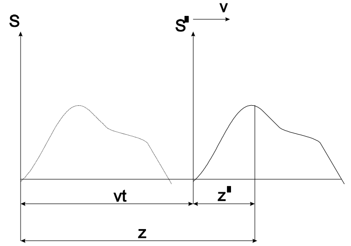
Kapitola 9

Vlnová rovnica

9.1 Odvodenie vlnovej rovnice

Podobne ako rôzne typy kmitov možno popísať určitou diferenciálnou rovnicou, aj rôzne typy vlnenia majú spoločnú matematickú interpretáciu. Obmedzme sa na prípad, že vlna počas šírenia v priestore nemení svoj tvar.



obr. IX.1

Nech funkcia $f(z)$ reprezentuje vzniknutý rozruch, šíriaci sa v priestore rýchlosťou v. Zaveďme pomocný súradnicový systém S'postupujúci spolu s impulzom (obr. IX.1), v ktorom sa výchylka ψ s časom nemení[1]:

$$\psi(z,t) = \psi\left(z'\right) = f(z') = f(z - vt) \tag{9.1}$$

Pokúsme sa nájsť diferenciálnu rovnicu vlny, ktorej riešením je (9.1). Za týmto účelom vypočítame parciálne derivácie $\psi(z,t)$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z'} \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial z'} \tag{9.3}$$

[1] $z' = z - vt$

Porovnaním oboch rovníc (9.2), (9.3) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -v\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

Pretože na jednoznačné popísanie vlnenia potrebujeme dve konštanty, treba uvažovať s rovnicou druhého rádu. Pomocou rovnice (9.2) a (9.3) vyjadríme aj druhé derivácie:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} \tag{9.4}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} \tag{9.5}$$

Z čoho:

$$v^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{9.6}$$

Táto rovnica sa nazýva vlnová.

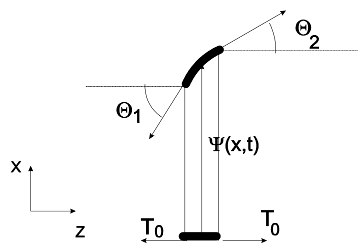
9.2 Použitie vlnovej rovnice

V nasledovných príkladoch si ukážeme, ako možno využiť vlnovú rovnicu, na výpočet rýchlosti šírenia rozruchov v rôznych prostrediach.

9.2.1 Vlna v strune

Predpokladajme, že homogénna struna s dĺžkovou hustotou ρ je upevnená na svojich koncoch a môže sa vychyľovať v smere kolmom na os z. Nech deformácie struny sú tak malé, že druhé mocniny uhlov, ktoré zviera dotyčnice k strune s osou z možno zanedbať: $\Theta^2 \approx \tan^2\Theta \approx 0$. Za tohto predpokladu sa pri priečnom vychýlení elementu Δz jeho dĺžka nezmení (obr. IX.2):

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2} = \Delta z\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2} \approx \Delta z\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right)^2\right] \approx \Delta z \tag{9.7}$$



obr. IX.2

Napätie v strune si potom zachováva rovnakú hodnotu T_0 ako v počiatočnej polohe.. Na ľavý koniec segmentu pôsobí v zápornom smere osi x sila $T_0 \tan\Theta_1$, na pravý v kladnom smere sila $T_0 \tan\Theta_2$. Pre výslednicu platí:

$$F_x(t) = T_0 \tan\Theta_2 - T_0 \tan\Theta_1 \tag{9.8}$$

Využime geometrický význam derivácie v Taylorovom rozvoji[2]:

$$F_x(t) = T_0 \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_2 - T_0 \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_1 = T_0 \Delta z \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \tag{9.9}$$

Podľa Newtonovho zákona

$$F_x(t) = \Delta m \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \rho\Delta z \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{9.10}$$

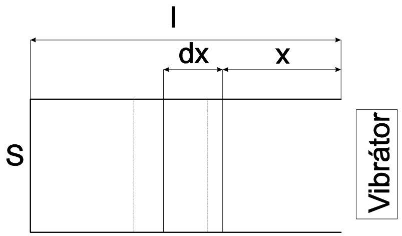
Porovnaním (9.9) a (9.10) dostaneme vlnovú rovnicu (9.6):

