Kapitola 8

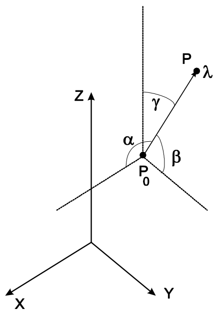
Základy vektorovej analýzy

Vo fyzike a matematike často pracujeme s veličinami, ktoré sú funkciami polohy. Ak každému bodu v priestore $\overrightarrow{r}$ priradíme číslo $f\left(\overrightarrow{r}\right)$ hovoríme, že v definovanom priestore je pole skalárnej veličiny f, ak bodom priradíme vektorovú funkciu

$$\vec{F}\left(\overrightarrow{r}\right) = F_x\left(x,y,z\right)\overrightarrow{i} + F_y\left(x,y,z\right)\overrightarrow{j} + F_z\left(x,y,z\right)\overrightarrow{k}$$

hovoríme o vektorových poliach. Môže ísť napríklad o teplotu v jednotlivých bodoch študovanej vzorky, alebo o rýchlosť prúdiacej kvapaliny v jednotlivých bodoch trubice. Skalárne a vektorové pole ktoré nezávisí explicitne na čase sa nazýva stacionárne. Vlastnosti polí je výhodné vyšetrovať metódami matematickej analýzy, ktorej základným pojmom je derivácia. Ide však skôr o derivácie smerové, umožňujúce analyzovať vlastnosti daného poľa v určitom smere.

Smerová derivácia Dôležitou charakteristikou skalárnych polí je rýchlosť zmeny funkcie poľa (napr. teploty) pri zmene polohy bodu P . Pre lepšiu názornosť analyzujme skalárne pole teplôt T.



obr. VIII.1

Nech v čase $t = 0$ vyštartuje z bodu P_0 auto, ktoré sa začne pohybovať v smere lúča λ, rýchlosťou $v = 1\,\frac{m}{s}$. Jeho poloha v čase t bude:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\cos\alpha \\ y &= y_0 + t\cos\beta \\ z &= z_0 + t\cos\gamma \end{aligned}$$

Teleso za čas t prejde dráhu[1] $\Delta r = vt = t$. Teplota T sa tým zmenila z hodnoty $T(P_0)$ na hodnotu $T(P)$. Priemerná rýchlosť tejto zmeny je:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{T(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - T(x_0,y_0,z_0)}{t} = \\ &= \frac{T(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - T(x_0,y_0,z_0)}{\Delta r} \end{aligned} \tag{8.1}$$

a okamžitá

$$= \lim_{t\to 0}\bar{T} = \lim_{t\to 0}\frac{T(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - T(x_0,y_0,z_0)}{t} =$$

$$= \lim_{\Delta r\to 0}\frac{T(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - T(x_0,y_0,z_0)}{\Delta r} = \tag{8.2}$$

$$= \lim_{\Delta r\to 0}\frac{T(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - T(\vec{r})}{\Delta r} \tag{8.3}$$

Uvedená rýchlosť nezávisí len od polohy bodu P_0 ale aj od smeru pohybu telesa a nazývame ju *smerová derivácia.* Ak by sa auto pohybovalo v smere osi x, za čas t prejde dráhu $\Delta x = 1t$. Limitným priblížovaním $\Delta x \to 0$ nájdeme okamžitú rýchlosť zmeny teploty v smere osi x :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{T(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - T(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x} \tag{8.4}$$

Podobne pre smery y a z:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{T(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - T(x_0,y_0,z_0)}{\Delta y} \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{T(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - T(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z} \tag{8.6}$$

Posledné typy derivácii sa nazývajú *parciálne.* Ide vlastne o deriváciu podľa jednej premenej (ostatné premenné sú zafixované). Ak sa vrátime k nášmu autu a budeme chcieť vypočítať zmenu celkovej teploty prostredia dT pri jeho premiestnení z bodu P_0 do P, môžeme postupovať nasledovne: najskôr teleso

[1] Pre lepšiu prehľadnosť nebudeme písať jednotky. Ak však do ľubovoľného vzťahu dosadíme čísla v sústave SI, potom aj výsledná veličina vyjde v základných jednotkách SI.

posunieme v smere osi x o Δx, čomu zodpovedá zmena teploty o $dT_x = \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x$, potom v smere y a nakoniec v smere osi z a tieto parciálne zmeny teplôt sčítame:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial T}{\partial z}\Delta z \tag{8.7}$$

Celkovú zmenu dT nazývame totálnym diferenciálom funkcie dT.

Príklad 1 Teplota v priestore je daná formulou $T = 2x^3 + 4y - z$. Určte rýchlosť jej zmeny v smere osi x, y a z v ľubovoľnom bode priestoru

Riešenie: Pre rýchlosť zmeny v jednotlivých smeroch platí: $\frac{\partial T}{\partial x} = 6x^2$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 4$, $\frac{\partial T}{\partial z} = -1$ $\diamondsuit$

Vo fyzike sa často stretávame s funkciami viacerých premenných, pričom to nemusia byť nevyhnutne súradnice x, y, z. Ak chceme napr. určiť odpor rezistora R pomocou Ohmovho zákona $R(U, I) = \frac{U}{I}$ potom chybu, ktorej sa pri meraní dopustíme, môžeme vypočítať na základe analógie so vzťahom (8.7):

$$dR = \frac{\partial R}{\partial I}\Delta I + \frac{\partial R}{\partial U}\Delta U$$

Príklad 2 Doba kmitu matematického kyvadla sa počíta podľa vzťahu $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Určte, ako sa zmení doba kmitu kyvadla, ak sa jeho dĺžka zmenila o $\Delta l = a$ a tiažové zrýchlenie dôsledkom zmeny nadmorskéj výšky o $\Delta g = b$?

Riešenie: Pretože hodnoty a a b považujeme za dostatočne malé, potom zmenu doby kmitu stotožníme s diferenciálom funkcie T :

$$\Delta T \approx dT = \frac{\partial T}{\partial l}\Delta l + \frac{\partial T}{\partial g}\Delta g$$

Po vykonaní parciálnych derivácii:

$$\Delta T = \frac{\pi}{\sqrt{\lg}}\left(a - \frac{l}{g}b\right)$$ $\diamondsuit$

Príklad 3 Vypočítajte približnú hodnotu výrazu $b = 0,97^{2,02}$

Riešenie: Uvažujme funkciu dvoch premenných $f(x_1, x_2) = (x_1)^{x_2}$ v bode $[1, 2]$. Hodnota tejto funkcie sa pri zmene $\Delta x_1 = -0,03$ a $\Delta x_2 = 0,02$ zmení približne o (8.7):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 = x_2 x_1^{x_2-1}\Delta x_1 + x_1^{x_2}\ln x_1 \Delta x_2 \sim 0,06$$

a teda:

$$b \sim f(1,2) + df = 1 - 0,06 = 0,94$$ $\diamondsuit$

8.1 Charakteristiky skalárnych a vektorových polí.

V nasledovných odstavcoch budeme vyšetrovať vlastnosti skalárnych a vektorových polí pomocou operácií gradientu, divergencie a rotácie.

8.1.1 Ekviskalárne plochy (čiary) a gradienty skalárnych polí

Skalárne polia f zobrazujeme pomocou ekviskalárnych plôch (čiar),. ktoré spájajú body s rovnakou hodnotou funkcie f:

$$f(x, y, z) = konšt$$

Rozdiel medzi každými dvoma susednými plochami si volíme zvyčajne konštantný a vhodný na prehľadné zobrazovanie poľa. Ekviskalárne plochy sa vzájomne nepretínajú, ale môžu mať rôzne geometrické tvary.

Príklad 4 Nájdite ekviskalárne plochy potenciálu bodového náboja.

