Kapitola 7

Krivkové a viacrozmerné integrály

Motivačné príklady Vo fyzike a najmä v mechanike sa často stretávame s úlohami, ktoré vedú ku krivkovým alebo viacrozmerným integrálom. Uveďme aspoň pár príkladov.

- Predpokladajme, že máme vypočítať hmotnosť nehomogénneho telesa s hustotou $\rho(x,y,z)$. Teleso si rozdelíme na infinitenzimálne elementy s objemom dV a hmotnosťou $dm = \rho(x,y,z)\,dV = \rho(x,y,z)\ dx\,dy\,dz$ a vzájomne ich sčítame: $M = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\ dx\,dy\,dz$

- častokrát sa pri popise pohybu telesa snažíme nájsť bod s takou vlastnosťou, že keby v ňom pôsobila tiažová sila $m\vec{g}$, potom by jej moment vzhľadom na začiatok súradnicového systému bol rovnaký. Tento bod sa nazýva ťažisko:

$$\vec{r}_T \times (\vec{g}m) = \int\limits_m \vec{r} \times \vec{g}dm \Longrightarrow \vec{r}_T = \frac{1}{m}\int\limits_m \vec{r}dm$$

  Ak napríklad poznáme dĺžkovú hustotu telesa ρ_l potom hmotnostný element $dm = \rho_l\ dl$ a integrál sa počíta cez krivku určenú telesom. Ak poznáme plošnú ρ_s alebo objemovú hustotu ρ_V po dosadení hmotnostných elementov $dm = \rho_s\ dS = \rho_S\ dx\,dy$, $dm = \rho_V\ dV = \rho_V\ dx\,dydz$ dostaneme tzv. plošné a objemové integrály

- Nakoniec si ešte pripomeňme vzťahy pre výpočet zložiek tenzora zotrvačnosti z kapitoly matice, ktoré podľa spôsobu zadania hmotnosti telesa vedú

k viacrozmerným integrálom.

$$I_{11} = \int \left(y^2+z^2\right)\ dm \qquad I_{12} = I_{21} = -\int xy\,dm \tag{7.1}$$

$$I_{22} = \int \left(x^2+z^2\right)\ dm \qquad I_{23} = I_{32} = -\int yz\,dm \tag{7.2}$$

$$I_{33} = \int \left(x^2+y^2\right)\ dm \qquad I_{31} = I_{13} = -\int xz\,dm \tag{7.3}$$

7.1 Krivkové integrály

Vo fyzike najmä pri výpočte ťažísk a práce sa stretneme s dvomi typmi krivkových integrálov:

- $\int_\Gamma f(x,y,z)\ ds$ kde ds reprezentuje dĺžkový element krivky Γ
- $\int_\Gamma \vec{F}\,d\vec{l}$

Integrál počítame klasickým spôsobom: Krivku Γ rozsekáme na elementárne úseky ds resp. $d\vec{l}$ a na každom z nich budeme považovať podintegrálnu funkciu za konštantnú. Na úsekoch určíme jednotlivé súčiny $f(x,y,z)\,ds$, resp. $\vec{F}\,d\vec{l}$, ktoré navzájom posčítavame. Určité integrály $\int f(x)\,dx$ (kapitola II). boli tiež krivkovými integrálmi ale po špeciálnej krivke $y = 0$. Vo všeobecnosti sú však krivky Γ podstatne zložitejšie

Majme napríklad jednoduchú krivku zadanú parametricky:

$$x = \varphi(t) \quad y = \chi(t) \quad z = \psi(t)$$

Po jej zdiferencovaní

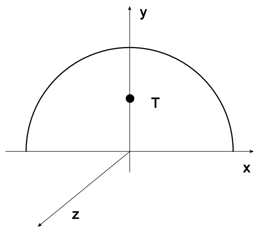
$$dx = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}dt \quad dy = \frac{\partial\chi(t)}{\partial t}dt \quad dz = \frac{\partial\psi(t)}{\partial t}dt \tag{7.4}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2} = \tag{7.5}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi(t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\right)^2}\,|dt| \tag{7.6}$$

Dosadením (7.4), (7.5) do pôvodných integrálov dostaneme integrál jednej premenej t, ktorý už riešiť vieme. Parametrizácia krivky vytvára z krivkových integrálov "obyčajné integrály" a preto je kľučom k ich riešeniu. Uveďme aspoň niekoľko príkladov:

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ Vypočítajte súradnice ťažiska hmotnej polkružnice, s polomerom R a dĺžkovou hustotou $\rho = konšt$ (obr. VII.1).



