Vektory

Dvojnásobný vektorový súčin

$$\vec{u} = \vec{a} \times \left[\vec{b} \times \vec{c} \right] = \vec{b}\left(\vec{a} \bullet \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)$$

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$
$$\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$$

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

$$\vec{u} = \vec{a} \times \left[\vec{b} \times \vec{c} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ +\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

Dvojnásobný vektorový súčin

$$\vec{i} \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \quad +\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = +\vec{i}\left[a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \right] = +\vec{i}\left[a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 + a_3b_1c_3 - a_3b_3c_1\right]$$

$$\left[\boxed{a_2b_1c_2}\ \boxed{-\ a_2b_2c_1}\ \boxed{+\ a_3b_1c_3}\ \boxed{-\ a_3b_3c_1}\right] =$$

$$b_1\left[a_1c_1 + \underline{a_2c_2} + \underline{a_3c_3}\right] - c_1\left[a_1b_1 + \underline{a_2b_2} + \underline{a_3b_3}\right] =$$

$$b_1\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right) - c_1\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)$$

$$\vec{j} \qquad a_1 \qquad a_3 \qquad +\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad +\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = -\vec{j}\left[a_1\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - a_3\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right] = -\vec{j}\left[a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 - a_3b_2c_3 + a_3b_3c_2\right]$$

$$\vec{k} \qquad a_1 \qquad a_2 \qquad +\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = +\vec{k}\left[-a_1\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right] = +\vec{k}\left[-a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2\right]$$

Dvojnásobný vektorový súčin

$$\left[a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 + a_3b_1c_3 - a_3b_3c_1\right] = b_1\left[a_1c_1 + \underline{a_2c_2} + \underline{a_3c_3}\right] - c_1\left[a_1b_1 + \underline{a_2b_2} + \underline{a_3b_3}\right] = b_1\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right) - c_1\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)$$

$$-\left[a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 - a_3b_2c_3 + a_3b_3c_2\right] = b_2\left[\underline{a_1c_1} + a_2c_2 + \underline{a_3c_3}\right] - c_2\left[\underline{a_1b_1} + a_2b_2 + \underline{a_3b_3}\right] = b_2\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right) - c_2\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)$$

$$\left[-a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2\right] = b_3\left[\underline{a_1c_1} + \underline{a_2c_2} + a_3c_3\right] - c_3\left[\underline{a_1b_1} + \underline{a_2b_2} + a_3b_3\right] = b_3\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right) - c_3\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)$$

$$\vec{u} = \vec{a}\times\left[\vec{b}\times\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ +\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

$$\vec{i}\left[b_1\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right) - c_1\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)\right] + \vec{j}\left[b_2\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right) - c_2\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)\right] + \vec{k}\left[b_3\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right) - c_3\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)\right] =$$

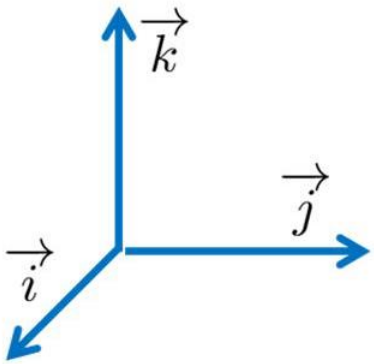
$$= \left[b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right]\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right) - \left[c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}\right]\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right) =$$

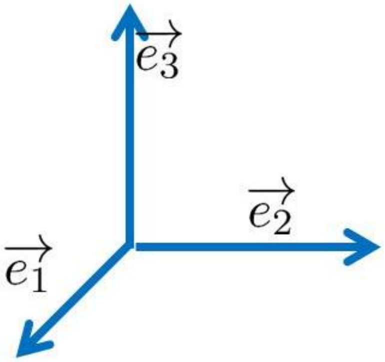
$$= \vec{b}\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)$$

Dvojnásobný vektorový súčin

$$\vec{a} \times \left[\vec{b} \times \vec{c} \right] = \vec{b}\left(\vec{a} \bullet \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)$$

Nový formalizmus





$$\vec{e}_1 \equiv \vec{i} \qquad \vec{e}_2 \equiv \vec{j} \qquad \vec{e}_3 \equiv \vec{k}$$

$$a_1 \equiv a_x \qquad a_2 \equiv a_y \qquad a_3 \equiv a_z$$

Bázové vektory a súradnice sa v novom formalizme číslujú, aby sa s nimi ľahko manipulovalo

Vektor a jeho vyjadrenie v novom formalizme

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

***Ortonormalitu** bázových vektorov vyjadríme pomocou Kroneckerovho operátora*

Vektor a jeho vyjadrenie

Prvá, druhá, tretia súradnica vektora $\vec{a}$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} a_j\vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} a_k\vec{e}_k$$

Prvý, druhý, tretí bázový vektor

Einsteinova sumačná konvencia

$$\vec{a} = a_i\vec{e}_i = a_j\vec{e}_j = a_k\vec{e}_k$$

Dvakrát sa opakujúci index znamená automaticky sumáciu

Skalárny súčin

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i}$$

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{b} = a_i b_i}$$

$$\boxed{\vec{a} \bullet \vec{a} = a^2 = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i a_i}$$

$$\boxed{\vec{a}^2 = a_i a_i}$$

Einsteinova sumačná konvencia

Zavedenie symbolov
Kroneckerov operátor

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & ak\ i \neq j \\ 1 & ak\ i = j \end{cases} \quad pre\ i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Ortononalita bázových vektorov

$$\boxed{\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \delta_{ij}}$$

Kroneckerov operátor

Kroneckerov δ-symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \delta_{ij}}$$

