Kapitola 4

Nekonečné rady

4.1 Mocninné rady

Predpokladajme, že poloha telesa v čase t_0 je určená súradnicou $x(t_0)$. Pokúsme sa rýchlo a efektívne vypočítať jeho novú polohu po uplynutí krátkeho času Δt. Šikovná metóda takéhoto približného výpočtu je založená na predpoklade, že teleso sa pohybuje konštantnou rýchlosťou $\frac{dx}{dt} = v = kon\check{s}t$:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + v\Delta t \tag{4.1}$$

Tento odhad môžeme vylepšiť tak, že pohyb telesa budeme považovať za rovnomerne zrýchlený a využijeme známy vzťah:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + v\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \tag{4.2}$$

Ďalšie vylepšenie je považovať pohyb za nerovnomerne zrýchlený so "zrýchlením zrýchlenia" α , ktoré je konštantné $\alpha = \frac{d^3x}{dt^3} = kon\check{s}t$:

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + v\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 + \frac{1}{6}\alpha(\Delta t)^3 \tag{4.3}$$

Takto by sme mohli stále zvyšovať presnosť v určení polohy x v čase $t + \Delta t$. Štruktúra výrazov (4.1), (4.2), (4.3) nás vedie k myšlienke, že po uskutočnení nekonečne veľa "vylepšení" získame skutočnú polohu vo forme nekonečného radu:

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + a_4(t - t_0)^4 + ... \tag{4.4}$$

Z predchádzajúcich odhadov vyplýva, že pre prvé dva koeficienty platí: $a_0 = x(t_0)$, $a_1(t_0) = \frac{dx}{dt}|_{t=t_0}$. Algoritmus na výpočet ostatných a_n bude podobný:

Dráhu $x(t)$ $n - kr\acute{a}t$ zderivujeme a potom vyjadríme jej hodnotu v bode $t = t_0$. Dospejeme k nasledovnému výsledku:

$$a_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right]_{t=t_0} \tag{4.5}$$

Po spätnom dosadení do rovnice (4.4) získame rozvoj funkcie $x(t)$ v okolí bodu t_0:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \frac{dx}{dt}|_{t=t_0}(t - t_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2x}{dt^2}|_{t=t_0}(t - t_0)^2 + \\ & \frac{1}{3!}\frac{d^3x}{dt^3}|_{t=t_0}(t - t_0)^3 + ... \end{aligned} \tag{4.6}$$

Vo fyzike sa často stretneme s rozvojmi trigonometrických ako aj exponenciálnych funkcií. Pre ilustráciu ukážme niekoľko príkladov:

Príklad 1 Rozviňte funkcie **a,** $f(x) = \sin x$ **b,** $f(x) = \cos x$ **c,** $f(x) = \exp(x)$ do radu v okolí bodu $x = 0$

Riešenie: a, Keďže $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, ...

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \tag{4.7}$$

b, Keďže $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$ ...

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \tag{4.8}$$

c, Keďže $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \tag{4.9}$$

Užitočnosť rozvoja funkcií spočíva často nie v tom, že môžeme sčítať celý rad, ale práve v tom, že pre mnohé praktické účely ho sčítať celý nemusíme. Ak totiž členy radu rýchlo klesajú, potom vyššie členy radu zvyšujú presnosť výsledku na vyšších desatinných miestach, ale prvé desatinné miesta sa už nemenia. Ak nás výsledok zaujíma len s konečnou presnosťou, stačí sčítať niekoľko prvých členov. Ďalšie členy radu nám umožňujú odhadnúť, na ktorom desatinnom mieste je už náš výpočet nepresný.

Príklad 2 Vypočítajte príspevky prvých piatich členov rozvoja funkcie $f = \sqrt{e} = e^{0,5}$

Riešenie: Ide v podstate o rozvoj (4.9) v ktorom dosadíme $x = \frac{1}{2}$. Pre n-tý člen tohto radu platí $a_n = \frac{(0,5)^n}{n!}$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	1	0,5	0,125	0,020833	0,002604	0,000260

vidíme, že každý nasledujúci člen je približne o rád menší než predchádzajúci. Sčítaním prvých piatich členov dostaneme $\sqrt{e} \approx 1,648$ a z posledného člena v tabuľke odhadneme, že tento výsledok sa líši od presného až na štvrtom desatinom mieste. "Presný" výsledok určíme z kalkulačky:

$$\sqrt{e} = 1,6487243. \qquad \diamondsuit$$

Z tvaru mocninného radu je intuitívne jasné, že čím menší je rozdiel $x - x_0$, tým menší počet členov treba zobrať na získanie relatívne presného výpočtu. Aké Δx je už dostatočne malé, závisí od konkrétneho tvaru funkcie. Niekedy sú aj pomerne veľké Δx ešte dostatočne malé z hľadiska mocninného radu.