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \tag{9.11}$$

z ktorej určíme fázovú rýchlosť: $v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$

9.2.2 Zvuková vlna

Valec s dĺžkou l je na jednom konci uzavretý a naplnený plynom s hustotou ρ. Na druhom konci vibrátorom vyvolajme rozruch, ktorý sa začne šíriť v plyne rýchlosťou v (obr. IX.3)



obr. IX.3

[2]Podľa Taylorovho rozvoju

$$f(z_2) = f(z_1) + (z_2 - z_1)\left(\frac{df}{dz}\right)_1 + ...$$

Ak dosadíme za funkciu $f(z) = \frac{\partial\Psi(z,t)}{\partial z}$ potom

$$\left(\frac{\partial\Psi(z,t)}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial\Psi(z,t)}{\partial z}\right)_1 = \Delta z \frac{\partial^2\Psi(z,t)}{\partial z^2}$$

Vyšetrujme vrstvu vzduchu ohraničenú rezmi vo vzdialenosti x a $x + dx$, ktorých výchylka z rovnovážnej polohy bude $u(x)$ a $u(x + dx)$. Pokojový objem plynu medzi príslušnými priečnymi rezmi bol $V_0 = Sdx$ a dôsledkom šírenia rozruchu sa zmenil:

$$V = S\left[dx + u(x + dx) - u(x)\right] = S(1 + \frac{\partial u}{\partial x})dx = V_0(1 + \frac{\partial u}{\partial x}) \tag{9.12}$$

Príslušné zmeny tlaku a objemu sú dostatočné rýchle, nestačí dôjsť k tepelnej výmene a preto tento dej možno považovať za adiabatický:

$$p = \frac{p_0 V_0^\chi}{V^\chi} = \frac{p_0}{(1 + \frac{\partial u}{\partial x})^\chi} \sim p_0\left(1 - \chi\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{9.13}$$

Pri aproximácii sme zanedbali malé veličiny vyššieho rádu. Vyjadrime silu, ktorá pôsobí na daný segment:

$$dF = S(-p_{x+dx} + p_x) = -S\frac{\partial p}{\partial x}dx = S\chi p_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \tag{9.14}$$

Podľa Newtonovho zákona:

$$dF = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Porovnaním oboch vzťahov dostaneme vlnovú rovnicu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \chi\frac{p_0}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

z ktorejurčíme rýchlosť šírenia zvuku v plyne:

$$v = \sqrt{\chi\frac{p_0}{\rho}} \tag{9.15}$$

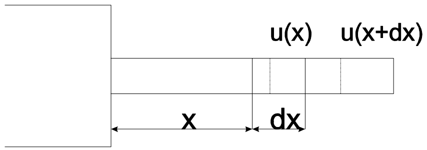
Použime rovnicu ideálneho plynu $\frac{p_0}{\rho} = \frac{RT}{M}$, kde M je jeho mólová hmotnosť, ρ hustota a T termodynamická teplota.a dosaďme ju do (9.15)

$$v = \sqrt{\chi\frac{RT}{M}}$$

Rýchlosť zvuku nezávisí od tlaku, ale od teploty a rádovo je zhodná s rýchlosťou tepelného pohybu molekúl: $v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$

9.2.3 Vlna v pružnej tyči

Úderom kladiva vyvolajme v tyči rozruch, ktorý sa začne šíriť rýchlosťou v. Napíšme pohybovú rovnicu pre infinitenzimálny element dx, ohraničený priečnymi rezmi vo vzdialenosti x a $x + dx$



obr. IX.4

Relatívne predĺženie tyče medzi oboma rezmi udáva vzťah[3]:

$$\varepsilon = \frac{u(x+dx) - u(x)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{9.16}$$

Podľa Hookovho zákona ďalej platí:

$$\sigma = \epsilon E = \frac{\partial u}{\partial x} E \tag{9.17}$$

kde σ je normálové napätie vyvolané pozdĺžnou deformáciou a E je modul pružnosti. Na časť tyče medzi jej priečnymi rezmi pôsobí sila:

$$dF = F_{x+dx} - F_x = S(\sigma_{x+dx} - \sigma_x) = SE\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = SE\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}dx \tag{9.18}$$