Levi-Civitov antisymetrický symbol

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}}$$

$$\boxed{\varepsilon_{123} = 1}$$

Pri výmene akýchkoľvek dvoch indexov sa znamienko zmení na opačné
Ak sa vyskytujú rovnaké indexy, hodnota symbolu je nulová

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{jik} \\ \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{ikj} \\ \varepsilon_{ijk} &= -\varepsilon_{kji} \end{aligned}\right\} i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

$$\varepsilon_{11k} = \varepsilon_{22k} = \varepsilon_{33k} = \varepsilon_{1j1} = \varepsilon_{2j2} = \varepsilon_{3j3} = \varepsilon_{i11} = \varepsilon_{i22} = \varepsilon_{i33} = 0$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon 321 = \varepsilon_{213} = -1$$

Davis Cup identita

Sumuje sa cez k

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

Prvý s prvým; druhý s druhým

Prvý s druhým; druhý s prvým

$i,j,k,l,m,n \in \{1,2,3\}$

Napr.

$\boxed{i = j}$

$$\varepsilon_{iik}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{in} - \delta_{in}\delta_{im} \quad \Rightarrow 0 = 0$$

$\boxed{i \leftrightarrow j}$

$$\varepsilon_{jik}\varepsilon_{mnk} = \delta_{jm}\delta_{in} - \delta_{jn}\delta_{im} =$$
$$= -\left(\delta_{jn}\delta_{im} - \delta_{jm}\delta_{in}\right) = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}$$

Vektorový súčin

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$\boxed{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k}$$

Keď i =1 potom má zmysel sa zaoberať iba prípadmi, keď j,k sú rôzne od 1 ale aj od seba navzájom

OVERME:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1 = \varepsilon_{1jk} a_{\color{red}j} b_{\color{blue}k} = \overbrace{\underbrace{\varepsilon_{123} a_2 b_3}_{\text{Ak j=2, jediná nenulová kombinácia vznikne ak k=3}} + \underbrace{\varepsilon_{132} a_3 b_2}_{\text{Ak j=3, jediná nenulová kombinácia vznikne ak k=2}}} = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$j \in \{1,2,3\}$

$k \in \{1,2,3\}$

Vektorový súčin

Einsteinova sumačná konvencia

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$\boxed{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k}$$

Podobne

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_1 = \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_2 = \varepsilon_{2jk} a_j b_k = \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_3 = \varepsilon_{3jk} a_j b_k = \varepsilon_{312} a_1 b_2 + \varepsilon_{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}}$$

Einsteinova sumačná konvencia

$a_i\delta_{ij}$

$$\sum_i a_i\delta_{ij} = \underbrace{a_1\delta_{1j} + a_2\delta_{2j} + a_3\delta_{3j}}_{} = a_j$$

Iba jeden z týchto výrazov je nenulový, práve ten, ktorý trafil j

δ_{ii}

$$\sum_i \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}$

$$\sum_{i,j} \delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = \sum_i\sum_j \delta_{ij}\varepsilon_{ijk}$$

$$= \sum_i \left[\delta_{i1}\varepsilon_{i1k} + \delta_{i2}\varepsilon_{i2k} + \delta_{i3}\varepsilon_{i3k}\right] = \sum_i \left[\varepsilon_{iik}\right] = 0$$

Sumačný index j musí trafiť voľný index i ⇒ všetky j prefarbi na i

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$

$$\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \sum_{ijk}\left[\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji}\right] =$$

Davis Cup identita

$$= \sum_i \delta_{ii}\sum_j \delta_{jj} - \sum \delta_{ij}\delta_{ji} = 6$$

Pomôcky

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = a_i b_i$$

$$a_i \delta_{ij} = a_j$$

SUMÁCIA CEZ k

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

Prvý s prvým; druhý s druhým

Prvý s druhým; druhý s prvým

$$\boxed{\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]=\vec{b}\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)}$$

$$\boxed{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i=\varepsilon_{ijk}a_j b_k}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}=\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}}$$

$$\boxed{a_i\delta_{ij}=a_j}$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i=\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{-\varepsilon_{ikj}}a_j b_k=-\varepsilon_{ikj}b_k a_j=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)_i \implies \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=a_i\varepsilon_{ijk}b_j c_k=c_k\varepsilon_{kij}a_i b_j=b_j\varepsilon_{jki}c_k a_i \implies \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$$

Sumačný index v ε je len jeden a to k, treba odtlacit k nakoniec retazca, aby sa dala pouzit DC

$$\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]_i=\varepsilon_{ijk}a_j\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_k=\varepsilon_{ijk}a_j\varepsilon_{klm}b_l c_m=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}a_j b_l c_m\overset{(DC)}{=}\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)a_j b_l c_m=$$

$$=a_j c_j b_i-a_j b_j c_i=\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\right]_i \implies \boxed{\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}}$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\underbrace{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i}_{\varepsilon_{ijk}a_j b_k}\underbrace{\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)_i}_{\varepsilon_{imn}c_m d_n}=\varepsilon_{ijk}a_j b_k\varepsilon_{imn}c_m d_n=$$

$$=\varepsilon_{jki}\varepsilon_{mni}a_j b_k c_m d_n\overset{(DC)}{=}\left(\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\right)a_j b_k c_m d_n=a_j c_j b_k d_k-a_j d_j b_k c_k$$

$$\implies \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left[\vec{a}\bullet\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)\right]\vec{c}-\left[\vec{a}\bullet\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]\vec{d}$$

$$\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right]$$