Určite ste si všimli, že mnohé fyzikálne zákony sú lineárne. Spomeňme Ohmov zákon, Hookov zákon, zákon tepelnej rozťažnosti a iné. Aby sme pochopili túto skutočnosť, rozoberme príklad dobre známy z mechaniky - silu F, ktorou pôsobí pružina na teleso. Rozložme ju v okolí rovnovážnej polohy $x_0 = 0$ do mocninného radu:

$$F(x) = F(0) + F^{'}(0)\,x + \frac{1}{2}F^{''}(0)\,x^2 + \frac{1}{6}F^{'''}(0)\,x^3 + ... \qquad (4.10)$$

Pre dostatočne malé výchylky x z rovnovážnej polohy sú tretí a všetky ďalšie členy malé oproti prvým dvom a keďže v rovnovážnej polohe $F(0) = 0$, získame práve lineárny vzťah $F = -kx$ (konštanta $F^{'}(0)$ sa označuje v praxi ako tuhosť pružiny k.). Tento vzťah je bežný pre mnohé pružiny práve preto, lebo bežné výchylky sú dostatočne malé na to, aby sme v (4.10) mohli zanedbať všetky vyššie členy. Ostatné zákony sú lineárne v dostatočne malom okolí danej veličiny, z analogického hľadiska.

Okrem približného výpočtu sú mocninné rady často užitočné aj pri úplne presných výpočtoch či dôkazoch. Ako príklad uvedieme odvodenie Eulerovej formuly, ktorú budeme úspešne používať aj v iných kapitolách:

Príklad 3 Odvoďte Eulerovu formulu $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$.

Riešenie: Nahraďme v rovnici (4.9) $x \to ix$, kde i je imaginárna jednotka, pre ktorú platí: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$

$$\exp(ix) = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} \pm ... \qquad (4.11)$$

Po preusporiadaní jednotlivých členov rozvoja :

$$\exp(ix) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm ..\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm ...\right) \qquad (4.12)$$

v zátvorkách spoznávame rozvoje trigonometrických funkcií (4.8), (4.7):

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x \qquad (4.13)$$

čo sa nazýva Eulerova formula. Zameňme $x \to -x$, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ a získame rovnicu

$$\exp(-ix) = \cos x - i \sin x \qquad (4.14)$$

Posledné vzťahy vyjadrujú súvislosť medzi exponenciálnymi a trigonometrickými funkciami. Ich sčítaním a odčítaním sa dajú prepísať do tvaru:

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \quad \text{resp.} \quad \sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} \qquad (4.15) \diamondsuit$$

Rady sa úspešne využívajú na približné výpočty integrálov a súm. Ak sa integrál z danej funkcie nedá zapísať v tvare elementárnych funkcií, môžeme sa pokúsiť rozložiť integrand do mocninného radu a integrovať člen po člene.

Príklad 4 Vypočítajte rozkladom do radov integrál $\int \frac{e^x}{x} dx$

Riešenie:

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ...\right) dx = c + \ln|x| + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + .. \diamondsuit$$

Výsledkom je nová funkcia daná vo forme radu, ktorú nemožno vyjadriť pomocou elementárnych funkcií.

Príklad 5 Vypočítajte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

Riešenie: Zadefinujme funkciu $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ a zintegrujme ju[1]:

$$\int f(x)\,dx = \int \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} + c = \frac{x^2}{1-x} + c$$

[1] Všimnite si, že dostaneme geometrický rad s absolútnym členom $a_0 = x^2$ a s quocientom $q = x$. Jeho suma je $S = \frac{a_0}{1-q}$.

Spätným zderivovaním pravej a ľavej strany určíme funkciu $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2}$$

Dosadením za $x = \frac{1}{3}$ dostaneme sumu pôvodného radu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} = f(\frac{1}{3}) = \frac{5}{4}$$

♢

4.2 Fourierove rady

Vo fyzike sa často stretávame s veličinami a dejmi, ktoré sa pravidelne opakujú. Napríklad periodický pohyb piestu v motore, kmitanie sústavy okolo rovnovážnej polohy a pod. Každá periodická funkcia $f(t)$ je charakterizovaná periódou T , ktorá sa vyznačuje nasledovnou vlastnosťou:

$$f(t+T) = f(t) \tag{4.16}$$

Pod slovom perióda sa zvyčajne myslí najmenšia z kladných periód tzv. *základná perióda*. Podobne ako v predchádzajúcom paragrafe bolo výhodné rozvíjať funkcie do radov, pokúsme sa nájsť vhodné rozvoje pre periodické funkcie. Základnou stavebnou jednotkou takéhoto radu budú pravdepodobne najjednoduchšie periodické funkcie, ktorými sú $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$ (kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$) t.j.:

$$f(t) = c_0 + c_1 \cos(\omega_1 t) + d_1 \sin(\omega_1 t) + c_2 \cos(\omega_2 t) + d_2 \sin(\omega_2 t) + ...$$