Podľa Newtonovho zákona:

$$dF = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dm = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho S dx \tag{9.19}$$

Porovnaním (9.18) a (9.19) dostaneme vlnovú rovnicu (9.6):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.20}$$

z ktorej určíme rýchlosť šírenia vlny: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

[3] $u(x)$ a $u(x+dx)$ sú výchylky rezov x a $x + dx$

9.3 Metóda separácie premenných.

Predpokladajme, že chceme riešiť vlnovú rovnicu (9.6), s homogénnymi okrajovými podmienkami:

$$\Psi(0,t) = 0 \tag{9.21}$$
$$\Psi(l,t) = 0 \tag{9.22}$$

Riešenie budeme hľadať v tvare

$$\Psi(x,t) = X(x)T(t) \tag{9.23}$$

kde $X(x)$ je funkcia závislá iba od premennej x a $T(t)$ je premenná závislá iba od času t. Dosadením do (9.6) a jednoduchou úpravou dostaneme:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \tag{9.24}$$

Rovnica (9.24) musí byť splnená pre všetky hodnoty x a t, ktoré sú navzájom nezávislé. Zmeníme napríklad pri nejakej pevne zvolenej hodnote x hodnotu t (alebo naopak), pravá a ľavá strana rovnice pri zmene svojich argumentov musí zachovať konštantnú hodnotu:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\lambda \tag{9.25}$$

kde λ je konštanta, ktorá môže mať ľubovoľné znamienko. Zo vzťahu (9.25) získame obyčajné diferenciálne rovnice pre určenie $X(x)$, $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{9.26}$$
$$\ddot{T}(t) + v^2 \lambda T(t) = 0 \tag{9.27}$$

Z okrajových podmienok, ktoré musia byť splnené pre ľubovoľný čas t ::

$$\Psi(0,t) = X(0)T(t) = 0 \tag{9.28}$$
$$\Psi(l,t) = X(l)T(t) = 0 \tag{9.29}$$

určíme doplňujúce podmienky

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{9.30}$$

pretože voľbou $T(t) = 0$ by sme získali triviálne riešenie $u(x,t) = 0$, ktoré nás z fyzikálneho hľadiska nezaujíma. Začnime riešiť (9.26) s podmienkami (9.30), pričom zvážime rôzne znamienka λ.

- $\lambda < 0$

  Všeobecné riešenie rovnice má tvar:

$$X(x) = C_1 \exp(-\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \exp(\sqrt{-\lambda}x) \tag{9.31}$$

  Z okrajových podmienok vyplýva:

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ x(l) &= C_1 \exp(-\sqrt{-\lambda}l) + c_2 \exp(\sqrt{-\lambda}l) \end{aligned}$$

  t.j.

$$C_1 = -C_2 \quad a \quad C_1 \left[\exp(\sqrt{-\lambda}l) - \exp(-\sqrt{-\lambda}l)\right] = 0$$

  Keďže $\left[\exp(\sqrt{-\lambda}l) - \exp(-\sqrt{-\lambda}l)\right] \neq 0$ dostaneme triviálne riešenie $(C_1 = C_2)$:

$$X(x) = 0 \Longrightarrow \Psi(x,t) = X(x)T(t) = 0$$

- $\lambda = 0$

  Všeobecné riešenie má tvar: $X(x) = ax+b$. Po zakomponovaní okrajových podmienok:

$$\begin{aligned} X(0) &= [ax+b]_{x=0} = b = 0 \\ X(l) &= al = 0 \end{aligned}$$

  $a = 0$ aj $b = 0$ a teda $X(x) = 0$, čo vedie opäť k triviálnemu riešeniu $X(x) = 0$

- $\lambda > 0$

  Všeobecné riešenie môžeme zapísať v tvare:

$$X(x) = D_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + D_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{9.32}$$

  Okrajové podmienky dávajú:

$$\begin{aligned} X(0) &= D_1 = 0 \\ X(l) &= D_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0 \end{aligned}$$