obr. VII.1

Riešenie: Zo symetrie úlohy je zrejmé, $x_t = 0$, y-ovú zložku ťažiska vypočítame podľa vzťahu:

$$y_t = \frac{\int_\Gamma y\rho\, dl}{M}$$

v ktorom integračna krivka bude polkružnica. Ak za parameter zvolíme uhol φ, potom:

$$x = R\cos\varphi \qquad dx = -R\sin\varphi\, d\varphi \tag{7.7}$$

$$y = R\sin\varphi \qquad dy = R\cos\varphi\, d\varphi \tag{7.8}$$

kde $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$:

$$y_t = \frac{\int_\Gamma y\rho\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{M} = \frac{\int\limits_0^\pi \rho R\sin\varphi R\, d\varphi}{\rho\pi R} = \frac{2R}{\pi} \tag{7.9}$$

Krivku sme mohli parametrizovať aj iným spôsobom, napríklad podľa premennej x: Keďže $x^2 + y^2 = R^2$ potom:

$$x = t \qquad dx = dt \tag{7.10}$$

$$y = \sqrt{R^2 - t^2} \qquad dy = -\frac{tdt}{\sqrt{R^2 - t^2}} \tag{7.11}$$

$$y_t = \frac{\int_\Gamma y\rho\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{M} = \frac{R\int\limits_{-R}^{R} \rho dt}{\rho\pi R} = \frac{2R}{\pi} \tag{7.12}$$

Poloha ťažiska, a teda hodnota krivkového integrálu, nemôže závisieť od spôsobu parametrizácie krivky. *Rôzne parametrizácie tej istej krivky vedú k rovnakým výsledkom.* ♢

Príklad 2 Vypočítajte prácu, ktorú vykonala sila $F\,[xy, -2, y^2 - x^2]$, keď premiestnila teleso z bodu $A\,[0, 0, 5]$ do bodu $B\,[1, 1, 5]$ po parabole a po priamke.

Riešenie: Za parameter paraboly $y = x^2$ zvoľme premennú x. Potom

$$x = t \qquad dx = dt \tag{7.13}$$

$$y = t^2 \qquad dy = 2t\, dt \tag{7.14}$$

$$z = 5 \qquad dz = 0 \tag{7.15}$$

Práca po krivke je daná vťahom:

$$A = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\,\overrightarrow{l} = \int_\Gamma \left(t^3, -2, t^4 - t^2\right) \cdot (dt, 2tdt, 0) = \int\limits_0^1 \left(t^3 - 4t\right)\, dt = -\frac{7}{4} \tag{7.16}$$

Parametrizujme druhú trajektóriu-priamku opäť podľa premennej x:

$$x = t \qquad dx = dt \tag{7.17}$$

$$y = t \qquad dy = dt \tag{7.18}$$

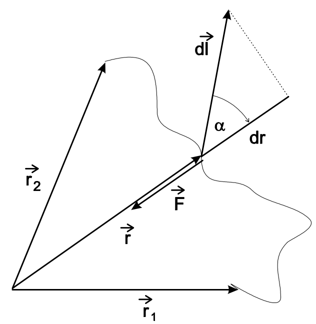
$$z = 5 \qquad dz = 0 \tag{7.19}$$

a zodpovedajúca práca

$$A = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\vec{l} = \int_\Gamma \left(t^2, -2, t^2 - t^2\right) \cdot (dt, dt, 0) = \int\limits_0^1 \left(t^2 - 2\right)\, dt = -\frac{5}{3} \tag{7.20}$$

Práce vykonané po rôznych dráhach, ktoré sa začínajú a končia v tom istom bode, nemusia byť rovnaké. ♢

Príklad 3 Vypočítajte prácu, ktorá sa vykoná v gravitačnom poli Zeme pri priemiestnení telesa s hmotnosťou m z bodu $\overrightarrow{r_1}$ do $\overrightarrow{r_2}$ po rôznych krivkách



obr. VII.2

Riešenie: Skôr ako si zvolíme tvar krivky, upravme vzťah pre výpočet práce:

$$A = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \int_\Gamma -\kappa \frac{Mm}{r^2} \frac{\overrightarrow{r}}{r} \cdot d\vec{l} = \int_\Gamma -\kappa \frac{Mm}{r^2} \cos\alpha \, dl \tag{7.21}$$

kde M je hmotnosť Zeme, $\kappa-$gravitačná konštanta. Z obr. VII.2. vyplýva, že zmena dĺžky polohového vektora $dr = dl\cos\alpha$:

$$A = \int_\Gamma -\kappa \frac{Mm}{r^2} . dr \tag{7.22}$$

Práca je funkciou jedinej premenej r a nezávisí od voľby krivky, ktorá spája body s polohovým vektorom $\overrightarrow{r_1}$ a $\overrightarrow{r_2}$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} -\kappa \frac{Mm}{r^2} . dr = -\kappa Mm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \tag{7.23}$$

$\diamondsuit$

Silové polia, kde práca nezávisí od trajektórie, budeme nazývať *konzervatívnymi.* Aby sme v takýchto poliach nemuseli vždy počítať prácu, každému bodu $\overrightarrow{r}$ v priestore priradíme špeciálnu funkciu $U(x)$ tak, že pre ľubovoľnú dvojicu bodov bude platiť:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l} = U(\overrightarrow{r}_1) - U(\overrightarrow{r}_2) \tag{7.24}$$