Riešenie: Pre potenciál platí $V = -\chi\frac{m}{r}$ a ekviskalárne plochy budú guľové. $\diamondsuit$

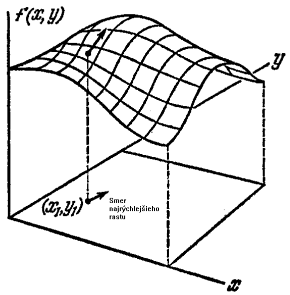
Ak v priestore posunieme teleso z bodu $\vec{r}$ o vektor $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, potom sa skalárna veličina zmení o dT (8.7), čo zapíšme pomocou skalárneho súčinu:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \cdot d\vec{r} = \nabla T \cdot d\vec{r} \tag{8.8}$$

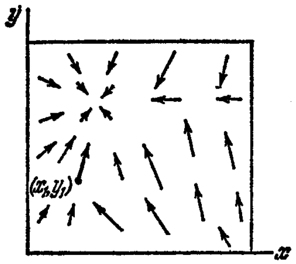
Výraz v zátvorke je vektor, ktorý budeme nazývať gradient poľa T

$$\operatorname{grad} T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} \tag{8.9}$$

Získame ho aplikovaním "nabla" operátora $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ na príslušnú skalárnu funkciu. Gradient vyjadruje smer *najväčšieho nárastu skalárnej funkcie* $\frac{dT}{|d\overrightarrow{r}|}$



obr. VIII.2a



obr. VIII.2b

Vidieť to priamo zo vzťahu (8.8):

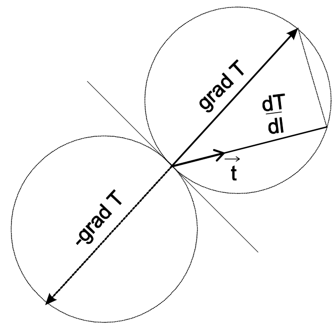
$$\frac{dT}{|d\overrightarrow{r}|} = |\nabla T| \cos\varphi \tag{8.10}$$

podľa ktorého funkcia najrýchlejšie rastie, keď $\cos\varphi = 1$, čo znamená $d\vec{r} \parallel \operatorname{grad} T$[2]. Ďalšou významnou vlastnosťou je *kolmosť gradientu na ekviskalárne plochy.* Hodnota funkcie na týchto plochách je konštantná $\Longrightarrow dT = 0 \Longrightarrow \nabla T \cdot d\overrightarrow{r} \equiv 0 \Rightarrow \nabla T \perp d\overrightarrow{r}$. Pri infinitenzimálnom posune $|d\overrightarrow{r}| \to 0$, ľavá strana rovnice (8.3) je totožná s (8.10) a vyjadruje smerovú deriváciu.

$$\frac{dT}{ds} = grad\, T \cdot \overrightarrow{t}\,(s) \tag{8.11}$$

kde $\overrightarrow{t}$ určuje smer, v ktorom sa derivácia počíta.

[2]Na obr. VIII.2a je pre ilustráciu znázornená funkcia dvoch premenných $f(x, y)$, ktorá je reprezentovaná plochou. Na obr. VIII.2b sú znázornené vektory $\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$ zobrazujúce smer najrýchlejšej zmeny skalárnej funkcie $f(x, y)$.



obr. VIII.3

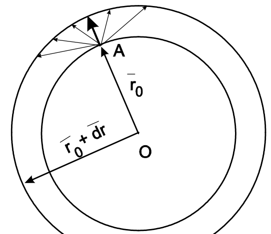
Pre operátor $\vec{\nabla}$ platia podobné matematické operácie ako pre deriváciu skalárnych funkcií[3]:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(f_1 + f_2) &= \vec{\nabla} f_1 + \vec{\nabla} f_2 && (8.12)\\
\vec{\nabla}(f_1 f_2) &= f_1 \vec{\nabla} f_2 + f_2 \vec{\nabla} f_1 && (8.13)\\
\vec{\nabla}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) &= \frac{1}{f_2^2}\left(f_2 \vec{\nabla} f_1 - f_1 \vec{\nabla} f_2\right) && (8.14)
\end{aligned}$$

Vo fyzike sa často stretneme so sféricko-symetrickými poliami, ktoré majú tú vlastnosť, že skalárna funkcia závisí len od veľkosti polohového vektora $\overrightarrow{r}$. Pre gradient $f(r)$ potom platí [4]:

$$\vec{\nabla} f(r(x, y, z)) = \left[\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\right] = \frac{df}{dr}\left[\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right] = \frac{df}{dr}\frac{\overrightarrow{r}}{r} \tag{8.15}$$

Výsledok je logický. Ekviskalárne plochy sú guľové. Nech sfére s polomerom r_0 zodpovedá konštantná hodnota $f(r_0)$ a sfére so niečo väčším polomerom $r_0 + dr$ hodnota $f(r_0 + dr)$. (obr. VIII.4)



obr. VIII.4

[3]operátor je lineárny

[4]Uvedomme si že vektor $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ má veľkosť $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a skutočnosť $\frac{\partial}{\partial x} r = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \frac{x}{r}$, podobne $\frac{\partial}{\partial y} r = \frac{y}{r}$ a $\frac{\partial}{\partial z} r = \frac{z}{r}$. Pri výpočte využime pravidlá o derivovaní zloženej funkcie.

Smer najrýchlejšej zmeny funkcie f musí byť totožný so smerom polohového vektora $\overrightarrow{r}$ a jej veľkosť je $\frac{df}{dr}$

Využitie gradientov vo fyzike:

Určenie silového poľa z potenciálov. V kapitole krivkové integrály sme zavádzali vzťah pre výpočet práce v konzervatívnych poliach (8.8):

$$A = \int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = U\left(\overrightarrow{r}_1\right) - U\left(\overrightarrow{r}_2\right) = \int_{\overrightarrow{r}1}^{\overrightarrow{r}_2} -dU \tag{8.16}$$

Podľa (8.8):

$$\int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_2} -dU = \int_{\overrightarrow{r}_1}^{\overrightarrow{r}_2} -\overrightarrow{\nabla} U \cdot d\overrightarrow{r} \tag{8.17}$$

$$\overrightarrow{F} = -gradU \tag{8.18}$$

Pole potenciálnej energie $U(\vec{r})$ obsahuje všetku informáciu o sile $\vec{F}$. Záporné znamienko vystupujúce v tejto rovnici vyjadruje, že sila v danom poli pôsobí na teleso tak, aby čo najrýchlejšie klesla jeho potenciálna energia.

$\boxed{\text{Príklad 5}}$ Nájdite silu pôsobiacu v gravitačnom poli:

Riešenie: Pre potenciálnu energiu $U = -\chi\frac{mM}{r}$, $\overrightarrow{F} = -grad\,U$. Skalárne pole je sféricky symetrické, takže podľa (8.15) $\overrightarrow{F} = -grad\,U = -\chi\frac{mM}{r^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r}$. ♢

Vzťah (8.17) sa dá použiť aj opačne:

$\boxed{\text{Príklad 6}}$ Nájdite potenciálnu energiu vektorového poľa $\overrightarrow{F} = (2y, 2x + 3z, 3y)$

Riešenie: Dosadením do (8.17) získame trojicu parciálnych diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} 2y &= -\frac{\partial}{\partial x}U \quad \Rightarrow \quad U = -2yx + c_1(y, z) \\ 2x + 3z &= -\frac{\partial}{\partial y}U \quad \Rightarrow \quad U = -2xy - 3zy + c_2(x, z) \\ 3y &= -\frac{\partial}{\partial z}U \quad \Rightarrow \quad U = -3yz + c_3(x, y) \end{aligned}$$

Vo všetkých troch riadkoch je tá istá funkcia U a preto

$$U = -3yz - 2xy + konš$$

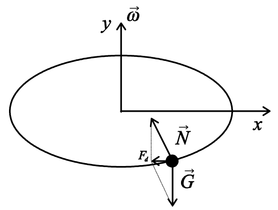
♢

Určovanie rovnovážnych polôh pomocou Lagrangeových funkcií prvého druhu. Kolmosť gradientu na ekviskalárne plochy sa dá výhodne použiť pri hľadaní rovnovážnych polôh telies, viazaných určitými väzbami.