  Ak $X(x)$ nemá viesť opäť k triviálnemu riešeniu, potom $D_2 \neq 0$ a

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0$$

  To znamená, že iba pre hodnoty

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tag{9.33}$$

  existuje netriviálne riešenie:

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$$

  kde n je ľubovolné celé číslo. Týmto hodnotám zodpovedá riešenie rovnice (9.27):

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n}{l}vt + B_n \sin\frac{\pi n}{l}vt$$

Dospeli sme k záveru, že netriviálne riešenie vlnovej rovnice (9.6) s okrajovými podmienkami (9.21), (9.22) treba hľadať v tvare[4]:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}vt + B_n \sin\frac{\pi n}{l}vt\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{9.34}$$

Neznáme konštnty A_n, B_n nájdeme z počiatočných podmienok.

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ V čase $t = 0$ zdeformujeme strunu, ktorá je upevnená v bode $x = 0$, $x = l$ tak, že jej tvar možno popísať funkciou $f(x) = 1$. Nájdite tvar tejto struny v čase t.

Riešenie: Pohybový stav ľubovolného segmentu struny možno popísať rovnicou (9.11). Struna je na krajoch pripevnená, musí splňať okrajové podmienky (9.21), (9.22), ktoré vedú k netriviálnemu riešeniu (9.34):

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}vt + B_n \sin\frac{\pi n}{l}vt\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

V čase $t = 0$ bola výchylka struny popísaná funkciou $\Psi(x,0) = f(x)$ a keďže nemala žiadnu počiatočnú rýchlosť $\dot{\Psi}(x,0) = 0$:

$$\begin{aligned} \Psi(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x = f(x) && (9.35) \\ \dot{\Psi}(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n}{l} v \sin\frac{\pi n}{l}x = 0 && (9.36) \end{aligned}$$

[4] Vlnová rovnica je lineárna a pre jej riešenia platí princíp superpozície.

Z rovnice (9.36) vyplýva, že všetky koeficienty B_n sú nulové $B_n = 0$ a koeficienty A_n treba určiť z (9.35). Táto rovnica má definičný obor viazaný na interval $x \in < 0, l >$, ale svojim tvarom pripomína Fourierov rozvoj nepárnej funkcie [5] s vlnovou dĺžkou $\lambda_0 = 2l$. Zadefinujme preto nepárnu periodickú funkciu $\xi(x)$ s takouto vlnovou dĺžkou ($\lambda_0 = 2l$), aby v intervale $x \in < 0, l >$ bola totožná $\xi(x) = f(x)$, a v intervale $x \in < -l, 0 >$ bola nepárna $\xi(x) = -f(-x)$. S rozvojom tejto funkcie sme sa už stretli na v kapitole III.:

$$\begin{aligned}\xi(x) &= \frac{4}{\pi}\left(\sin kx + \frac{1}{3}\sin 3kx + \frac{1}{5}\sin 5kx + ...\right) = \\ &\frac{4}{\pi}\left(\sin \frac{\pi}{l}x + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi}{l}x + \frac{1}{5}\sin 5\frac{\pi}{l}x + ...\right)\end{aligned}$$

Keďže obe funkcie $f(x)$ a $\xi(x)$ sú na intervale $x \in < 0, l >$ identické, je zrejmé že :$A_n = \frac{4}{\pi n}$ a

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}vt \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x\right]$$

$\diamondsuit$

9.4 Cvičenie

$\boxed{9.1^*}$ Valec s dĺžkou l je uzavretý na jednom konci a naplnený plynom s hustotou ρ. Na druhom konci vyvolajme vibrátorom rozruch, ktorý sa začne šíriť v plyne rýchlosťou v. Určte túto rýchlosť za predpokladu, že príslušne zmeny objemu a tlaku v plyne sú izotermické.

$\boxed{9.2^*}$ V čase $t = 0$ zdeformujeme strunu, ktorá je upevnená v bode $x = 0$, $x = l$ tak, že jej tvar možno popísať funkciou $f(x) = Ax$, $A \ll 1$. Nájdite tvar tejto struny v čase t.

[5] Overte $\Psi(x) = -\Psi(-x)$