Aké vlastnosti musí mať takýto rad? Keďže funkcia $f(t)$ je periodická, potom podľa (4.16):

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + c_1 \cos(\omega_1 t + \omega_1 T) + d_1 \sin(\omega_1 t + \omega_1 T) + ... = \\ &= c_0 + c_1 \cos(\omega_1 t) + d_1 \sin(\omega_1 t) + ... \end{aligned}$$

a teda $\omega_i T = 2\pi n_i \Longrightarrow \omega_i = \omega n_i$ kde n_i sú celé čísla.[2]. Zistili sme, že funkcie s periódou T bude možné rozvinúť do radu trigonometrických funkcií:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \tag{4.17}$$

[2] Vo fyzike sa frekvencie ω_i nazývajú vyššie harmonické.

Takéto vyjadrenie bude mať praktický zmysel iba vtedy, keď sa nám podarí nájsť recept na určenie všetkých neznámych koeficientov a_n b_n. Skôr ako sa o to pokúsime, vypočítajme niekoľko integrálov, ktoré neskôr použijeme:

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\, dt = \int_0^T \sin(n\omega t)\, dt = 0, \int_0^T dt = T \tag{4.18}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \sin(m\omega t)\, dt = 0 \tag{4.19}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t)\, dt = \int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t)\, dt = \frac{T}{2}\delta_{n,m} \tag{4.20}$$

kde $n, m = 1, 2...$, $\delta_{n,m}$−Kroneckerov symbol: $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, \; n = m \\ 0, \; n \neq m \end{cases}$.

Vynásobme rovnicu (4.17) funkciou $\cos m\omega t$ a zintegrujme ju cez periódu T použitím (4.18),(4.19),(4.17):

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos(m\omega t)\, dt &= \int_0^T \frac{a_0}{2} \cos(m\omega t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T a_n \cos(m\omega t) \cos(n\omega t)\, dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T b_n \cos(m\omega t) \sin(n\omega t)\, dt \\ \int_0^T f(t) \cos(m\omega t)\, dt &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{T}{2} \delta_{n,m} + 0 = \frac{T}{2} a_m \\ a_m &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(m\omega t)\, dt \qquad (4.21) \end{aligned}$$

Na určenie koeficientu b_m treba vynásobiť (4.17) funkciou $\sin m\omega t$ a zintegrovať ju cez periódu T, na určenie a_0 rovnicu (4.17) priamo integrujeme cez periódu T :

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(m\omega t)\, dt \tag{4.22}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, dt \tag{4.23}$$

Príklad 6 Nájdite Fourierov rozvoj funkcie:

$$f(t) = \begin{cases} -A \text{ pre } t \in (-\frac{T}{2}, 0) \\ A \text{ pre } t \in (0, \frac{T}{2}) \end{cases}$$

Riešenie: Dosadením do (4.21), (4.22), (4.23) :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} Adt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (-A)\,dt\right] = 0 \tag{4.24}$$

$$a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos m\omega t\,dt = 0 \tag{4.25}$$

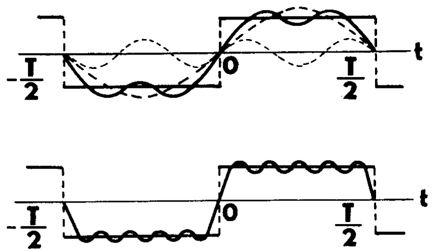
$$b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin m\omega t dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} A\sin m\omega t dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} (-A)\sin m\omega t dt\right] =$$

$$= -\frac{4A}{Tm\omega}(\cos m\pi - 1) \tag{4.26}$$

Všetky párne členy $b_m = 0$. Dosadením do (4.17) :

$$f(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ...\right) \tag{4.27}$$

Na obr. IV.1 sú okrem pôvodnej funkcie znázornné aj prvé dva členy Fourierovho radu a priebeh po ich zložení, na druhom obrázku je suma prvých 6 členov príslušného radu.



obr. IV.1

◇

4.3 Cvičenia

4.1. Integrujte pomocou radov: $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$

Riešenie: $c + x + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} + .., x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + ... = \arcsin x, x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... = arctgx$

4.2. Pomocou Fourierovho radu rozviňte periodickú funkciu s priebehom: $f(t) = t$ v intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$

Riešenie: $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nt}{n}$

4.3.* Dokážte, že výraz pre kinetickú energiu v klasickej mechanike predstavuje prvý člen Taylorovho rozvoja relativistického výrazu pre kinetickú energiu.

4.4. Pomocou rozvoja funkcie $\ln(1+x)$ v bode 0 dokážte, že:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \ln 2$$