$\boxed{\text{Príklad 7}}$ Pohyb guličky je viazaný na elipsu s poloosami a, b :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8.19}$$

ktorá sa otáča okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou ω. Nájdite rovnovážnu polohu guličky.



obr. VIII.5

Riešenie: Vyšetrujme pohyb guličky z hľadiska neinerciálnej vzťažnej sústavy, v ktorej je teleso v rovnováhe. Na guličku pôsobia tri sily: gravitačná $\vec{G} = (0, -mg)$ tlaková sila drôtu $\vec{N}$, a odstredivá $\vec{F_d} = (m\omega^2 x, 0)$, kde x zodpovedá aktuálnemu polomeru krivosti dráhy, po ktorej sa otáča gulička. Ak zadefinujeme v priestore potenciálnu funkciu U :

$$U(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \tag{8.20}$$

potom elipsu (8.19) možno považovať za ekviskalárnu krivku s hodnotou $U = 0$, na ktorú musí byť vektor $\vec{N}$ kolmý. Má smer gradientu:

$$\vec{N} = \lambda\,\mathrm{grad}\,U = \lambda\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)$$

Z podmienky rovnováhy $\vec{F} = \vec{0}$ vyplýva:

$$\lambda\frac{2x}{a^2} + m\omega^2 x = 0 \tag{8.21}$$

$$\lambda\frac{2y}{b^2} - mg = 0 \tag{8.22}$$

Riešením (8.20), (8.21), (8.22) získavame dva korene

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \qquad y_1 = \pm b \\ x_2 &= \pm\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\,a \qquad y_2 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{g}{\omega^2} \end{aligned} \tag{8.23}$$

Prvý koreň udáva síce rovnovážnu, ale nestabilnú polohu.

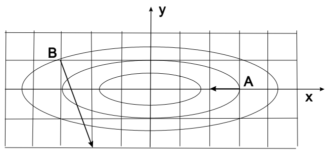
♢

$\boxed{\text{Príklad 8}}$ Predstavte si, že nadmorská výška kopca je daná funkciou $h(x,y) = 5\exp\left[-x^2 - 9y^2\right]$. Nájdite kolmé vektory k vrstevniciam v bodoch so súradnicami $A = [3,0]$, $B = [-3,1]$

Riešenie: Vrstevnice sú také krivky, pre ktoré $h(x,y) = 5\exp\left[-x^2 - 9y^2\right] = const$. Tento vzťah je možné upraviť na rovnicu elipsy: $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + y^2 = const$. Kolmice k vrstevniciam v ľubovoľnom bode sú

$$\overrightarrow{n} = grad\, h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = 5\exp\left[-x^2 - 9y^2\right](-2x, -18y) \sim (-x, -9y)$$

Nepodstatné konštanty sme vynechali, pretože menia veľkosti vektorov a nie ich smery. $\overrightarrow{n}_A \sim (-1,0)$, $\overrightarrow{n}_B \sim (1,-3)$

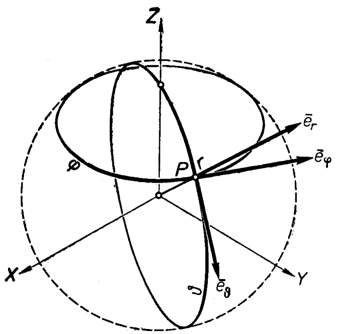


obr. VIII.6

◊

Niekedy je vhodné vyjadriť operátor gradientu v inej súradnicovej sústave ako v kartézkej. Gradient je vektor invariantný vzhľadom na voľbu súradnicovej sústavy. Stačí preto nájsť jeho zložky v nových bázach. Podľa rovnice (8.11) smerová derivácia zodpovedá priemetu gradientu do smeru jednotkového vektora $\overrightarrow{t}$. Ak zvolíme krivku, ktorej vektor $\overrightarrow{t}$ bude totožný s bázovým vektorom, potom smerová derivácia zodpovedá práve zložkám gradientu v nových bázach.

sférická súradnicová sústava:



obr. VIII.7

$$\begin{aligned}
(grad\, U)_\varphi &= \left(\frac{dU}{ds}\right)_{r=konš,\vartheta=konšt} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{U(r,\varphi+\Delta\varphi,\vartheta) - U(r,\varphi,\vartheta)}{r\sin\vartheta\Delta\varphi} = \\
&= \frac{1}{r\sin\vartheta}\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{U(r,\varphi+\Delta\varphi,\vartheta) - U(r,\varphi,\vartheta)}{\Delta\varphi} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\varphi} \\
(grad\, U)_r &= \left(\frac{dU}{ds}\right)_{\varphi=konš,\vartheta=konšt} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{U(r+\Delta r,\varphi,\vartheta) - U(r,\varphi,\vartheta)}{\Delta r} = \\
&= \frac{\partial U}{\partial r} \\
(grad\, U)_\vartheta &= \left(\frac{dU}{ds}\right)_{\varphi=konš,r=konšt} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{U(r,\varphi,\vartheta+\Delta\vartheta) - U(r,\varphi,\vartheta)}{r\Delta\vartheta} = \\
&= \frac{1}{r}\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{U(r,\varphi+\Delta\varphi,\vartheta) - U(r,\varphi,\vartheta)}{\Delta\vartheta} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\vartheta} \\
grad\, U &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\overrightarrow{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\overrightarrow{e}_\vartheta
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Analogickým spôsobom by sme dosiahli nasledovné vzťahy:

cylindrická sústava

$$grad\, U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\overrightarrow{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{\partial U}{\partial z}\overrightarrow{e}_z \tag{8.25}$$

polárna sústava

$$grad\, U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\overrightarrow{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{e}_r \tag{8.26}$$

Zložky gradientu do jednotlivých smeroch sme mohli získať využitím vlastnosti skalárneho súčinu:

Ak $\vec{\nabla} U = \vec{\nabla}_r \vec{e}_r + \vec{\nabla}_\varphi \vec{e}_\varphi$ potom

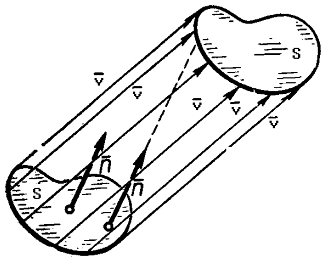
$$\begin{aligned}
\nabla_r U &= \vec{\nabla} U\cdot\vec{e}_r = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}\right)\cdot\left(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\varphi = \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\sin\varphi = \frac{\partial U}{\partial r}
\end{aligned}$$

Analogicky pre druhú zložku:

$$\nabla_\varphi = \vec{\nabla} U\cdot\vec{e}_\varphi = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}\right)\cdot\left(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}\right) = \ldots = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}$$

8.1.2 Divergencia vektorových polí

Divergencia patrí medzi základné pojmy teórie polí a jej geometrický význam si vysvetlíme pomocou hydrodynamickej analógie. Budeme vyšetrovať tok kvapaliny v potoku a každému bodu priradíme vektor jej rýchlosti $\vec{v}$.



obr. VIII.8

Do kvapaliny umiestnime infinitenzimálnu plochu dS s normálou $\overrightarrow{n}$.[5] Cez túto plochu za čas dt pretečie taký objem kvapaliny dV, ktorý sa rovná objemu šikmého valca s rovnobežnými podstavami[6]:

$$\begin{aligned} dV &= dSvdt\cos\varphi \\ \frac{dV}{dt} &= d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} \end{aligned} \tag{8.27}$$

Ak je uhol φ[7] je ostrý, hodnoty dV sú kladné a kvapalina vteká cez plochu do valca, ak je uhol φ tupý, hodnoty sú záporné a kvapalina vyteká cez plochu. Pri komplikovanejších a väčších plochách Σ, na ktorých vektor $\overrightarrow{v}$ nie je konštantný, celkové množstvo pretečenej kvapaliny za jednotku času dostaneme integrovaním:

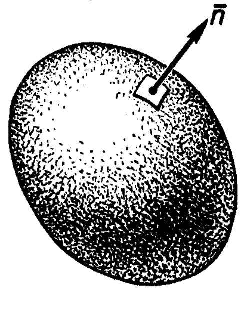
$$\frac{dV}{dt} = \iint_{\Sigma} d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} \tag{8.28}$$

Veličinu (8.28) nazveme tokom vektora $\overrightarrow{v}$ cez plochu Σ. Predpokladajme, že v potoku sa nachádza bod P_0, ktorý obklopíme uzavretou plochou σ. Elementárne vektory $d\vec{S}$ orientujme v smere vonkajších normál.

