

Kapitola 5

Diferenciálne rovnice-základný jazyk fyziky

Typickou úlohou fyziky je hľadanie časových priebehov veličín spĺňajúcich fyzikálny zákon, v ktorom vystupujú ich derivácie. Pre ilustráciu spomeňme niekoľko príkladov: Nájdite polohu telasa $x(t)$ pri voľnom páde z výšky h . Fyzikálny zákon popisujúci tento dej je Newtonov zákon: $m\ddot{x} = -mg$. Zvyčajne sa požaduje, aby hľadané fyzikálne veličiny dosahovali v čase $t = 0$ predpísané hodnoty: $x(0) = h$, $\dot{x}(0) = v_0$. Rovnica, v ktorej vystupuje neznáma funkcia spolu so svojimi deriváciami sa nazýva **diferenciálna rovnica**. Diferenciálne rovnice možno klasifikovať z rôznych hľadísk. Podľa druhu derivácie ich rozdeľujeme na obyčajné¹ a parciálne², podľa analytického tvaru na lineárne³ a nelineárne a podľa najvyššieho stupňa derivácie na prvého, druhého až n -tého rádu. Pre diferenciálne rovnice n -tého rádu budeme pod *počiatočnými podmienkami* rozumieť hodnoty hľadanej funkcie a jej derivácii až do $n - 1$ stupňa (vrátane) v počiatočnom čase $t = 0$ ⁴. V mechanike sa väčšinou stretáme s rovnicami 2. rádu, pretože základný zákon dynamiky-Newtonova rovnica je DR 2. rádu. Schopnosť správne riešiť diferenciálne rovnice by preto mala patriť do základnej matematickej výzbroje každého fyzika.

¹vystupujú v nej iba obyčajné derivácie hľadanej funkcie, napr. $\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} = \cos x$

²vystupujú v nej parciálne derivácie hľadanej funkcie, napr. $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$

³hľadaná funkcia so všetkými svojimi deriváciami sa vyskytuje iba lineárne, pričom sa nikdy nevyskytuje ani ako súčin hľadanej funkcie a jej derivácii, ani ako súčin rôznych derivácií tejto funkcie, napr. $\sin t \ddot{f} - (t^2 + at) \dot{f} = \exp t$

⁴Všeobecné riešenie DR n -tého stupňa musí obsahovať n konstant, ktoré sa určia z počiatočných podmienok.

5.1 Diferenciálne rovnice prvého rádu

5.1.1 Najjednoduchšie typy

Najjednoduchšie typy diferenciálnych rovníc majú tvar $\dot{x} = g(t)$ a ich riešením je neurčitý integrál: $x = \int g(t) dt$

Príklad 1 Určte rýchlosť a polohu telesa pri voľnom páde v homogénnom gravitačnom poli. Teleso v čase $t = 0$ s sa nachádzalo vo výške h a jeho rýchlosť $v = v_0$.

Riešenie: Ak počiatok súradnicovej sústavy umiestnime na povrch zeme, potom podľa Newtonovho zákona:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= -mg \implies v = \int -g dt = -gt + c_1 \\ \dot{x} &= -gt + c_1 \implies x = \int (-gt + c_1) dt = -g\frac{t^2}{2} + c_1t + c_2 \end{aligned}$$

Z počiatočných podmienok $x(0) = h$, $v(0) = v_0$ určíme neznáme konštanty: $c_1 = v_0$, $c_2 = h$:

$$x = \int (-gt + c_1) dt = -g\frac{t^2}{2} + v_0t + h \quad \diamond$$

Častokrát je úloha zadaná vo viacrozmernom priestore. V takom prípade najskôr zostavíme vektorovú rovnicu, ktorú potom prepíšeme do jednotlivých rozmerov a tie samostatne riešime.

Príklad 2 Častica sa pohybuje z bodu $[0, 0]$ rýchlosťou $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Nájdite jej trajektóriu.

Riešenie: Vektorovú rovnicu napíšeme v algebraickom tvare:

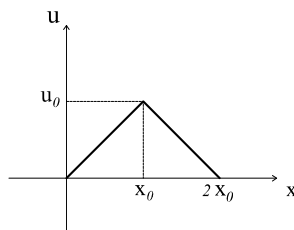
$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = a, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = bx \\ dx &= a dt, \quad dy = bxdt \\ x &= at + c_1 \implies dy = b(at + c_1) dt \implies y = ba\frac{t^2}{2} + c_1t + c_2 \end{aligned}$$

Z počiatočných podmienok $x(0) = y(0) = 0$ vypočítame neznáme konštanty: $c_1 = c_2 = 0$:

$$y = ba\frac{t^2}{2} = b\frac{x^2}{2a} \quad \diamond$$

Príklad 3 Rýchlosť tečenia vody v rieke narastá lineárne z nuly na krajoch, po rýchlosť u_0 v strede rieky. Naprieč riekou sa pohybuje loď, rýchlosťou v . Nájdite trajektóriu lode.