Funkciu $U(\overrightarrow{r})$ nazveme *potenciálna energia.* Pokúsme sa na základe vlastnosti (7.24) nájsť matematickú formulu pre výpočet tejto funkcie. Pri výpočte práce A zvoľme krivky spájajúce body $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_1$ tak, aby prechádzali cez bod P_{ref}. : Veľkosť práce A tým nezmeníme, pretože všetky trajektórie sú rovnocenné:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_{ref}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} + \int_{\overrightarrow{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r}_2} \overrightarrow{F} \cdot d\vec{l} = \\ &= \left[- \int_{\overrightarrow{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r}_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} \right] - \left[- \int_{\overrightarrow{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r}_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} \right] \end{aligned} \tag{7.25}$$

Porovnaním so vzťahom (7.24) pre potenciálnu energiu dostaneme:

$$U(\overrightarrow{r}) = - \int_{\overrightarrow{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} \tag{7.26}$$

Potenciálna energia U nie je jednoznačne zadaná a závisí od polohy referenčného bodu P_{ref}. Samotná potenciálna energia nemá žiadny fyzikálny význam, iba ich rozdiel, ktorý zodpovedá práci A.

Príklad 4 Nájdite potenciálnu energiu vektorového poľa $\overrightarrow{F} = (2y, 2x + 3z, 3y)$

Riešenie: Najjednoduchšia krivka, ktorá spája dva body $\overrightarrow{r}_{ref}(x_{ref}, y_{ref}, z_{ref})$ a $\overrightarrow{r}(x, y, z)$ je priamka:

$$\begin{aligned} x' &= x_{ref} + t(x - x_{ref}) & dx' &= xdt \\ y' &= y_{ref} + t(y - y_{ref}) & dy' &= ydt \\ z' &= z_{ref} + t(z - z_{ref}) & dz' &= zdt \end{aligned}$$

Pre jednoduchosť zvoľme referenčný bod $P_{ref}(0, 0, 0)$. Dosadením do (7.26):

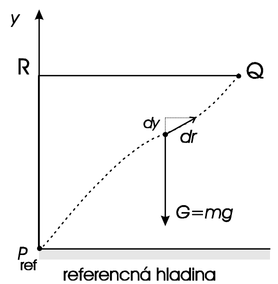
$$\begin{aligned} U(\overrightarrow{r}) &= - \int_{\overrightarrow{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = - \int_0^1 [(2yx) + (2x + 3z)y + 3yz]\, dt = \\ &= -2xy - 3yz \end{aligned}$$

V kapitole VIII. sa vrátime ešte raz k tomuto príkladu a ukážeme si výpočet iným spôsobom.

$\diamondsuit$

Príklad 5 Vypočítajte potenciálnu energiu U v homogénnom gravitačnom poli.

Riešenie: Pre jednoduchosť umiestnime referenčný bod do počiatku súradnicovej sústavy $P_{ref}[0, 0, 0]$. Tentokrát však zvoľme komplikovanejšiu krivku: po priamke z bodu $P_{ref}[0, 0, 0]$ do bodu $R[0, y, 0]$ a potom z bodu $R[0, y, 0]$ do $Q[x, y, z]$.



obr. VII.3

Tiažová sila je všade konštantná a podľa obr. VII.3. $\overrightarrow{G}(0, -mg, 0)$. Obe krivky parametrizujme:

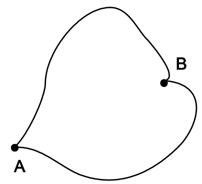
$$\begin{aligned} I &: \quad x' = 0 \quad y' = yt \quad z' = 0, \quad d\vec{r} = (0, ydt, 0) \quad t \in < 0, 1 > \\ II &: \quad x' = xt \quad y' = y \quad z' = 0, \quad d\vec{r} = (xdt, 0, 0) \quad t \in < 0, 1 > \end{aligned}$$

Potenciálna energia v bode (x, y, z) :

$$\begin{aligned} U(\overrightarrow{r}) &= -\int_{\overrightarrow{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r}} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} = -\int_{P_{ref}}^{R} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} - \int_{R}^{Q} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} = \\ &= -\int\limits_{0}^{1} (-mg)\, y\, dt - 0 = mgy \end{aligned}$$

Hodnota y reprezentuje výšku telesa nad referenčnou hladinou. ♢

Zistili sme, že konzervatívne polia majú špecialne vlastnosti, pretože vykonaná práca sa dá v nich počítať z rozdielu potenciálnej energie.



obr. VII.4

Mali by sme preto nájsť jednoduché kritérium na rozlíšenie konzervatívnych polí od nekonzervatívnych. Keďže v konzervatívnych poliach práca nezávisí od trajektórie, potom :

$$\begin{aligned} \int\limits_{A\to B} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} &= -\int\limits_{B\to A} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} \\ \int\limits_{A\to B} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} + \int\limits_{B\to A} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} &= \oint \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l} = 0 \end{aligned}$$

