Kapitola 3

Matice

3.1 Vlastnosti matíc a determinanty

Pod maticou A typu $m\times n$ budeme rozumieť tabuľku s m riadkami a n stĺpcami[1].

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Elementy a_{ij} nazývame prvkami matice. Matice sa rovnajú práve vtedy, keď obsahujú rovnaké počty stĺpcov aj riadkov s rovnakými elementami:

$$A\,(m\times n) = B\,(m\times n) \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \tag{3.2}$$

Matice možno sčítavať a odčítavať iba vtedy, keď majú rovnaké počty riadkov aj stĺpcov:

$$A\,(m\times n) \pm B\,(m\times n) = C\,(m\times n) \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \tag{3.3}$$

Ak matica $A\,(m\times n)$ obsahuje taký počet sĺpcov ako matica $B\,(n\times p)$ riadkov, potom existuje ich súčin $A\times B = C\ \ (m\times p)$ pričom: $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Pri násobení matíc neplatí komutatívny zákon, ako sme boli na to zvyknutí pri operáciach s číslami.

$\boxed{\text{Príklad 1}}$ Majme maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a maticu $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nájdite ich súčin $A\cdot B$, $B\cdot A$:

Riešenie: $A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \neq \ B\cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ♢

[1] Takúto maticu budeme v ďalšom texte zjednodušene označovať $A\,(m\times n)$

Špeciálnym typom matíc sú štvorcové matice, ktoré majú rovnaký počet riadkov aj stĺpcov. Dôležité a veľmi často používané čísla, ktoré im priraďujeme nazývame *determinaty*. Označujeme ich zvislými "paličkami" $|A|$. K maticiam sa priraďujú tieto čísla podľa nasledovných kritérií:

- ak ide o maticu A typu 1×1, potom $|A| = a_{ij}$
- ak ide o maticu A typu 2×2, potom $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- vyšším stupňom matíc priraďujeme determinanty podľa rekurentného vzťahu:

$$|A| = \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j} \det M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j} \det M_{ij} \tag{3.4}$$

kde M_{ij} je determinant štvorcovej matice, ktorú získame zo štvorcovej matice A vyškrtnutím $i - teho$ riadku a $j - teho$ stĺpca. Vo fyzike sa stretneme s využitím determinantov pri hľadaní vektorových súčinov:

$\boxed{\text{Príklad 2}}$ Určte vektorový súčin $\vec{a}\,(1,2,3)$ a $\vec{b}\,(1,1,2)$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{1+1}\overrightarrow{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\overrightarrow{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\overrightarrow{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \overrightarrow{i}\,(2\cdot 2 - 3\cdot 1) - \overrightarrow{j}\,(1\cdot 2 - 3\cdot 1) + \overrightarrow{k}\,(1\cdot 1 - 2\cdot 1) = \\ &= \overrightarrow{i}\,(+1) - \overrightarrow{j}\,(-1) + \overrightarrow{k}\,(-1) \end{aligned}$$ ♢

3.2 Využitie matíc

Determinanty matíc sa dajú využiť pri riešení sústav n lineárnych rovníc o n neznámych $(x_1, x_2, ...x_n)$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ...\ \ a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ...\ \ a_{2n}x_n &= y_2 \\ &... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ...\ \ a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

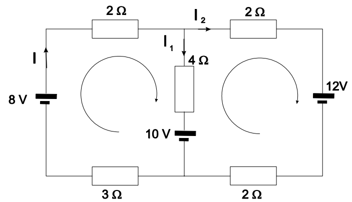
Podľa Cramerovho pravidla táto sústava má riešenie práve vtedy, keď determinant matice $|A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \right| \neq 0$. Neznáme x_1,x_2, ...x_n vypočítame podľa vzťahu:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, 2, ...n \tag{3.5}$$

Matica A_i vznikne nahradením $i - teho$ stĺpca matice A stĺpcovou maticou Y:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & y_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & y_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & y_n & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Príklad 3 Nájdite prúd prechádzajúci zdrojom $12V$.



obr. III.1

Riešenie: Podľa prvého a druhého Kirchhoffovho zákona zostavíme sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} 5I + 4I_1 + 0I_2 &= -2 \\ 0I - 4I_1 + 4I_2 &= -2 \\ I - I_1 - I_2 &= 0 \end{aligned}$$

a vyriešime ju podľa Cramerovho pravidla (3.5):

$$I_2 = \frac{|A_i|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{13}{28}$$