Riešenie: Zvoľme si počiatok súradnicovej sústavy v mieste vyplávania lode, pričom y-ová súradnica je totožná so smerom toku rieky. Profil rýchlosti vody v rieke je znázornený na obr.V.1:



obr. V.1

a možno ho vyjadriť vzťahom:

$$u = u_0 - \frac{u_0}{x_0} |x - x_0| \quad (5.1)$$

Riešenie úlohy rozdelíme na dva prípady:

1. *Lod' sa pohybuje od okraja po stred rieky ($x < x_0$).* Rýchlosť lode v smere osi x ostáva konštantná $v_x = v \Rightarrow x = vt$ a v smere y :

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u_0}{x_0} x = \frac{u_0}{x_0} vt \\ y &= \frac{1}{2} \frac{u_0 v}{x_0} t^2 + C \end{aligned}$$

Z počiatočných podmienok $y(0) = 0$ určíme konštantu $C = 0$. Na konci prvého úseku ($t = \frac{x_0}{v}$) poloha lode bude:

$$y_0 = \frac{1}{2} \frac{u_0 x_0}{v} \quad x = x_0$$

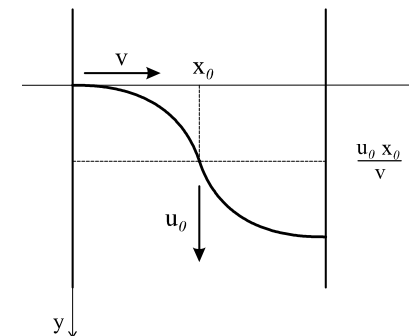
2. *Lod' sa pohybuje od stredu rieky po opačný breh ($x > x_0$).* Pre rýchlosť vody platí: $u = 2u_0 - \frac{u_0}{x_0}x$. Postup je analogický ako v predchádzajúcom prípade, pričom musí byť splnená podmienka $y(\frac{x_0}{v}) = \frac{1}{2} \frac{u_0 x_0}{v}$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 2u_0 - \frac{u_0}{x_0} vt \\ y &= 2u_0 t - \frac{1}{2} \frac{u_0 v}{x_0} t^2 + C = 2u_0 t - \frac{1}{2} \frac{u_0 v}{x_0} t^2 - \frac{u_0 x_0}{v} \end{aligned}$$

Lod' sa dostane na druhý breh za čas $t = \frac{2x_0}{v}$, a jej nová poloha bude:

$$y\left(\frac{2x_0}{v}\right) = \frac{u_0 x_0}{v}$$

Hľadaná trajektória lode je znázornená na obr. V.2.:



obr. V.2

◇

5.1.2 Diferenciálne rovnice so separovanými alebo separovateľnými premennými

Diferenciálna rovnica 1. rádu $\dot{x} = g(x, t)$, v ktorej funkcia $g(x, t)$ je súčnom dvoch funkcií $g(x, t) = f_1(x) f_2(t)$ sa volá rovnica so separovateľnými premennými. Stratégia riešenia je veľmi jednoduchá. Rovnicu upravíme tak, aby každá strana obsahovala iba jednu premennú:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x) f_2(t) \\ \frac{dx}{f_1(x)} &= dt f_2(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Premenné sú oddelené (separované), preto hovoríme, že rovnica (5.2) je rovnicou so separovanými premennými. Jej riešenie získame zintegrovaním oboch strán rovnice:

$$\int \frac{dx}{f_1(x)} = \int dt f_2(t) \quad (5.3)$$

Príklad 4 Častica sa začala v čase $t = 0$ pohybovať po priamke rýchlosťou $v(x) = \alpha\sqrt{x}$. Za aký čas t_1 sa dostane z bodu 0 do bodu x_1 ?

Riešenie:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int \alpha dt \\ 2\sqrt{x} &= \alpha t + c \end{aligned}$$

Z počiatočnej podmienky $x(0) = 0$ určíme neznáme konštanty: $c = 0 \implies t_1 = \frac{2\sqrt{x_1}}{\alpha}$ \diamond

Príklad 5 Jeden z prvých modelov voľného pádu bol založený na predpoklade, že rýchlosť telesa je priamo-úmerná prejdenej dráhe $v = ks$. Ukážte, že tento model je teoreticky rozporný.