Podmienkou konzervatívnosti je nulovosť práce po ľubovoľnej uzavretej krivke: [1]

7.2 Viacrozmerné integrály

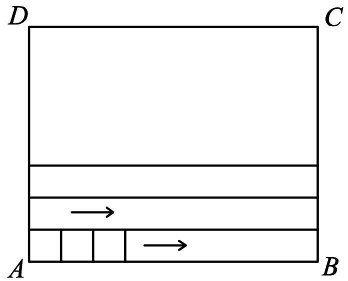
Pod viacrozmernými integrálmi budeme rozumieť integrály funkcií niekoľkých premenných.

$$I = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} f(x, y)\; dx\, dy \tag{7.27}$$

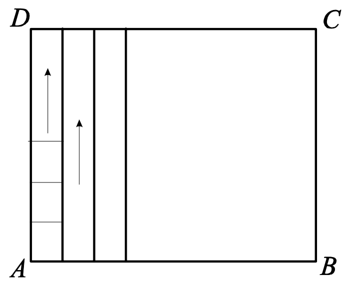
[1] Krúžok v integrále $\oint$ vyjadruje krivkový integrál po uzavretej krivke

Oblasť Ω, nad ktorou integrujeme, nazývame integračným oborom a býva zadaná buď vo forme intervalu alebo množiny. Spôsob výpočtu je podobný s výpočtom integrálov funkcie jednej premennej. Oblasť Ω sa rozdelí na infinitenzimálne plochy s obsahom $dxdy$, ktoré sa prenásobia hodnotou funkcie $f(x, y)$ a vzájomne sa sčítajú. Predpokladajme, že integračná oblasť má tvar obdĺžnika Ω : $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Po jej rozdelení môžeme sčítavať jednotlivé príspevky $f(x, y)\; dx\, dy$ dvomi spôsobmi. Najskôr prejdeme cez štvorčeky "vodorovne" a potom postúpime na vyšší pás (obr.VII.5a):

$$I = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} f(x, y)\; dx\, dy = \int\limits_{c}^{d} dy \left[\int\limits_{a}^{b} f(x, y)\; dx\right] \tag{7.28}$$



obr. VII.5a



obr. VII.5b

Na výsledku sa nič nezmení, keď si zvolíme opačnú stratégiu: najskôr sčítame príspevky od zvislých elementov a postupne budeme prechádzať do ďalších radov (obr.VII.5b):.

$$I = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} f(x, y)\; dx\, dy = \int\limits_{a}^{b} dx \left[\int\limits_{c}^{d} f(x, y)\; dy\right]$$

Musíme však dbať na to, aby sme na žiadnu oblasť $dx\, dy$ nezabudli.

$\boxed{\text{Príklad 6}}$ Vypočítajte hmotnosť obdĺžnika s vrcholmi $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(0, 2)$ s plošnou hustotou $\sigma(x, y) = xy$

Riešenie: Rozdeľme obdĺžnik na infinitenzimálne elementy s plochou $dx\, dx$ a hmotnosťou $dm = \sigma(x, y)\; dx\, dy$. Celkovú hmotnosť telesa dostaneme ich sčítaním.$m = \int\limits_0^1\int\limits_0^2 \sigma(x, y)\; dx\, dy$.

Stratégia 1: (sčítavame najskôr"vodorovné"elementy)

$$m = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2} \sigma(x, y)\; dx\, dy = \int\limits_{0}^{2} dy \left[\int\limits_{0}^{1} xy\, dx\right] = \int\limits_{0}^{2} dy \left[\frac{1}{2}y\right] = 1$$

Stratégia 2: (sčítavame najskôr”zvislé”elementy).

$$m=\int_0^1\int_0^2 \sigma(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\left[\int_0^2 xy\,dy\right]=\int_0^1 dx\,[2x]=1$$

♢

Nie vždy oba spôsoby vedú k integrálom, ktoré vieme analyticky riešiť. V takom prípade použijeme tú stratégiu, ktorá vedie k cieľu.

Príklad 7 Vypočítajte hmotnosť obdĺžnika $0\leqslant x\leqslant 1$, $2\leqslant y\leqslant 3$ s plošnou hustotou $\sigma(x,y)=x^y$.

Riešenie: **Stratégia 1:**

$$m=\int_0^1\int_2^3 x^y dxdy=\int_0^1 dx\int_2^3 x^y\,dy=\int_0^1 dx\left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_2^3=\int_0^1 dx\left(\frac{x^3-x^2}{\ln x}\right)$$

Určitý integrál nedokážeme vyriešiť, skúsme zmeniť poradie integrovania.