[5] V ďalšom texte budeme pracovať s vektorom plochy $d\vec{S}$, ktorého veľkosť je rovný danej ploche a je orientovaný v smere normály $\vec{n}$

[6] Valec má výšku $vdt\cos\varphi$, pričom φ je uhol medzi vektorom rýchlosti $\overrightarrow{v}$ a normálou $\overrightarrow{n}$ na plochu dS

[7] φ je uhol medzi normálou na plochu a vektorom rýchlosti $\vec{v}$.



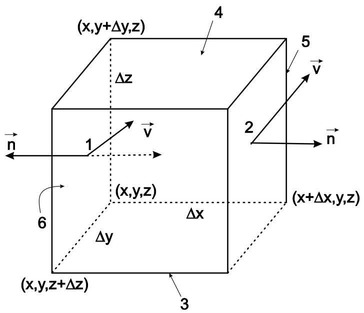
obr. VIII.9

Ak do objemu V_Σ ohraničeného plochou Σ vtečie za jednotku času rovnaké množstvo kvapaliny ako z nej vytečie, potom tok bude nulový. Ak sa však v uzavretom objeme nachádza zdroj kvapaliny (napr. prameň, topiaca sa ľadová kryha) potom cez plochu pretečie za jednotku času viac kvapaliny ako pritečie a tok bude kladný. Z uvedeného vyplýva, že tok poľa cez limitný objem V_Σ by mohol v teórii polí reprezentovať užitočnú veličinu, ktorá by poskytovala informáciu, či v danom bode je zdroj (žriedlo) kvapaliny alebo nie je[8]. Zaveďme takúto veličinu a nazvime ju divergencia:

$$div\,\overrightarrow{v} = \lim_{V_\Sigma\to 0}\frac{1}{V_\Sigma}\oint_{\Sigma} d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} \tag{8.29}$$

Polia, pre ktoré $div\,\overrightarrow{v} > 0$, sa nazývajú žriedlové, polia s $div\,\overrightarrow{v} < 0$ sú norové a pre $div\,\overrightarrow{v} = 0$ sú bezžriedlové. Definícia divergencie je síce názorná, ale neumožňuje priamy výpočet. Počítanie takejto limity je nepraktické a preto sa pokúsime nájsť jednoduchší spôsob. Pri limitnom zmenšovaní objemu V sa postupne stráca rozdiel medzi rôznymi počiatočnými tvarmi objemových útvarov V. Zoberme preto špeciálny prípad infinitenzimálnej kvádra podľa obrázka VIII.10 a vypočítajme tok cez jej povrch.

[8] Limitným zmenšovaním objemu V_Σ sa dostaneme k bodu P_0



obr. VIII.10

Dostaneme ho spočítaním tokov cez každú zo šiestich stien. najprv uvažujme o protiľahlých stenách 1 a 2[9] :

$$N_{1,2} = \iint_2 d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} + \iint_1 d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} \tag{8.30}$$

$$= \left[v_x\left(x+\Delta x, y+\frac{\Delta y}{2}, z+\frac{\Delta z}{2}\right) - v_x\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z+\frac{\Delta z}{2}\right)\right]\cdot \cdot\Delta y\Delta z \tag{8.31}$$

Predelením rovnice Δx a vykonaním limitného prechodu $\Delta x \to 0$, výraz v hranatej zátvorke zodpovedá parciálnej derivácii:

$$\iint_{1,2} d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z \tag{8.32}$$

Zopakovaním postupu pre ostatné páry stien pre celkový tok dostaneme výraz[10]:

$$\oint_{kváder} d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z \tag{8.33}$$

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_{kváder} d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] \tag{8.34}$$

Porovnaním (8.34) s definíciou divergencie (8.29) je zrejmé, že pre zavedenú veličinu-divergenciu platí:

$$div\,\overrightarrow{v} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v} \tag{8.35}$$

[9]Pretože uvažujeme o malom kvádre, môžeme hodnoty vektorov na stenách aproximovať hodnotami v strede kocky. Pre prvú stenu platí: $\overrightarrow{v} = [v_x(1), v_y(1), v_z(1)]$, $d\overrightarrow{S} = (-\Delta y\Delta z, 0, 0)$, pre druhú stenu: $\overrightarrow{v} = [v_x(2), v_y(2), v_z(2)]$, $d\overrightarrow{S} = (\Delta y\Delta z, 0, 0)$. Vektory plochy sú orientované von z objemu.

[10]Objem kvádra $\Delta x\Delta y\Delta z = dV$

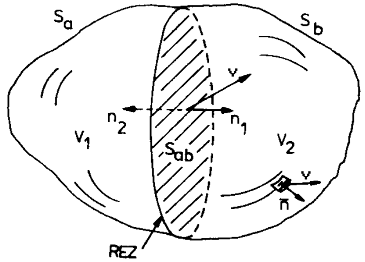
$\boxed{\text{Príklad 9}}$ Rýchlosť kvapaliny v rieke sa mení podľa rovnice $\vec{v} = (3x^2, 2x+y, z)$. Ak dosadíte súradnice x, y, z v metroch, rýchlosť výjde v $m\,s^{-1}$. Nájdite také miesto v potoku, v ktorom nie je žriedlo kvapaliny

Riešenie: Kvapalina nemá žriedlo v tých miestach, pre ktoré $div\,\vec{v} = 0$:

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right] = 6x+2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}m$$

Majme uzavretú plochu S, ktorá ohraničuje objem V. Rozdeľme objem V ľubovoľným rezom na dve časti.



obr. VIII.11

Dostaneme tak dve uzavreté plochy a dva objemy. Objem $V_1(V_2)$ ohraničuje plocha $S_1(S_2)$, ktorá pozostáva z časti pôvodnej plochy $S_a(S_b)$ a z plochy rezu $S_{ab}(S_{ba})$. Sčítaním tokov cez parciálne plochy S_1 a S_2 zistíme, že tok cez pôvodnú plochu S[11] je rovný sume tokov cez plochy parciálne:

$$\iint_{S_a} d\overrightarrow{S}_1\cdot\overrightarrow{v} + \iint_{Sab} d\overrightarrow{S}_1\cdot\overrightarrow{v} + \iint_{S_b} d\overrightarrow{S}_2\cdot\overrightarrow{v} + \iint_{S_{ba}} d\overrightarrow{S}_2 \tag{8.36}$$

$$= \oint_S d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} \tag{8.37}$$

Ľubovoľný útvar sa dá vytvoriť naskladaním parciálnych uzavretých plôch v tvare infinitenzimálnych kociek:

$$\oint_S d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} = \sum_i \oint_{kocka} d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} = \sum_i div\,\overrightarrow{v}\,dV_i = \iiint div\,\overrightarrow{v}\,dV$$

$$\oint_S d\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v} = \iiint div\,\overrightarrow{v}\,dV \tag{8.38}$$

$\diamondsuit$

Rovnica (8.38) sa nazýva **Gaussova veta**.