Riešenie: Pohybová rovnice voľne padajúceho telesa bude mať podľa modelu tvar:

$$\frac{ds}{dt} = ks$$

Postupnými úpravami

$$\begin{aligned} \int \frac{ds}{s} &= \int k dt \\ \ln |s| &= kt + c_1 \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ |s| &= e^{c_1} e^{kt} \quad e^{c_1} = A \in \mathbb{R}^+ \\ s &= A e^{kt} \quad A \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

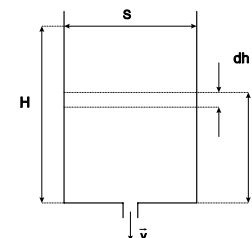
a dosadením počiatočnej podmienky $s(0) = 0$ určíme konštantu $A = 0$, čo vedie k záveru, že teleso sa nepohne $s \equiv 0$. Táto skutočnosť je však v rozpore s experimentom a preto použitý model je nesprávny.⁵ \diamond

⁵Mohli sme samozrejme postupovať aj "derivačnou" metódou a určiť silu, ktorá by musela pôsobiť na teleso, aby model bol správny.

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d}{dt}(ks) = mkv$$

Na nepohybujúce teleso ($v = 0$) by pôsobila nulová sila, čo je v rozpore so skutočnosťou.

Príklad 6 Vo valcovej nádobe s prierezom S siaha kvapalina do výšky H . Určte čas, za aký vytečie voda z nádoby cez otvor s prierezom s (obr.V.3)! Nájdite taký tvar nádoby, aby hladina kvapaliny klesala s konštantnou rýchlosťou.



obr. V.3

Riešenie: Zo zákona zachovania energie pre rýchlosť výtoku kvapaliny dostaneme Torricelliho vzťah $v = \sqrt{2gh}$. Za čas dt vytečie z nádoby objem $dV = sv dt$, ktorý sa rovná úbytku objemu kvapaliny v nádobe: $dV = -S dh \implies -S dh = sv dt$. Separáciou premenných a dosadením rýchlosti v :

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S} \sqrt{2g} dt \implies 2\sqrt{h} = -\frac{s}{S} \sqrt{2gt} + c = -\frac{s}{S} \sqrt{2gt} + 2\sqrt{H} \quad (5.4)$$

Neznámu konštantu $c = 2\sqrt{H}$ sme určili z počiatočnej podmienky $h(0) = H$. Kvapalina vytečie z nádoby práve vtedy, keď $h = 0 \implies t = 2\frac{S}{s} \sqrt{\frac{H}{2g}}$.

Aby rýchlosť poklesu hladiny bola konštantná $\frac{dh}{dt} = a$, potom podľa rovnice (5.4)⁶ musí platiť:

$$\begin{aligned} \sqrt{h} &= -\frac{\pi x^2}{s\sqrt{2g}} a \\ h &= \frac{a^2 \pi^2}{2gs^2} x^4 \end{aligned} \quad \diamond$$

Príklad 7 Predpokladajme, že teplota vzduchu v atmosfére sa mení lineárne z hodnoty $T_1 = 300 K$ vo výške $z_1 = 0 m$ na $T_2 = 250 K$ vo výške $z_2 = 10 km$. Vypočítajte čas t , za ktorý sa zvuk rozšíri z výšky z_2 na zemský povrch. Pre rýchlosť zvuku platí: $v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}$ (viď. kapitola 9)

⁶Prierez $S(x) = \pi x^2$

Príklad 8 Rozdeľme celú výšku z na infinitenzimálne elementy dz , cez ktoré prejde zvuková vlna za čas

$$dt = \frac{dz}{v} = \frac{dz}{\sqrt{\frac{\kappa R T}{M}}}$$

Teplota sa v atmosfére mení lineárne: $T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{z_2} z = T_1 + \alpha z$. Po menších úpravách:

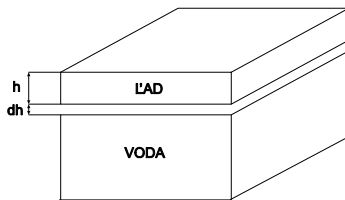
$$dt = \frac{dz}{\sqrt{\frac{\kappa R}{M} (T_1 + \alpha z)}}$$

$$\int_0^t dt = \int_{z_2}^0 \frac{dz}{\sqrt{\frac{\kappa R}{M} (T_1 + \alpha z)}}$$

$$t = \frac{2}{\alpha} \left[\sqrt{T_1} - \sqrt{T_1 + \alpha z_2} \right] \sqrt{\frac{M}{\kappa R}}$$

Príklad 9 Nájdite ako narastá hrúbka ľadu na hladine rybníka. Určte za aký čas sa vytvorí 10 cm vrstva ľadu. (obr.V.6)

Riešenie: Predpokladajme, že ľad vzniká na hladine jazera, kde teplota je rovná teplote fázového prechodu t.j. 0^0C . Merné skupenské teplo topenia je l , koeficient tepelnej vodivosti λ a hustota vody ρ . V mieste, v ktorom sa mení voda na ľad sa uvoľňuje tepelná energia $dQ = l dm = l \rho S dh$.