Stratégia 2:

$$\begin{aligned} m &= \int_2^3\int_0^1 x^y dxdy=\int_2^3 dy\int_0^1 dx x^y=\int_2^3 dy\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1= \\ &= \int_2^3 dy\left(\frac{1}{y+1}\right)=\left[\ln|y+1|\right]_{y=2}^{y=3}=\ln\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Vidíme, že prvý spôsob sčítavania elementov neviedol k cieľu, druhý však bol úspešný.

♢

Ak je podintegrálna funkcia $f(x,y)$ súčinom dvoch funkcií $f(x,y)=f_1(x)\,f_2(y)$, pôvodný integrál sa počíta ako súčin dvoch integrálov:

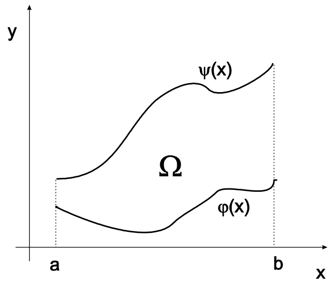
$$\int_a^b\int_c^d f_1(x)\,f_2(y)\,dx\,dy=\left[\int_a^b dx f_1(x)\right]\left[\int_c^d dy f_2(y)\right] \tag{7.29}$$

Príklad č.6 sme mohli riešit priamo podľa tohto vzťahu:

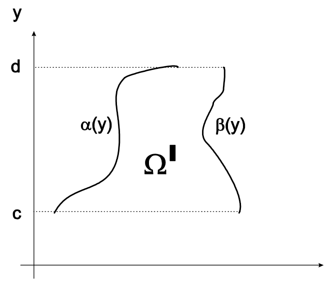
$$m=\int_0^1\int_0^2 \sigma(x,y)\,dx\,dy=\left[\int_0^2 ydy\right]\cdot\left[\int_0^1 xdx\right]=1$$

Výpočet integrálov na množine V praxi sa často stretneme so situáciou, keď sú hranice jednej premennej závislé od inej: Predpokladajme, že integračná oblasť Ω ($\Omega^{\shortmid}$) je množinou bodov, ktoré spĺňajú nasledovnú nerovnosť:

$$\begin{aligned}\Omega &: a\leqslant x\leqslant b, \varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\\ \Omega^{\shortmid} &: \alpha(y)\leqslant x\leqslant\beta(y), c\leqslant y\leqslant d\end{aligned}$$



obr. VII.6a



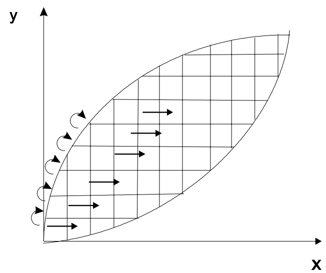
obr. VII.6b

Najskôr integrujeme cez premennú y resp. x a až potom cez číselnú hranicu:

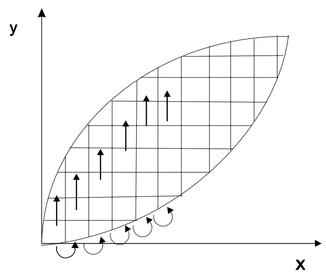
$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx\left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x,y)\right] \tag{7.30}$$

$$\iint_{\Omega^{\shortmid}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy\left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} dx f(x,y)\right] \tag{7.31}$$

Príklad 8 Vypočítajte hmotnosť plôšky s plošnou hustotou $\sigma(x,y)=xy$. Teleso je ohraničené dvoma krivkami: $f_1=x^2$ a $f_2=\sqrt{x}$ pričom $x\in\langle 0,1\rangle$



obr. VII.7a



obr. VII.7b

Riešenie: Nájdime analytické vyjadrenie integračného oboru: $\Omega : 0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$ a dosaďme do vzťahu pre výpočet hmotnosti (7.30):

$$m = \iint_{\Omega} \sigma(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\, xy \right] = \frac{1}{12}$$

Integračnú oblasť Ω' sme mohli vyjadriť aj opačne, prostredníctvom premennej $x : \sqrt{y} \leqslant x \leqslant y^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ a integrovať podľa (7.31).

$$m = \iint_{\Omega} \sigma(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 dy \left[\int_{y^2}^{\sqrt{y}} dx\, xy \right] = \frac{1}{12}$$

$\diamondsuit$

Substitučná metóda pri integráloch viacerých premenných. V mnohých fyzikálnych úlohách je vhodnejšie a oveľa efektívnejšie použiť iné súradnicové systémy, ako kartézke (viď kapitola VI). Vtedy je nutné celý integrál, včetne objemových $dxdydz$ resp plošných elementov $dxdy$ ako aj integračného oboru, pretransformovať do nových súradníc.:

$\boxed{\text{Príklad 9}}$ Vypočítajme moment zotrvačnosti homogénneho disku s polomerom R vzhľadom na $z-ovú$ os:

Riešenie: Integračný obor v kartézkej sústave $\Omega : -R \leqslant x \leqslant R$, $-\sqrt{R^2 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}$ a pre moment zotrvačnosti:

$$I_{zz} = \iint \left(x^2 + y^2\right) \sigma\, dx\, dy$$

Pretransformujme celý integrál do polárnych súradníc[2]:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & y &= r\sin\varphi \\ dxdy &\to rdrd\varphi \end{aligned}$$

[2] V kartézkej sústave je riešenie zdĺhavé a komplikované, lebo integračná oblasť nie je intervalom ale množinou.

$$I_{zz} = \iint \left(x^2 + y^2\right) \sigma dx\, dy = \sigma \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\, \left(x^2 + y^2\right) =$$

$$= 2\sigma \int_{-R}^{R} dx \left[x^2\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{\left(R^2 - x^2\right)^{3/2}}{3} \right] = \frac{1}{2}MR^2$$

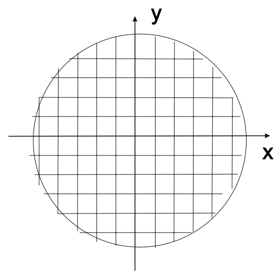
Integračná oblasť $\Omega : 0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ je vlastne interval a preto integrovať môžeme v ľubovoľnom poradí:.

$$I_{zz} = \iint \left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right) \sigma r dr d\varphi = \iint \sigma r^3 dr d\varphi \tag{7.32}$$

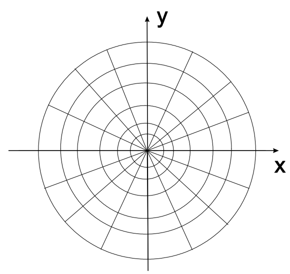
$$I_{zz} = \sigma \int_0^R dr r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^R r^2 \left[2\pi r dr \sigma\right] = \frac{1}{2}MR^2 \tag{7.33}$$

$$I_{zz} = \sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r^3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{R^4}{4}\sigma\right] = \frac{1}{2}MR^2 \tag{7.34}$$

Všimnime si, že v hranatej zátvorke rovnice (7.33) vystupuje moment zotrvačnosti obruče s polomerom r a hrúbkou dr. Príspevky k celkovému momentu zotrvačnosti sa najskôr počítajú po obvode a potom sa postupuje ďalej v radiálnom smere. V rovnici (7.34) ide o opačnú stratégiu: najskôr sčítavame elementy po hruhových úsekoch s uhlom $d\varphi$



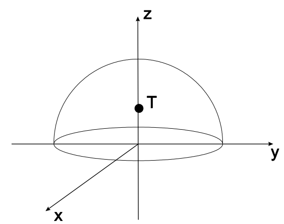
obr. VII.8a



obr. VII.8b

$\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 10}}$ Vypočítajte súradnice ťažiska homogénnej polgule.



obr. VII.9

Riešenie: Pretransformujme vzťah pre výpočet ťažiska

$$z_T = \frac{\int zdm}{M} = \frac{\iiint z\rho dxdydz}{\frac{2}{3}\pi R^3 \rho}$$

do sférických súradníc. Integračná oblasť v sférických súradniciach $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$ a objemový element: $dxdydz \to r^2 \sin\vartheta dr d\varphi d\vartheta$:

$$\begin{aligned}
\iiint z\rho dxdydz &= \iiint \rho r \cos\vartheta r^2 \sin\vartheta dr d\varphi d\vartheta = \\
&= \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho\pi \frac{R^4}{4} \\
z_T &= \frac{3}{8} R
\end{aligned}$$

Vzhľadom na symetriu úlohy $x_T = y_T = 0$ ♢

Príklad 11 Vypočítajte moment zotrvačnosti gule vzhľadom na os, prechádzajúcou jej stredom.

Riešenie: Integrál pre výpočet momentu zotrvačnosti vzhľadom na os z pretransformujme do sférických súradníc.

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int \left(x^2 + y^2\right) dm = \iiint \left(x^2 + y^2\right) \rho dxdydz = \\
&\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\pi \left(r^2 \cos^2\varphi \sin^2\vartheta + r^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta\right) \rho r^2 \sin\vartheta dr d\varphi d\vartheta \\
&= \frac{2}{5} m R^2
\end{aligned}$$

Mohli sme využiť symetriu telesa, z ktorej vyplýva rovnosť diagonálnych zložiek tenzora momentu zotrvačnosti:

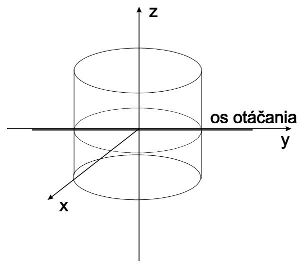
$$\begin{aligned}
I &= I_{zz} = I_{yy} = I_{zz} \\
I &= \int \left(x^2 + y^2\right) dm = \int \left(x^2 + z^2\right) dm = \int \left(y^2 + z^2\right) dm
\end{aligned}$$