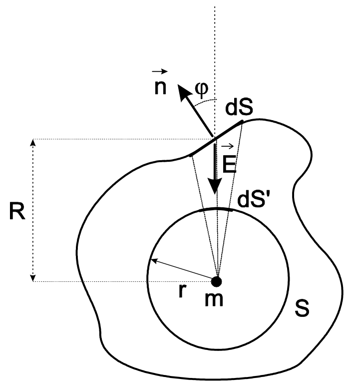
[11]Všimnite si, že v oblasti rezu $d\overrightarrow{S}_1 = -d\overrightarrow{S}_2$ a preto $\iint_{Sab} d\overrightarrow{S}_1\cdot\overrightarrow{v} = -\iint_{Sab} d\overrightarrow{S}_2\cdot\overrightarrow{v}$. Pripomíname, že plošné elementy pri uzavretých plochách sú orientované von z telesa

Gaussov zákon. Skúmajme tok intenzity gravitačného poľa uzavretou plochou S.

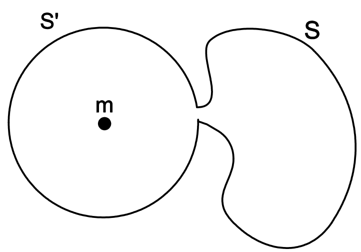
i) Umiestnime do stredu guľovej plochy s polomerom r hmotný bod s hmotnosťou m a vypočítajme tok[12]:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \varkappa \frac{m}{r^2} dS = \varkappa \frac{m}{r^2} \oint_S dS = -\varkappa 4\pi m \tag{8.39}$$

ii) Ak plocha má všeobecný tvar S, potom obklopíme hmotný bod guľovou plochou S' s takým polomerom, aby celá bola vo vnútri objemu (obr. VIII.12a). Spojme čiarami hmotný bod s okrajmi infinitenzimálnej plochy dS. Vzniknutý kužeľ vytne na guľovej ploche S' element dS'. Tok plochou dS je $d\Phi = \vec{E}(R) \cdot d\vec{S} = E(R)\, dS \cos\varphi$, tok cez plochu dS' bude $d\Phi' = E(r)\, dS'$, pritom $\frac{E(r)}{E(R)} = \frac{R^2}{r^2}$ a $\frac{dS'}{dS} = \frac{r^2\cos\varphi}{R^2}$. Vzájomným porovnaním vyplynie: $d\Phi = d\Phi'$ a preto celkové toky cez obe plochy sú rovnaké: $\Phi = \varkappa 4\pi m$



obr. VIII.12a



obr. VIII.12b

iii) Výsledok nemožno ešte automaticky použiť pre prípad, keď hmotný bod je umiestnený mimo plochy S. Použijeme pomocnú guľovú plochu S' s takým polomerom, aby sa obe plochy takmer dotýkali (obr. VIII.12b). Podľa predchádzajúcich analýz tok plochou $S+S'$ ako aj dielčou plochou S' bude rovný $\Phi = \varkappa 4\pi m$, tok spojovacou časťou možno zanedbať. Tok plochou S je teda nulový.

iv) Zovšeobecníme tieto výsledky pre ľubovoľné rozmiestnenie a počty hmotných bodov. Výsledná intenzita na ploche S bude určená superpozíciou

[12] $\vec{E}$ je vektor intenzity a smeruje do stredu zeme: $\vec{E}.\uparrow\downarrow d\vec{S}$

intenzít od jednotlivých hmotných bodov:

$$\Phi = \oint_S \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots \vec{E}_N\right) \cdot d\vec{S} = -\varkappa 4\pi \sum m_i \tag{8.40}$$

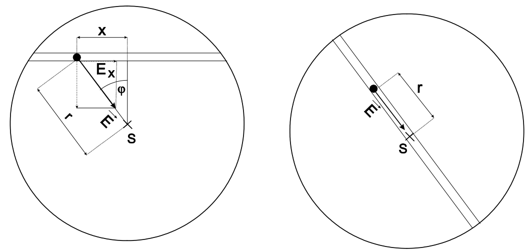
Tok teda závisí iba od celkovej hmotnosti pod integračnou plochou.

$\boxed{\text{Príklad 10}}$ Vypočítajte intenzitu gravitačného poľa vo vnútri Zeme. Predpokladajte, že jej hustota je konštantná. Do Zeme sme vyvŕtali dva tunely, jeden "vodorovný" a druhý prechádzajúci cez jej stred (obr. VIII.13). Pustili sme do nich telesá, ktoré začali vykonávať harmonický pohyb. Porovnajte ich periódy.

Riešenie: Pole je sféricky symetrické, preto množina bodov s rovnakou hodnotou intenzity bude mať tvar gúľových plôch. Vypočítajme tok cez takéto plochy a použime Gaussov zákon:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint_{guľa} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\varkappa 4\pi\rho \frac{4}{3}\pi r^3 \\
E 4\pi r^2 &= \varkappa 4\pi\rho \frac{4}{3}\pi r^3 \\
E &= \frac{4}{3}\varkappa\pi\rho r
\end{aligned}$$

Intenzita gravitačného poľa vo vnútri Zeme sa mení so vzdialenosťou od jej stredu lineárne. Napíšme pohybovú rovnicu v smere osi x, najskôr pre guličku, ktorá sa nachádza vo "vodorovnom" tuneli:



obr. VIII.13

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -m\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho r \sin\varphi = -m\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho r \frac{x}{r} \\
\ddot{x} &= -\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho x
\end{aligned}$$

čo zodpovedá harmonickému pohybu s uhlovou frekvenciou $\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho}$ a periódou:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho}}$$

Ak tunel bude prechádzať cez stred zeme, potom pohybová rovnica:

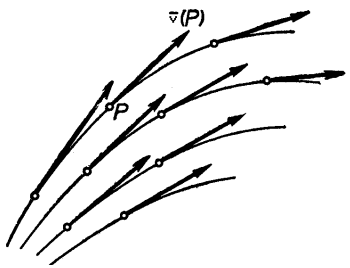
$$m\ddot{r} = -m\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho r$$

a pohyb bude opäť harmonický, s rovnakou periódou:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\varkappa\pi\rho}}$$

Perióda, ktorou teleso kmitá v tuneli, nezávisí od spôsobu jeho vyvŕtania. $\diamondsuit$

Podobne ako skalárne polia sme zobrazovali ekviskalárnymi plochami, grafické zobrazenie vektorových polí sa uskutočňuje pomocou tzv. čiar vektora (obr. VIII.14) .



obr. VIII.14

Vektor $\overrightarrow{v}$ má v každom bode vektorovej čiary smer dotyčnice, ktorá je súhlasne orientovaná s orientáciou vektora[13]. Je preto zrejmé, že pre rovnicu čiary platí[14]:

$$d\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \qquad (8.41)$$

[13] Vo fyzike ste sa s nimi už stretli vo forme siločiar, magnetických indukčných čiar, prúdočiar a pod.

[14] Vektory $\overrightarrow{dr} \parallel \overrightarrow{v}$, kde $d\overrightarrow{r}$ je súčasťou čiary

Z čoho vyplýva:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \qquad (8.42)$$

$\boxed{\text{Príklad 11}}$ Nájdite tvar siločiary v elektrostatickom poli bodového náboja

Riešenie: Podľa (8.42) [15] $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$. Riešením týchto diferenciálnych rovníc sú priamky prechádzajúce začiatkom.. $\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 12}}$ Odvoďte vzťah (8.42) na základe hydronynamickej analógie.

