Kapitola 6

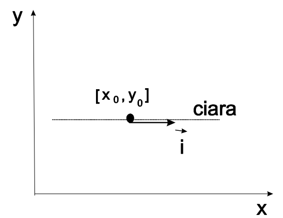
Súradnicové systémy

V mnohých fyzikálnych situáciach nie je vhodné charakterizovať polohu v kartézskych súradniciach. Ide predovšetkým o prípady, ktoré vykazujú osovú alebo stredovú súmernosť. Skôr ako si uvedieme a podrobne popíšeme rôzne typy sústav, zamyslime sa nad spôsobom konštrukcie *bázových vektorov, objemových, dĺžkových elementov* v kartézskej súradnicovej sústave, ktorá je nám dôverne známa. Získané poznatky využijeme pri hľadaní týchto základných charakteristík aj v iných sústavách.

Bázové vektory. Bázové vektory sú vždy viazané ku konkrétnej súradnici. $x - ovej$ súradnici zodpovedá bázový vektor $\vec{e}_x = \vec{i}$, $y - ovej$ $\vec{e}_y = \vec{j}$ a $z - ovej$ $\vec{e}_z = \vec{k}$. Ak chceme napr. v bode (x_0, y_0, z_0) nájsť smer bázového vektora $\vec{e}_x = \vec{i}$, zostrojíme čiaru, ktorá vznikne fixovaním všetkých súradníc okrem $x - ovej$:

$$x \neq konšt, y = y_0, z = z_0$$

a skonštruujeme k nej dotyčnicu (obr. VI.1).



obr. VI.1

Bázový vektor orientujeme v smere nárastu veličiny x. Rovnakým spôsobom nájdeme aj ostatné vektory $\vec{e}_y$,$\vec{e}_z$.

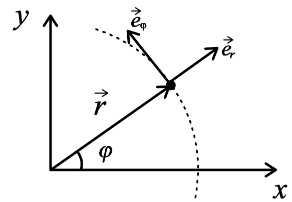
Plošné a objemové elementy. Veľkosť plošného alebo objemového elementu určíme tak, že infinitenzimálne zmeníme všetky súradnice

$$x \to x + dx, \quad y \to y + dy, \quad z \to z + dz \tag{6.1}$$

a vypočítame plochu, resp objem vzniknutého obrazca: $dS = dxdy$, $dV = dxdydz$. Podľa rovnakých algoritmov budeme konštruovať bázové vektory, plošné a objemové elementy aj v iných sústavách.

6.1 Polárna súradnicová sústava.

Poloha bodu v tejto sústave je daná veľkosťou polohového vektora r a polárnym uhlom φ. Vektory $\vec{e}_r$ a $\vec{e}_\varphi$ ležia v rovine určenej osami x a y.



obr. VI.2

Z obr. VI.2 ľahko odvodíme vzťah medzi kartézkymi a polárnymi súradnicami:

$$x = r\cos\varphi \tag{6.2}$$
$$y = r\sin\varphi \tag{6.3}$$

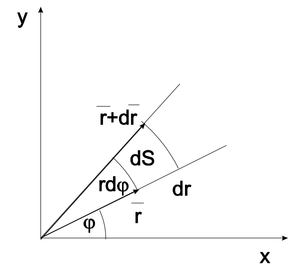
Bázové vektory. Bázový vektor $\vec{e}_r$ ($\vec{e}_\varphi$) zostrojíme pomocou dotyčnice k čiare $r \neq konšt, \varphi = konšt$ resp.$r = konšt, \varphi \neq konšt.$:

$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \tag{6.4}$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \tag{6.5}$$

Zderivovaním báz podľa času:

$$\dot{\vec{e}}_r = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{i} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{j} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \tag{6.6}$$
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{i} - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{j} = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r \tag{6.7}$$

Všimnime si, že vektory $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ tvoria *ortonormovanú* bázu - sú jednotkové (normované), a sú navzájom kolmé (ortogonálne).



obr. VI.3

Veľkosť plošného elementu nájdeme infinitenzimálnym zväčšením parametrov $d\varphi$ a dr (obr. VI.3):

$$dS = rd\varphi dr$$

Zderivovaním polohového vektora $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$ a využitím rovníc (6.6),(6.7) odvodíme rýchlosť a zrýchlenie v nových bázach:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{e}_r + r\,\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{e}_r + r\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi \tag{6.8}$$