Sčítaním týchto zložiek a využitím sférickej symetrie:

$$3I = 2 \int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm = 2\rho \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr = \frac{6}{5} m R^2$$

Odkiaľ $I = \frac{2}{5} m R^2$ ♢

Príklad 12 Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho valca vzhľadom na os, ktorá prechádza stredom valca a je kolmá na geometrickú os.



obr. VII.10

Riešenie: Zložku tenzora zotrvačnosti I_{xx} pretransformujme do cylindrickej sústavy:

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \rho \iiint \left(y^2 + z^2\right) dxdydz = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} \left(r^2 \sin^2\varphi + z^2\right) r dr d\varphi dz = \\
&= M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)
\end{aligned}$$

♢

Príklad 13 Nájdite hmotnosť dutej nehomogénnej gule s hustotou $\rho = Ar$, ktorej vnútorný polomer má veľkosť R_1, vonkajší R_2 a $A = konšt.$

Riešenie: Integrál pre výpočet hmotnosti pretransformujme do sférických súradníc.

$$m = \int \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\pi A r r^2 \sin\vartheta dr d\varphi d\vartheta = A\pi \left(R_2^4 - R_1^4\right)$$

♢

Príklad 14 Vypočítajte tenzor momentu zotrvačnosti homogénneho kvádra s rozmermi: $a \times b \times c$.

Riešenie: Pre zložku I_{zz} platí:

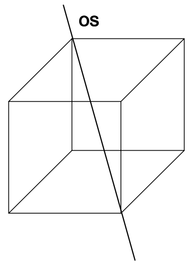
$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \iiint \left(x^2 + y^2\right) \rho dxdydz = \\
I_{zz} &= \rho \left[\int_{-a/2}^{a/2} x^2 \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz + \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-c/2}^{c/2} dz \right] = \\
&= \frac{M}{12} \left(a^2 + b^2\right)
\end{aligned}$$

Analogickými dopočítaním ďalších zložiek tenzora dostaneme:

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} \frac{M}{12}\left(b^2+c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{12}\left(a^2+c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12}\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix} \tag{7.35}$$

◊

$\boxed{\text{Príklad 15}}$ Určte moment zotrvačnosti homogénnej kocky vzhľadom na telesovú uhlopriečku.



obr. VII.11

Riešenie: Tenzor momentu zotrvačnosti kocky je totožný s tenzorom zotrvačnosti kvádra z predchádzajúceho príkladu, pričom: $a = b = c$. Moment zotrvačnosti vzhľadom na uhlopriečku, ktorej smerový vektor $\overrightarrow{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ vypočítame podľa vzťahu (3.11) z kapitoly III.

$$\begin{aligned} I_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{M}{6}a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{6}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{6}a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{M}{6}a^2 \end{aligned}$$

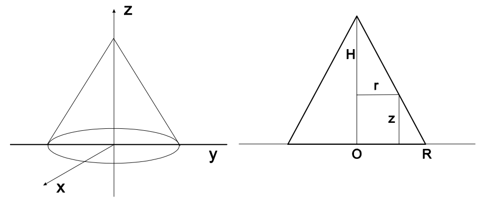
◊

$\boxed{\text{Príklad 16}}$ Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho kužeľa vzhľadom k priemeru podstavy.

Riešenie: Súradnicovú sustavu voľme podľa obrázka obr.VII.12. Pre zložku J_{xx} potom platí:

$$J_{xx} = \iiint\limits_V \left(y^2+z^2\right) \rho dx\, dy\, dz \tag{7.36}$$

Aby sme mohli integrál pretransformovať do cylindrickej sústavy nájdime rovnicu kužeľovej plochy.



obr. VII.12

Z obrázka VII.12 a z podobnosti trojuholníkov vyplýva:

$$\frac{z}{H} = \frac{R-r}{R}$$

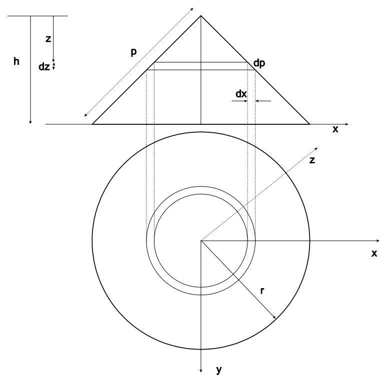
kde H je výška a R polomer podstavy. Pre integrál (7.36) po transformácii platí:

$$J_{yy} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R rdr \int\limits_0^{H\frac{R-r}{R}} \left(r^2 \sin^2\varphi + z^2\right) dz = \frac{\pi H R^2}{60}\left(2H^2+3R^2\right)$$

◊

$\boxed{\text{Príklad 17}}$ Vypočítajte ťažisko plášťa rotačného kužela.