Riešenie: Vektorová čiara má v každom bode smer vektora rýchlostí: $\frac{dx}{dt} = v_x$, $\frac{dy}{dt} = v_y$, $\frac{dz}{dt} = v_z$.. Porovnaním dt dostaneme požadovanú rovnicu:

$$dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

$\diamondsuit$

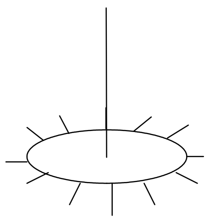
8.1.3 Rotácia vektorových polí

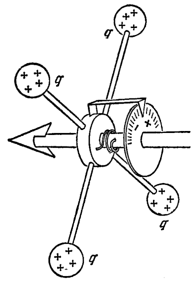
Cirkulácia vektora Pod cirkuláciou vektorového poľa $\vec{v}$ budeme rozumieť integrál po uzavretej krivke Γ

$$L = \oint_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{l} \qquad (8.43)$$

Vektorový diferenciálny element $d\vec{l}$ má smer dotyčnice ku krivke. Jeho orientácia je daná dohodou o zmysle obchádzania krivky, napr. proti smeru hodinových ručičiek. Cirkulácia bude tým väčšia, čím sa orientácia vektora $\vec{v}$ bude viac blížiť k dotyčnici $d\vec{l}$. Na lepšie pochopenie fyzikálneho zmyslu cirkulácii využijeme opäť hydrodynamickú analógiu. Predstavme si, že integračnou krivkou je kružnica. Nech táto kružnica reprezentuje obvod kolesa (obr. VIII.15a), kroré má po obvode pripevnené lopatky a môže sa otáčať okolo svojej osi. (na meranie cirkulácie vektora intenzity elektrického poľa, by sme namiesto lopatiek použili malé nabité gule, obr. VIII.15b)

[15] Vektor intenzity elektrického poľa $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\overrightarrow{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x, y, z)$



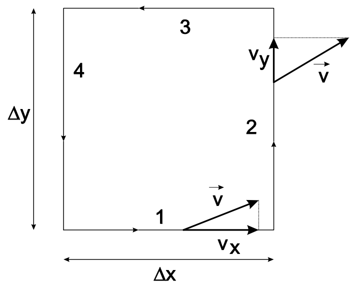


obr. VIII.15a obr. VIII.15b

Koleso sa po vložení do kvapaliny bude otáčať tým rýchlejšie, čím bude cirkulácia L väčšia. Ak vektor rýchlosti kvapaliny je ľubovoľnom mieste konštantný, koleso sa neroztočí. Ak v kvapaline existuje vír, koleso sa môže otáčať s rôznou uhlovou rýchlosťou, v závisloti od natočenia jeho osi k osi víru. Na skúmanie prítomnosti víru v danom bode kvapaliny zavedieme veličinu-rotáciu :

$$rot\,\vec{v}\cdot\vec{n} = \lim_{\Gamma\to P_0}\frac{\oint_\Gamma \vec{v}d\vec{l}}{S_\Gamma} \tag{8.44}$$

kde P_0 je bod, okolo ktorého budeme uzatvárať krivku Γ. Polia, pre ktoré nadobudne $rot\,\vec{v}$ nenulovú hodnotu, nazveme *vírovými*, ostatné *nevírovými*. Počítať takéto limity je zdĺhavé a nepraktické, preto sa pokúsme určiť ju iným spôsobom. Zoberme elementárnu plôšku v tvare obdĺžnika so stranami Δx, Δy rovnobežnými s príslušnými kartézskymi osami (obr. VIII.16).



obr. VIII.16

Vektor $\vec{v}$ sa pozdĺž strán takmer nemení a preto ho možno reprezentovať hodnotou a smerom v ich strede. Príspevky k cirkulácii pozdĺž dvojice rovnobežných strán najskôr pravej a ľavej potom hornej a dolnej budú::

$$\left[v_y\left(x+\Delta x, y+\frac{\Delta y}{2}\right) - v_y\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta y = \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x\Delta y \tag{8.45}$$

$$\left[-v_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y+\Delta y\right) + v_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y\right)\right]\Delta x = -\frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta x\Delta y \tag{8.46}$$

a po ich sčítaní:

$$\oint_\Box \vec{v}\cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y \tag{8.47}$$

V zátvorke sa nachádza $z-$ová zložka vektora $\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)_z$, pričom súčin $\Delta x\,\Delta y = dS$. Zavedením jednotkového normálového vektora $\vec{n}$ na túto plochu, vzťah (8.47) zapíšeme v invariantnom vektorovom tvare[16]:

$$\oint_\Box \vec{v}d\vec{l} = \left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)_z dS = \left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{n}dS \tag{8.48}$$

$$\lim_{\Gamma\to P_0}\frac{\oint_\Gamma \vec{v}d\vec{l}}{S_\Gamma} = \left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{n} \tag{8.49}$$

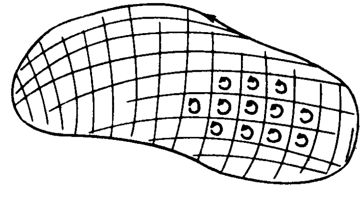
Vzájomným porovnaním (8.48) a (8.44) pre rotáciu platí::

$$rot\,\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{v} \tag{8.50}$$

Posledný vzťah rozpíšme:

$$\begin{aligned} rot\,\vec{v} &= \vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}\left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right] - \vec{j}\left[\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right] \end{aligned}$$

Cirkuláciu po akejkoľvek uzavretej krivke možno uviesť do súvislosti s rotáciou vektorového poľa. Vnútro krivky vyplníme vhodnou plochou a celú ju pokryjeme infinitenzimálnymi obdĺžnikmi (obr. VIII.17).



obr. VIII.17

[16] V našom prípade $\vec{n} = \vec{k}$, kde $\vec{k}$ je bázový vektor v smere súradnice z.

Pri sčitovaní cirkulácií pozdĺž obvodov malých obdĺžnikov sa rušia príspevky na spoločných hraniciach (integrujeme dvakrát v opačných smeroch)[17]:

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{l} = \sum \oint_{\square} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{l} = \sum rot\,\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S}_i = \iint_{S_\Gamma} rot\,\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S} \qquad (8.51)$$

Vzťah (8.51) sa nazýva *Stokesova veta*, ktorá umožňuje prevádzať krivkový integrál pozdĺž Γ na plošný integrál cez plochu, ohraničenú krivkou Γ. Takýchto plôch existuje nekonečne veľa.

Využitie Stokesovej vety: *1, Výpočet obsahov plôch.*
Predpokladajme, že máme vypočítať obsah plochy, ktorá je ohraničená uzavretou krivkou Γ, pričom celá leží v rovine xy. Plošné elementy majú iba z-ovú zložku: $d\overrightarrow{S} = (0,0,dS) = (0,0,dxdy)$ a podľa (8.51):

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{l} = \iint_{S_\Gamma} rot\,\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{S_\Gamma} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dxdy \qquad (8.52)$$

Pri vhodnej voľbe vektorovej funkcie $\overrightarrow{v}$, možno z integrantu na pravej strane rovnice (8.52) vytvoriť konštantu a celý integrál previesť na výpočet plochy. Nech $\overrightarrow{v} = (-y, x, 0)$, potom dosadením do (8.51):

$$\oint_{\Gamma} (-ydx + xdy) = 2 \iint_{S_\Gamma} dxdy \qquad (8.53)$$

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (-ydx + xdy) \qquad (8.54)$$

$\boxed{\text{Príklad 13}}$ Vypočítajte obsah plochy ohraničenej elipsou.

Riešenie: Elipsu parametrizujme podľa t:

$$x = a\cos t \qquad dx = -a \sin t\, dt \qquad (8.55)$$

$$y = b \sin t \qquad dy = b\cos t\, dt \qquad (8.56)$$

[17]Cirkulácia po Γ_1 /obr/ je súčtom integrálov po Γ_a a Γ_{ab}. Podobne ako cirkulácia po Γ_2. Integrál po Γ_{ab} bude mať v prípade krivky Γ_1 opačné znamienko ako v prípade Γ_2, pretože smer obehu bude opačný:

$$\int_{\Gamma_a} \overrightarrow{v} d\overrightarrow{l} + \int_{\Gamma_{ab}} \overrightarrow{v} d\overrightarrow{l} + \int_{\Gamma_{ba}} \overrightarrow{v} d\overrightarrow{l} + \int_{\Gamma_b} \overrightarrow{v} d\overrightarrow{l} = \oint_{\Gamma} \overrightarrow{v} d\overrightarrow{l}$$

Po dosadení do (8.54) dostávame:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(ab \sin^2 t + ab \cos^2 t \right) dt = \pi ab$$

$\diamondsuit$

2, testovanie konzervatívnosti vektorových polí
Pole je konzervatívne, keď práca po ľubovoľnej uzavretej krivke je nulová $\oint_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = 0$. Vyjadrením sily podľa rovnice (8.18) a aplikovaním Stokesovej vety:

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{l} = \oint_{\Gamma} rot\vec{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \oint_{S_\Gamma} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right) \cdot d\overrightarrow{S} = 0$$

Keďže uvedený integrál musí byť nulový po akejkoľvek ploche, ktorej kontúrom je Γ potom nutnou a postačujúcou podmienkou konzervatívnych polí je:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = rot\vec{F} \equiv \vec{0} \qquad (8.57)$$

$\boxed{\text{Príklad 14}}$ Dokážte, že každé sféricky-symetrické centrálne pole je konzervatívne.

