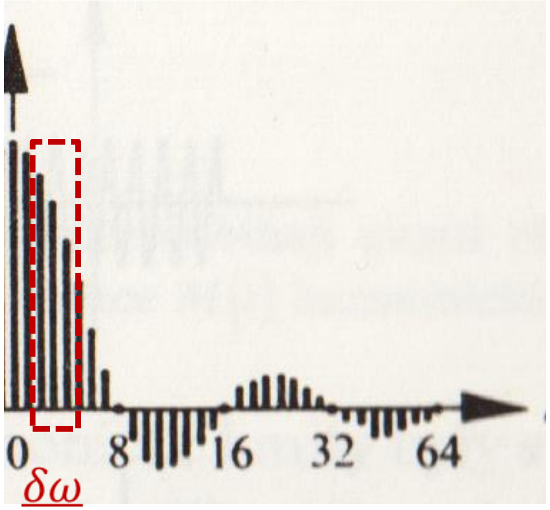
Fourierov integrál

Keby sa základná frekvencia zväčšovala do nekonečna, *spektrálne čiary by sa k sebe priblížili natoľko, že by sme dostali spojité spektrum*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)\right)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad Ak\ T \to \infty \Rightarrow \omega_1 \to 0$$

$$f(t) = \ldots b_n \sin(n\omega_1 t) + b_{n+1} \sin((n+1)\omega_1 t) + \ldots$$



Pri obrovskej perióde **T→∝ je ω_1→0** nekonečne malá veličina a preto b_n a b_{n+1} sa od seba líšia o nekonečne malú hodnotu, možno ich považovať za konštanty. V tomto prípade môžeme považovať velicinu ***ω=nω_1 za spojitú veličinu*** a koeficieny ***a_n chápať ako spojitú funkciu premennej ω***

$$\omega = n\omega_1$$
$$\delta\omega = \delta n\omega_1$$

δn je tak malé, že koeficienty b_n v intervale n+ δn možno považovať prakticky za konštantné a možno ich preto **zosumovať spoločne**

$$f(t) = \ldots\delta n b_n \sin(\omega t) + \ldots = \ldots\boxed{\delta\omega\frac{b_n}{\omega_1}\sin(\omega t)} + \ldots = \ldots\delta\omega b(\omega)\sin(\omega t) + \ldots = \int_0^{\infty} b(\omega)\sin(\omega t)\, d\omega + \ldots$$

Sumácia cez n vo FR prejde do integrálu podľa dω

Fourierov integrál

$$f(t) = \int_0^{\infty} b(\omega)\sin(\omega t)\, d\omega + \int_0^{\infty} a(\omega)\cos(\omega t)\, d\omega$$