Riešenie: Vzhľadom na symetriu stačí vypočítať súradnice z ťažiska. Z podobnosti trojuholníkov na obrázku VII.12b:



obr. VII.12b

$$\begin{aligned} z &= \frac{h}{r}x \\ dz &= \frac{h}{r}dx \end{aligned}$$

Element povrchovej priamky má veľkosť:

$$dp = \sqrt{dx^2 + dz^2}$$

Dĺžka povrchovej priamky:

$$p = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Element plochy plášťa sa rovná:

$$\begin{aligned} dS &= 2\pi x\, dp = 2\pi x \sqrt{dz^2 + dx^2} = 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx = \\ &= 2\pi x \sqrt{1 + \frac{h^2}{r^2}}\, dx = \frac{2\pi}{r}\sqrt{r^2 + h^2} x\, dx \end{aligned}$$

Pre ťažisko potom platí:

$$z_t = \frac{\int z\, dS}{\int dS} = \frac{\int\limits_0^r \frac{h}{r} x \frac{2\pi}{r} \sqrt{r^2 + h^2} x\, dx}{\frac{2\pi}{r}\sqrt{r^2 + h^2} \int\limits_0^r x\, dx} = \frac{2}{3}h$$

♢

Príklad 18 Vypočítajte integrál $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha x^2\right) dx$

Riešenie: Hodnota integrálu nezávisí od označenia premenných a preto:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha x^2\right) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha y^2\right) dy = I$$

Vynásobme tieto integrály navzájom a upravme ich podľa vzťahu (7.29)

$$\begin{aligned} I^2 &= \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha x^2\right) dx\right] \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\alpha y^2\right) dy\right] = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\alpha\left(x^2 + y^2\right)\right] dx\, dy \end{aligned}$$

Pretransformujme celý integrál do polárnych súradníc

$$\begin{aligned} I^2 &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\alpha r^2\right) r dr d\varphi = \frac{\pi}{\alpha} \\ I &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \end{aligned}$$

♢

7.3 Cvičenia

7.1. Vypočítajte $\iint xydxdy$ cez plochu ohraničenú parabolou $y^2 = x$ a priamkou $x = 2$.

Riešenie: 0

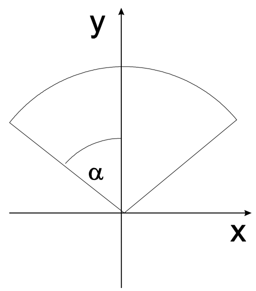
7.2. Vypočítajte $\iint \left(x^2 + y\right) dxdy$ cez plochu ohraničenú parabolou $y = x^2$ a $y^2 = x$.

Riešenie: $\frac{33}{140}$

7.3.* Vypočítajte objem, ťažisko a moment zotrvačnosti kužeľa s polomerom základne R a výškou h.

Riešenie: $z_t = \frac{3}{4}h$

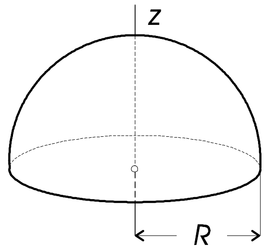
7.4.* Vypočítajte ťažisko kruhového oblúka podľa obr. VII.13.



obr. VII.13

Riešenie: $y_t = R\frac{\cos\alpha}{\alpha}$

7.5.* Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho polguľového plášťa hmotnosti M vzhľadom na os z na obrázku.



obr. VII.15

Riešenie: $I = \frac{2}{3}MR^2$

$\boxed{7.6^*}$ Vypočítajte momenty zotrvačnosti elipsoidu s hlavnými osami a, b, c.
Riešenie: $I_z = \frac{m}{5}\left(a^2+b^2\right)$, $I_x = \frac{m}{5}\left(b^2+c^2\right)$, $I_y = \frac{m}{5}\left(c^2+a^2\right)$

$\boxed{7.7^*}$ Vypočítajme ťažisko obdĺžnika s vrcholmi $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$, $D(0,2)$ s plošnou hustotou $\sigma(x,y) = 1 + x + 2y$.
Riešenie: $\vec{r}_t = (11/21, 25/21)$.

$\boxed{7.8^*}$ Vypočítajte hmotnosť obdĺžnikovej dosky $a \times b$ s hrúbkou h, ak jej hustota je $\rho\left(x,y\right) = kx^2y$.

$\boxed{7.9^*}$ Vypočítajte hmotnosť tyče s dĺžkou a, prierezom S a hustotou $\rho\left(x\right) = kx^2$.

$\boxed{7.10^*}$ Vypočítajte ťažisko zvislo prerezaného homogénneho polvalca.

$\boxed{7.11^*}$ Vypočítajte ťažisko $\frac{1}{8}$ gule (prvý kvadrant).

$\boxed{7.12^*}$ Vypočítajte hmotnosť a tenzor momentu zotrvačnosti nehomogénnej gule s hustotou $\rho\left(r,\vartheta,\varphi\right) = c \cdot r^n$.