Zistili sme, že zdrojom tečie prúd $\frac{13}{28}A$, ktorý má opačný smer, ako sme predpokladali. ♢

Vektory sa zvyčajne zapisujú vo forme jednoriadkových alebo jednostĺpcových matíc[2]:

$$\vec{r} = (x, y, z) \qquad \vec{r}^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

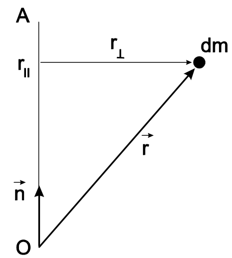
Napríklad z mechaniky vieme, že pre moment hybnosti platí:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{11}\omega_x + I_{12}\omega_y + I_{13}\omega_z \\ L_y &= I_{21}\omega_x + I_{22}\omega_y + I_{23}\omega_z \\ L_z &= I_{31}\omega_x + I_{32}\omega_y + I_{33}\omega_z \end{aligned}$$

čo v maticovej reprezentácii má nasledovné elegantné vyjadrenie:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Príklad 4 Odvoďte vzťah pre výpočet momentu zotrvačnosti vzhľadom na ľubovoľnú os, ktorá prechádza bodom O podľa obrázka III.2.



obr. III.2

Riešenie: Z obr.III.2 vyjadrime polohový vektor $\overrightarrow{r}$ hmotného elementu dm vzhľadom na počiatok O: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_\perp} + \overrightarrow{r}_{||}$. Z definície momentu zotrvačnosti I ďalej vyplýva:

$$I = \int r_\perp^2 dm = \int \left(r^2 - r_{||}^2\right) dm \tag{3.6}$$

[2]Písmeno T nad maticou r je označenie pre tzv. transponovanú maticu, pre ktorú $r_{ij}^T = r_{ji}$. Stĺpce sa nahrádzajú riadkami a opačne.

Ak $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, n_3)$ je jednotkový vektor v smere osi OA, potom $r_{||} = \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} = xn_1 + yn_2 + zn_3$. Okrem toho $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ a $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Dosadením týchto vzťahov do (3.6) :

$$I = I_{11}n_1^2 + I_{22}n_2^2 + I_{33}n_3^2 + 2I_{12}n_1n_2 + 2I_{23}n_2n_3 + 2I_{31}n_3n_1 \tag{3.7}$$

kde:

$$I_{11} = \int \left(y^2 + z^2\right) dm \qquad I_{12} = I_{21} = -\int xydm \tag{3.8}$$

$$I_{22} = \int \left(x^2 + z^2\right) dm \qquad I_{23} = I_{32} = -\int yzdm \tag{3.9}$$

$$I_{33} = \int \left(x^2 + y^2\right) dm \qquad I_{31} = I_{13} = -\int xzdm \tag{3.10}$$

Veličiny I_{ij} sa nazývajú zložkami tenzora momentu zotrvačnosti, ktorý je symetrický $I_{ij} = I_{ji}$. Na jeho určenie stačí vypočítať šesť zložiek. Výraz (3.7) vyjadríme ako súčin matíc:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} I_{ij}n_in_j = (n_1, n_2, n_3) \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \\ &= \vec{n}\, I\, \vec{n}^T \end{aligned} \tag{3.11}$$

$\diamondsuit$

Pokúsme sa o geometrickú interpretáciu momentu zotrvačnosti I. Nanesme do ľubovolného smeru $\overrightarrow{n}$ vektor s veľkosťou $\frac{1}{\sqrt{I}}$. Ich koncové body[3] $\overrightarrow{r} = \frac{\overrightarrow{n}}{\sqrt{I}}$ vytvoria plochu druhého stupňa (3.7), tzv. elipsoid zotrvačnosti:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} I_{ij}x_ix_j = 1 \tag{3.12}$$