Z čoho pre jednotlivé súradnice vyplýva:

$$v_r = \frac{dr}{dt} \tag{6.9}$$

$$v_\varphi = \omega r = \frac{d\varphi}{dt}\,r \tag{6.10}$$

Analogicky ako pri rýchlosti

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\,\vec{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi\right) = \\
&= \frac{d^2r}{dt^2}\,\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\,\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi + r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\vec{e}_\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\,\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \\
&= \frac{d^2r}{dt^2}\,\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi + r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\vec{e}_\varphi - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\,\vec{e}_r = \\
&= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\,\vec{e}_r + \left[2\,\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\,\vec{e}_\varphi
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Z čoho pre jednotlivé súradnice vektora $\vec{a}$ v novej báze:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \tag{6.12}$$

$$a_\varphi = 2\,\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{6.13}$$

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ Dokážte, že pri centrálnych pohyboch polohový vektor $\vec{r}$ opíše za jednotku času rovnakú plochu.

Riešenie: Pri centrálnych pohyboch sila pôsobiaca na teleso je rovnobežná s polohovým vektorom a preto tangenciálna zložka výsledného zrýchlenia je nulová $\vec{a}_\varphi = \vec{0}$. Podľa rovnice (6.13) :

$$2\,\frac{dr}{dt}\omega + r\,\frac{d\omega}{dt} = 0 \tag{6.14}$$

$$2\frac{dr}{r} = -\frac{d\omega}{\omega} \tag{6.15}$$

$$r^2\omega = kon\check{s}t \tag{6.16}$$

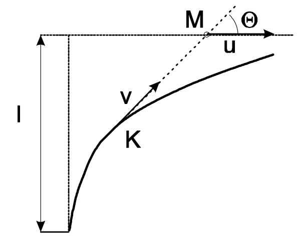
Veľkosť plochy, ktorú opíše vektor $\vec{r}$ za jednotku času vypočítame pomocou vektorového súčinu a rovnice (6.10):

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{|\vec{r}\times d\vec{r}|}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}\,|\vec{r}\times(\vec{v}_\varphi + \vec{v}_r)| = \\
&= \frac{1}{2}\,|\vec{r}\times\vec{v}_\varphi| = \frac{1}{2}r^2\omega
\end{aligned}$$

Využitím (6.16) zistíme, že plošna rýchlosť je konštantná. ♢

$\boxed{\text{Príklad 2}}$ Myš beží po priamke rýchlosťou u. Naháňa ju mačka rýchlosťou v. Za akú dobu ju dohoní, ak ich počiatočná vzdialenosť je l a na začiatku $\vec{v}\perp\vec{u}$. Do akej vzájomnej vzdialenosti sa priblížia, ak $u = v$?

Riešenie: Pohyb budeme vyšetrujme v polárnej súradnicovej sústave, ktorej počiatok stotožníme s polohou mačky podľa obr. VI.4



obr. VI.4

Myš sa vzhľadom na mačku pohybuje relatívnou rýchlosťou $\vec{w} = -\vec{v} + \vec{u}$, ktorú rozložíme podľa (6.9), (6.10) na dve zložky:

$$w_r = \frac{dr}{dt} = (-\vec{v} + \vec{u})\cdot\vec{e}_r = -v + u\cos\theta \tag{6.17}$$

$$w_\varphi = \frac{d\theta}{dt}\,r = (-\vec{v} + \vec{u})\cdot\vec{e}_\varphi = -u\sin\theta \tag{6.18}$$

Prvú rovnicu vynásobime $[v + u\cos\theta]$, pripočítame k nej druhú rovnicu umocnenú na druhú, v ktorej však výraz $u^2 \sin^2\theta$ nahradíme $u\sin\theta\left(-\dot{\theta}\, r\right)$:

$$\dot{r}\,(u\cos\theta + v) - r\dot{\theta}\,u\sin\theta = u^2 - v^2 \tag{6.19}$$

$$\frac{d}{dt}\left[r\,(u\cos\theta + v)\right] = u^2 - v^2 \tag{6.20}$$

Preintegrujme obe časti rovnice cez čas v hraniciach 0 a t a dosaďme počiatočné podmienky $r\,(0) = l$, $\theta\,(0) = \pi/2$:

$$r\,(u\cos\theta + v) - vl = \left(u^2 - v^2\right)t \tag{6.21}$$

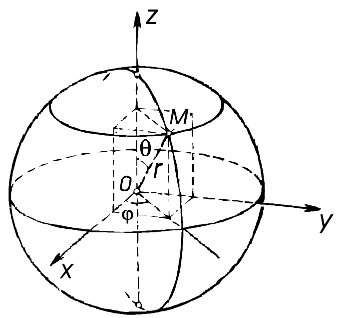
Mačka dobehne myš vtedy, keď $r = 0 \Longrightarrow t = -vl/\left(u^2 - v^2\right)$. V prípade, ak $v = u$ z rovnice (6.20) $r\,(u\cos\theta + v) = konšt = lv$ [1]mačka sa priblíži k myši na minimálnu vzdialenosť

$$r_{\min} = \frac{lv}{u+v} = \frac{l}{2}$$

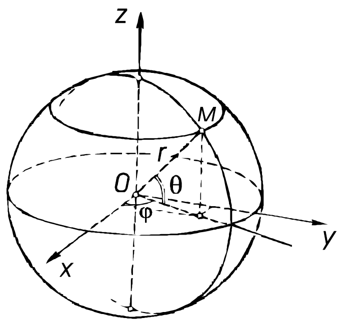
♢

6.2 Sférická súradnicová sústava

V sférickom súradnicovom systéme je poloha bodu zadaná polárnym uhlom φ, azimutálnym uhlom ϑ a veľkosťou polohového vektora $\vec{r}$. Vyskytujú sa dve možnosti ich definície - uhol ϑ sa určuje buď od zvislice alebo od rovníka (napr. pri zemepisnej šírke).



obr. VI.5a



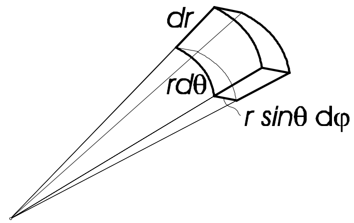
obr. VI.5b

[1]Veľkosť konštanty sme určili z počiatočných podmienok dosadením $\theta = \frac{\pi}{2}$

Je užitočné zvyknúť si na obe definície, i keď vo väčšine prípadov sa stretneme s prvou alternatívou, pre ktorú uvedieme aj príslušné vzťahy:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{6.22}$$

Infinitenzimálnou zmenou súradníc vytvoríme objemový element, ktorého veľkosť ľahko vypočítame (obr. VI.6).



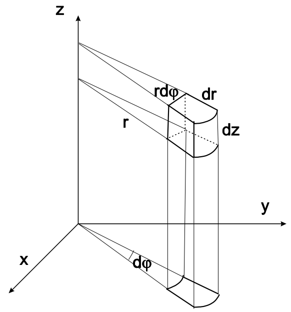
obr. VI.6

$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$. Pomocou geometrickej predstavy je možné určiť zložky rýchlosti. Predpokladajme, že za čas Δt sa teleso presunulo v priestore tak, že $\varphi \to \varphi + \Delta\varphi$, $\theta \to \theta + \Delta\theta$, $r \to r + \Delta r$. Z obrázku VI.6 vyplýva:

$$\begin{aligned} v_r &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \dot{r} \\ v_\varphi &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s_\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{r\sin\theta\Delta\varphi}{\Delta t} = r\sin\theta\,\dot{\varphi} \\ v\theta &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r\,\dot{\theta} \\ v &= \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\left(\dot{r}\right)^2 + \left(r\sin\theta\,\dot{\varphi}\right)^2 + \left(r\,\dot{\theta}\right)^2} \end{aligned}$$

6.3 Cylindrická súradnicová sústava

Cylindrická sústava vznikne doplnením polárnej sústavy r, φ o kartézsku súradnicu z (obr. VI.7)



obr. VI.7

Vzťah medzi cylindrickými a kartézskymi súradnicami je:

$$x = r\cos\varphi \tag{6.23}$$
$$y = r\sin\varphi \tag{6.24}$$
$$z = z \tag{6.25}$$

Podobným postupom ako pri analyzovaní sférickej sústavy by sme sa dopracovali k nasledovným užitočným vzťahom (obr. VI.7):

$$\begin{aligned}
v_r &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s_r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \dot{r}\\
v_\varphi &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s_\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\,\dot{\varphi}\\
v_z &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s_z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \dot{z}\\
v &= \sqrt{v_r^2+v_\varphi^2+v_\vartheta^2} = \sqrt{\left(\dot{r}\right)^2+\left(r\,\dot{\varphi}\right)^2+\left(\dot{z}\right)^2}\\
dV &= rd\varphi drdz
\end{aligned}$$