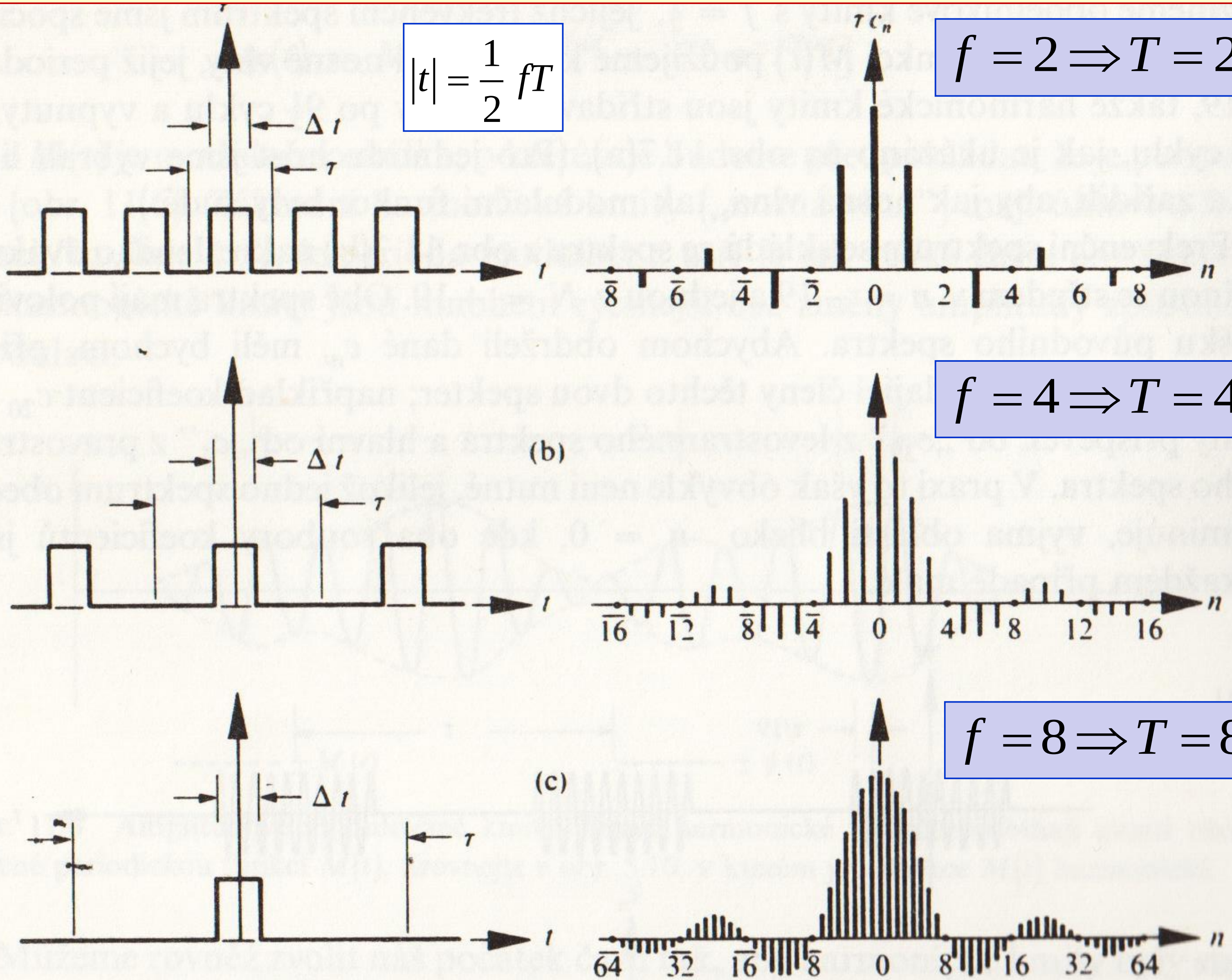
$$a(\omega) = \frac{a_n}{\omega_1} \qquad b(\omega) = \frac{b_n}{\omega_1}$$

Treba preintegrovať cez celú „periódu“ neperiodickej funkcie

$$a(\omega) = \frac{2}{\omega_1 T} \int_{T/2}^{-T/2} f(t)\cos(\omega t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$$

$$b(\omega) = \frac{2}{\omega_1 T} \int_{T/2}^{-T/2} f(t)\sin(\omega t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt$$

Postupné zväčšovanie periódy funkcie má za následok približovanie spektrálnych čiar



$$|t| = \frac{1}{2} fT$$

$$f = 2 \Rightarrow T = 2\Delta t$$

$$f = 4 \Rightarrow T = 4\Delta t$$

$$f = 8 \Rightarrow T = 8\Delta t$$

Na vyskladanie neperiodického signálu budeme potrebovať spojité spektrum

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega t)dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T f(t)dt$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\left[\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)\right]dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}dt$$

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\left[\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)\right]dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{in\omega t}dt$$

FR v komplexnom tvare

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\left[\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)\right]dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}dt \\ c_{-n} &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\left[\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)\right]dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{in\omega t}dt \end{aligned}}$$

$n \to -n$

Koeficienty c_{-n} možno dostať z koeficientov c_n zámenou $n \to -n$ a $c_0 = \frac{a_0}{2}$

$$\boxed{f(t) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}dt}$$