Súradnicovú sústavu so začiatkom v bode O možno vždy natočiť tak, aby ortogonálne osi x, y, z splynuli s hlavnými osami elipsoidu momentu zotrvačnosti a rovnica plochy elipsoidu (3.11) prešla na jednoduchý tvar:

$$I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 = 1 \tag{3.13}$$

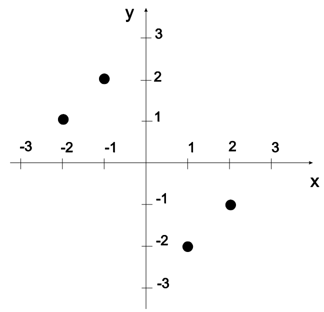
Pri takejto voľbe súradnicovej sústavy nediagonálne prvky tenzora $\bar{I}$ sú nulové. *Cez ľubovoľný bod telesa sa dajú vždy viesť tri navzájom kolmé hlavné osi, ktoré zodpovedajú hlavným osiam elipsoidu zotrvačnosti.* Ich smer možno mnohokrát nájsť zo symetrie telesa. Každá os symetrie telesa môže zodpovedať osi symetrie

[3] v zložkovom tvare $x_i = \frac{n_i}{\sqrt{I}}$

elipsoidu a preto reprezentuje jednu z jeho hlavných osí. Napríklad, ak ťažisko homogénneho valca stotožníme so začiatkom súradnicového systému (bod O), potom momenty zotrvačnosti vzhľadom na ľubovolnú os kolmú k osi symetrii sú rovnaké a môžu byť hlavnými osami (podobne ako hociktora os symetrie). Vo valci teda existuje nekonečne veľa trojíc hlavných osí, ktoré su na seba kolmé. Elipsoidom momentu zotrvačnosti homogénnej gule je guľa a preto ľubovoľná trojica navzájom kolmých priamok prechádzajúcich ťažiskom je hlavnými osami. Ak telesá nevykazujú žiadnu symetriu, potom sa diagonalizácia tenzora I dosahuje riešením sústavy rovníc:

$$\bar{I}\,\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega} \tag{3.14}$$

$\boxed{\text{Príklad 5}}$ Nájdime hlavné osi sústavy hmotných bodov $A(2, -1)$, $B(-2, 1)$, $C(1, -2)$ a $D(-1, 2)$ s rovnakými hmotnosťami $m = 1$.



obr. III.3

Riešenie: Vypočítajme jednotlivé zložky tenzora[4]:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{i=1,4} \left(y_i^2 + z_i^2\right) m_i = \sum_{i=1,4} y_i^2 m_i = (-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2 + (2)^2 = 10 \\ I_{12} &= -\sum_{i=1,4} x_i^2 y_i^2 m_i = -[-2 - 2 - 2 - 2] = 8 = I_{21} \\ I_{22} &= \sum_{i=1,4} \left(x_i^2 + z_i^2\right) m_i = \sum_{i=1,4} x_i^2 m_i = 10 \end{aligned}$$

a teda:

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

[4] $z_i = 0$

Tento tenzor je nediagonálny, a my už pohľadom na sústavu vieme (obr.III.3), ktoré osi sú hlavné. Teraz ich však získame výpočtom. Dosaďme $\bar{I}$ do rovnice (3.14):

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix}$$

a rozpísaním dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} (10-\lambda)\omega_x + 8\omega_y &= 0 \\ 8\omega_x + (10-\lambda)\omega_y &= 0 \end{aligned}$$

Je to homogénna sústava rovníc, a nutnou podmienkou jej riešenia je nulovosť determinantu[5]

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 8 \\ 8 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

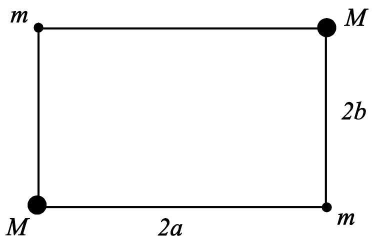
Odtiaľ dostávame $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 18$, teda dve rôzne riešenia (a ich násobky)

$$\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

◇

3.3 Cvičenia

$\boxed{3.1^*}$ Nájdite hlavné osi telesa skladajúceho sa zo štyroch telies hmotností m, M, m, M, ktoré sú umiestnené vo vrcholoch obdĺžnika so stranami $2a$ a $2b$.



obr. III.4

Riešenie: $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2ab(M-m)}{(a^2-b^2)(M+m)}$

[5] Ak by bol determinant nenulový, sústava by mala iba triviálne riešenie, ktoré však nemá pre nás žiadny fyzikálny význam.