6.4 Cvičenia

$\boxed{6.1^*}$ Teleso sa pohybuje v kartézskych súradniciach po trajektórii

$$x = 2a\cos^2\frac{kt}{2} \qquad y = a\sin kt$$

Prepíšte túto závislosť ako funkciu polárnych súradníc od času.
Riešenie: $r = \sqrt{x^2+y^2} = a\sqrt{2\left(1+\cos kt\right)}$, $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{y}{x} = \frac{\sin kt}{1+\cos kt}$

$\boxed{6.2.}$ Napíšte kinetickú energiu $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$ v polárnych, sférických a cylindrických súradniciach.

Riešenie: $\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\,\dot{\varphi}^2\right)$, $\frac{1}{2}m\left(\dot{\varphi}^2r^2\sin^2\vartheta+\dot{\vartheta}^2r^2+\dot{r}^2\right)$

$\boxed{6.3^*}$ Teleso sa pohybuje v kartézskych súradniciach po trejektórii

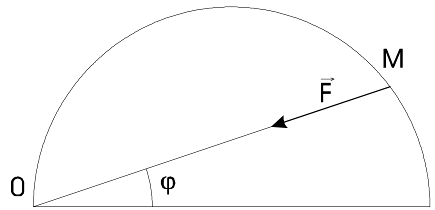
$$x = R\cos^2\frac{kt}{2} \qquad y = \frac{R}{2}\sin kt \qquad z = R\sin\frac{kt}{2}$$

Prepíšte túto závislosť ako funkciu sférických súradníc od času.
Riešenie: $r = R$, $\varphi = \frac{kt}{2}$, $\vartheta = \frac{kt}{2}$

$\boxed{6.4^*}$ Teleso sa pohybuje v rovine. Jeho tangenciálne a normálové zrýchlenie sú konštanty a a b. Nájdite rovnicu trajektórie v polárnych súradniciach.
Riešenie: $r = r_0 e^{\frac{2a}{b}(\varphi-\varphi_0)}$

$\boxed{6.5^*}$ Mucha sa približuje k lampe zo vzdialenosti r_0 tak, že jej rýchlosť zviera so spojnicou k lampe konštantný uhol α. Nájdite trajektóriu pohybu.
Riešenie: $r(\varphi) = r_0\exp(\frac{-\varphi}{\operatorname{tg}\alpha})$

$\boxed{6.6^*}$ Teleso M hmotnosti m je priťahované (neznámou) centrálnou silou $\vec{F}(r)$ do bodu O, vďaka čomu sa pohybuje po kružnici (viď obr. VI.8.) s konštantnou plošnou rýchlosťou σ. Nájdite závisloť $\vec{F}(r)$.



obr. VI.8

Riešenie: $F = \frac{32ma^2\sigma^2}{r^5}$

$\boxed{6.7^*}$ Teleso sa pohybuje po lemniskáte $r^2 = a\cos 2\varphi$ s počiatočnými podmienkami $r(0) = r_0$, $v(0) = v_0$, $\measuredangle(\vec{r}_0,\vec{v}_0) = \alpha$. Vypočítajte silu pôsobiacu na teleso.
Riešenie: $F = \frac{3ma^2}{r^7}r_0^2v_0^2\sin^2\alpha$

$\boxed{6.8^*}$ Teleso hmotnosti m sa pohybuje pod vplyvom centrálnej sily tak, že jeho rýchlosť sa mení podľa vzťahu $v = \frac{\alpha}{r}$, kde α je konštanta. Určte trajektóriu pohybu a silové pole $F(r)$.
Riešenie: trajektóriou je logaritmická špirála, $F = \frac{m\alpha^2}{r^2}$.

$\boxed{6.9^*}$ Teleso s pohybuje v smere osi z rýchlosťou v po špirále, ktorej polomer r a uhol φ v rovine xy sa s časom mení nasledovne: $r = a\exp\left(-\alpha t\right)$, $\varphi = \omega t$. Určte zložky a veľkosi vektorov $\vec{v}$, $\vec{a}$