Riešenie: Sféricky symetrické centrálne polia sa vyznačujú tým, že sila má rovnaký smer ako polohový vektor a teda platí:

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{r}$$

kde $f(r)$ je funkcia závislá od veľkosti polohového vektora. Keďže

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(r)\,x & f(r)\,y & f(r)\,z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{y}{r} z - \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{z}{r} y \right) + \vec{j}0 + \vec{k}0 = \vec{0} \qquad (8.58)$$

pole je konzervatívne. $\diamondsuit$

$\boxed{\text{Príklad 15}}$ Pomocou Gaussovej a Stokesovej vety dokážte tieto identity: $rot\,grad\,U \equiv \vec{0}$, $div\,rot\,\overrightarrow{F} = 0$

Riešenie: Každé konzervatívnemu poľu dokážeme priradiť potenciálnu energiu U, pričom $\vec{F} = -grad\, U$. Dosadením do (8.57) dostávame prvú identitu:

$$rot\vec{F} = -rot\, grad\, U \equiv \vec{0}$$

Druhú identitu dokážeme zo Stokesovej vety.

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\,\overrightarrow{l} = \int_{S_\Gamma} rot\,\overrightarrow{F} \cdot d\,\overrightarrow{S}$$

Krivka Γ sa postupným uzatváraním scvrkne na bod a plocha S_Γ sa stane uzavretou. Krivkový integrál po Γsa blíži k nule. Podľa Gausovej vety ďalej platí:

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\,\overrightarrow{l} = \int_{S_\Gamma} rot\,\overrightarrow{F} \cdot d\,\overrightarrow{S} = \int_{V_S} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \overrightarrow{F}\right) dV = 0$$

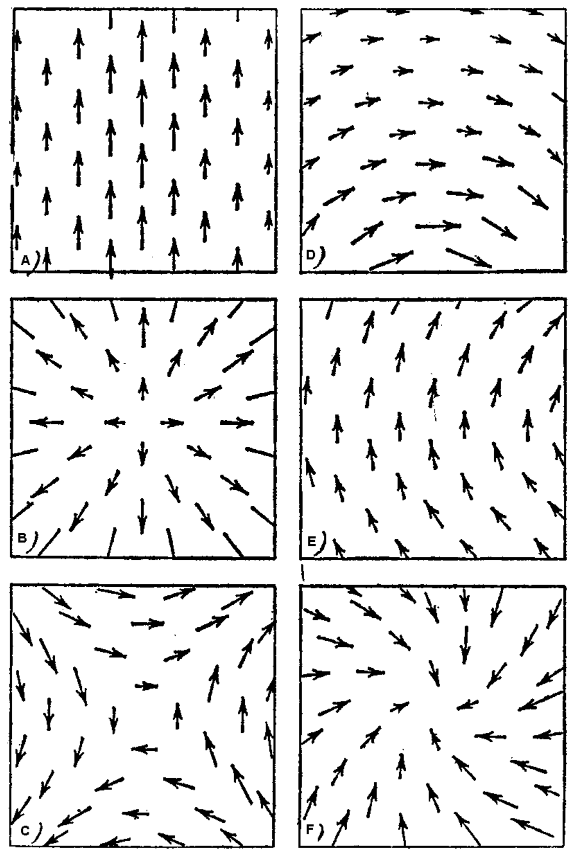
Rovnosť je splnená pre akýkoľvek objem, ktorý prechádza bodom a preto:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \overrightarrow{F}\right) = 0 \qquad (8.59)$$

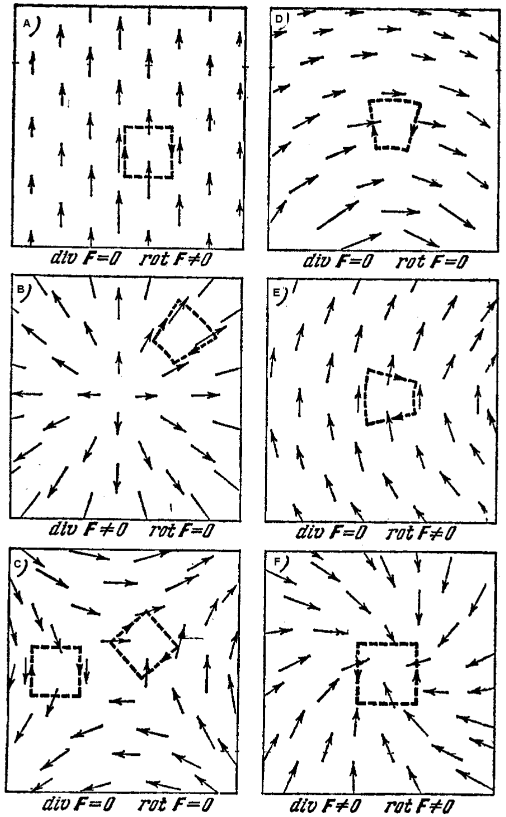
teda $div\, rot\,\overrightarrow{F} = 0$. ♢

$\boxed{\text{Príklad 16}}$ Divergencia štyroch zo znázornených vektorových polí na obr. 8.1 je rovná nule. Pokúste sa určiť charakteristiky poľa $\vec{F}$: $rot\,\vec{F}$ a $div\,\vec{F}$

Riešenie: Riešenie je znázornené na obr. 8.2. **a,** Ak sa pohybujeme v smere vektora $\vec{F}$, vektor zostáva konštantný $\frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = \vec{0}$, $F_x = 0 \Longrightarrow div\,\vec{F} = 0$. Ak určíme cirkuláciu napr. pozdĺž slučky znázornenej na obrázku zistíme, že $rot\,\vec{F} \neq \vec{0}$. **b,** Ide o centrálne pole, vektor $\vec{F}$ je radiálny a jeho veľkosť závisí len od vzdialenosti r. Podľa (8.58) $rot\,\vec{F} = \vec{0}$. Jeho divergencia nemôže byť nulová, pretože v strede obrázka sa nachádza zdroj. **c,** Z obrázku sa nedá jednoznačne určiť charakter poľa, ale je možné, že $rot\,\vec{F} = \vec{0}$ a $div\,\vec{F} = 0$. **d,** Nevidno žiadne žriedlo poľa $\Longrightarrow$ $div\,\vec{F} = 0$. Ide zrejme o pole, ktorého veľkosť vektora $\vec{F}$ klesá so vzdialenosťou $F \sim \frac{1}{r} \Rightarrow rot\,\vec{F} = \vec{0}$. **e,** nevidno žiadne žriedlo $\Longrightarrow div\,\vec{F} = 0$, je však očividné že cirkulácia vektora $\vec{F}$ cez znázornenú slučku je nenulová $\Rightarrow rot\,\vec{F} \neq \vec{0}$. **f,** v strede je žriedlo $\Longrightarrow div\,\vec{F} \neq 0$, na prvý pohľad je zrejmé že $rot\,\vec{F} \neq \vec{0}$ (všimnime si cirkuláciu cez vyznačenú slučku). ♢



Obrázok 8.1:



Obrázok 8.2:

8.1.4 Divergencie a rotácie v sférických a cylindrických sústavách.

Vo fyzike sa častokrát potrebujem vyjadriť divergencie a rotácie vektorových polí v iných súradnicových systémoch ako sú kartézske. Vyjadrime preto nabla operátor $\vec{\nabla}$ a vektor $\vec{a}$ v cylindrickom súradnicovom systéme (8.25):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\\ \vec{a} &= a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z\end{aligned}$$

Dosadením do (8.35) odvodíme vzťah vzťah pre divergenciu:

$$\begin{aligned}div\vec{a} &= \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z) =\\ &\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r) + \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_\varphi\vec{e}_\varphi) + \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_z\vec{e}_z) +\\ &+\left(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r) + \left(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot(a_\varphi\vec{e}_\varphi) + \left(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot(a_z\vec{e}_z) +\\ &+\left(\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r) + \left(\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_\varphi\vec{e}_\varphi) + \left(\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_z\vec{e}_z) \qquad (8.60)\end{aligned}$$

Prehľad parciálnych derivácii bázových vektorov:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}\\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}\\ \vec{e}_z &= \vec{k}\end{aligned}$$

je uvedený v nasledovnej tabuľke:

	$\vec{e}_r$	$\vec{e}_\varphi$	$\vec{e}_z$
$\frac{\partial}{\partial r}$	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial\varphi}$	$\vec{e}_\varphi$	$-\vec{e}_r$	0
$\frac{\partial}{\partial z}$	0	0	0

Pomocou nej vypočítame jednotlivé členy rovnice (8.60)[18]:

	$a_r\vec{e}_r$	$a_\varphi\vec{e}_\varphi$	$a_z\vec{e}_z$
$\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}$	$\frac{\partial a_r}{\partial r}$	0	0
$\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$	$\frac{a_r}{r}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$	0
$\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$	0	0	$\frac{\partial a_z}{\partial z}$

[18]Napr. $\left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r) = \vec{e}_r\cdot\frac{\partial}{\partial r}(a_r\vec{e}_r) = \left(\frac{\partial}{\partial r}a_r\right)[\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r] + a_r\left[\vec{e}_r\cdot\left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r\right)\right] = \frac{\partial a_r}{\partial r}$

z čoho pre divergenciu vektora $\vec{a}$ v cylindrických súradniciach dostaneme:

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_r) + \frac{1}{r}\frac{a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

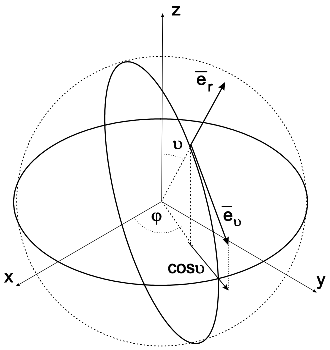
Analogicky postupujeme aj v sférickom súradnicovom systéme:

$$\begin{aligned} div\vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2}{r}a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}a_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 a_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta a_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned} \tag{8.61}$$

Skalárne vynásobime $\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ s vektorom $\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\vartheta\vec{e}_\vartheta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$:

$$\begin{aligned} div\vec{a} &= \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot a_r\vec{e}_r + a_\vartheta\vec{e}_\vartheta + a_\varphi\vec{e}_\varphi = \\ &= \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r) + \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_\vartheta\vec{e}_\vartheta) + \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot(a_\varphi\vec{e}_\varphi) + \\ &\quad + \left(\vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r) + \left(\vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)\cdot(a_\vartheta\vec{e}_\vartheta) + \left(\vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right)\cdot(a_\varphi\vec{e}_\varphi) \\ &\quad + \left(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot(a_r\vec{e}_r) + \left(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot(a_\vartheta\vec{e}_\vartheta) + \\ &\quad + \left(\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\cdot(a_\varphi\vec{e}_\varphi) \end{aligned} \tag{8.62}$$

Z obrázka VIII.18 sme vyjadrili bázové vektory:



obr. VIII.18

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\vartheta\cos\varphi\vec{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\vec{j} + \cos\vartheta\vec{k} \\ \vec{e}_\vartheta &= \cos\vartheta\cos\varphi\vec{i} + \cos\vartheta\sin\varphi\vec{j} - \sin\vartheta\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi &= \sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \end{aligned}$$

ktoré parciálne zderivujeme:

$$\begin{array}{cccc} & \vec{e}_r & \vec{e}_\vartheta & \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial_\vartheta} & \vec{e}_\vartheta & \text{-}\vec{e}_r & 0 \\ \frac{\partial}{\partial_\varphi} & \sin\vartheta\vec{e}_\varphi & -\cos\vartheta\vec{e}_\varphi & -\sin\vartheta\vec{e}_r - \cos\vartheta\vec{e}_\varphi \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & a_r\vec{e}_r & a_\varphi\vec{e}_\varphi & a_z\vec{e}_z \\ \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial a_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{a_r}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial a_\vartheta}{\partial \frac{a_r}{r}} & 0 \\ \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{a_r}{r} & \frac{\cos\vartheta}{r\sin\frac{a_r}{r}}a_\vartheta & \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \end{array}$$

a dosadili.

Po nahradení skalárneho súčinu v (8.35) vypočítame rotáciu. V cylindrickej súradnicovej sústave zrejme platí:

$$\begin{aligned} rot\vec{a} &= \left(\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z) = \\ &= \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}\times(a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z) + \\ &\quad + \vec{e}_\varphi\times\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z) \\ &\quad + \vec{e}_z\times\frac{\partial}{\partial z}(a_r\vec{e}_r + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z) \end{aligned}$$

Využitím vlastností vektorového súčinu a horeuvedených prehľadných tabuliek:

$$rot\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}a_\varphi\right)\vec{e}_z$$

Podobne vo sférických súradniciach[19] pre rotáciu platí:

$$\begin{aligned} rot\vec{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{a_\varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}a_\varphi\right)\vec{e}_r + \\ &\quad + \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}a_\varphi\right)\vec{e}_\vartheta + \\ &\quad + \left(\frac{\partial a_\vartheta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r}a_\vartheta\right)\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

[19]Doporučujeme čitateľovi toto tvrdenie dokázať.

8.2 Cvičenia

$\boxed{8.1.^*}$ Určte divergenciu a rotáciu nasledovných vektorových polí. Ak je pole konzervatívne, nájdite jeho potenciál: $\vec{F} = (x+y, -x+y, -2z)$, $\vec{E} = (2y, 2x+3z, 3y)$.

Riešenie: 0; $\vec{0}$, $U = -2xy - 3zy - konšt$

$\boxed{8.2.}$ Majme silové polia s nasledovnými potenciálmi: r, $\frac{1}{r^3}$, $\vec{c}\cdot\vec{r}$, $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^2}$, $\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}$, kde $\vec{c}$ je konštantný vektor. Nájdite sily, ktoré v nich pôsobia!

Riešenie: $-\frac{\vec{r}}{r}$, $-\frac{3r}{r^5}$, $-\vec{c}$, $-\frac{r^2\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{r})2r}{r^4}$, $-\frac{r^2\vec{c}-3(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}$

$\boxed{8.3.}$ Určte divergenciu nasledovných polí: $\vec{r}$, $\frac{\vec{r}}{r^3}$, $\frac{\vec{c}}{r}$

Riešenie: $3, 0, -\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r^3}$

$\boxed{8.4.^*}$ Potenciálna energia častice má tvar $U = \frac{\alpha}{r}; \frac{1}{2}kr^2$, kde r je veľkosť polohového vektora. Nájdite silu, ktorá pôsobí na časticu a vypočítajte prácu, ktorú vykoná pri premiestnení telesa z bodu $(1,2,3)$ do bodu $(2,2,3)$.

Riešenie: a, $\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, $A = 0.82\alpha$ b, $\vec{F} = -k\vec{r}$, $A = -1.5k$

$\boxed{8.5.^*}$ Teleso sa kĺze z výšky h z podložky tvaru $y = \sqrt{x}$. V ktorom bode sa odtrhne od podložky?