obr. V.6

Toto teplo sa musí odvádzať cez vytvorenú vrstvu ľadu podľa vzťahu $\frac{dQ}{dt} = \lambda S \frac{\Delta T}{h}$. Porovnaním oboch rovníc a separovaním premenných:

$$\int_0^h h dh = \frac{\lambda \Delta T}{l \rho} \int_0^t dt$$

Po integrácii

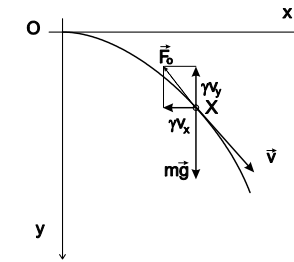
$$h(t) = \sqrt{\frac{2 \lambda \Delta T}{l \rho}} \sqrt{t}$$

Vidíme, že hrúbka ľadu najskôr s časom prudko narastá, neskôr sa však nárast spomaľuje, pretože odvod tepla prebieha väčšou vrstvou ľadu. \diamond

Vyšetríme pohyb v dvojrozmernom priestore:

Príklad 10 Nájdite trajektóriu vodorovne vrhnutého telesa vo vzduchu. Odpor prostredia je priamo úmerný okamžitej rýchlosti

Riešenie:



obr. V.4

Napíšme pohybovú rovnicu v súradnicovej sústave znázornenej podľa obr.V.4:

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = m \vec{g} - \gamma \vec{v}$$

a rozpíšme ju na jednotlivé zložky:

$$m \frac{d}{dt} v_x = -\gamma v_x \implies \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\gamma}{m} dt \quad (5.5)$$

$$m \frac{d}{dt} v_y = mg - \gamma v_y \implies \frac{dv_y}{g - \frac{\gamma}{m} v_y} = dt \quad (5.6)$$

Dosadením počiatočných podmienok $v_x(0) = v_0$, $v_y(0) = 0$, nájdeme jednotlivé zložky rýchlosti:

$$v_y = \frac{mg}{\gamma} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m} t\right) \right) \quad (5.7)$$

$$v_x = v_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{m} t\right) \quad (5.8)$$

Rovnicu trajektórie získame ďalšou integráciou:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) \quad \text{resp.} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{mg}{\gamma} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right)$$

Z počiatočných podmienok $x(0) = y(0) = 0$ určíme neznáme konštanty:

$$x = \frac{m}{\gamma} v_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right) \quad (5.9)$$

$$y = \frac{mg}{\gamma} t - \frac{m^2 g}{\gamma^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right)\right) \quad (5.10)$$

Rovnice (5.9) a (5.10) sú parametrickým rovnicami trajektórie pohybu telesa pri vodorovnom vrhu v odporovom prostredí. Vyjadrenie $y = f(x)$ je značne zložité:

Z rovnice (5.9) určíme čas $t = -\frac{m}{\gamma} \ln\left(1 - \frac{\gamma}{mv_0}x\right)$ a dosadíme ho do (5.10):

$$y = -\frac{m^2 g}{\gamma^2} \ln\left[\left(1 - \frac{\gamma}{mv_0}x\right) \exp\left(\frac{\gamma}{mv_0}x\right)\right] \quad (5.11)$$

Posledná rovnica sa nazýva rovnica balistickej krivky. \diamond

Vo fyzike sa často stretne s prípadmi, keď diferenciálne rovnice sú zadané v tvare diferenciálov:

Príklad 11 Nájdiť závislosť tlaku a objemu pri adiabatickom deji.

Riešenie: Teplo δQ dodané 1 molu ideálneho plynu možno vyjadriť podľa 1. vety termodynamikkej a stavovej rovnice:

$$\delta Q = pdV + C_v dT \quad (5.12)$$

$$pV = RT \implies pdV + dpV = R dT \quad (5.13)$$

Pri adiabatickom deji je sústava tepelne izolovaná $\delta Q = 0$. Upravme tieto rovnice a vylúčme teplotu T :

$$C_v pdV + VC_v dp = -RpdV \quad (5.14)$$

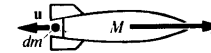
Zavedením Poissonovej konštanty $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ a použitím Mayerovho vzťahu $C_v + R = C_p$ separujeme premenné:

$$\kappa \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \quad (5.15)$$

$$pV^\kappa = \text{konšt} \quad (5.16)$$

Príklad 12 Nájdiť najvhodnejšie parametre dvojstupňovej rakety, ktorá má vyniesť do vesmíru teleso s hmotnosťou $M_0 = 500 \text{ kg}$, pričom po vyhorení paliva má dosiahnuť konečnú rýchlosť $v = 8 \text{ km/s}$. Rýchlosť unikania plynu z motorov vzhľadom na raketu je $u' = 2 \text{ km/s}$. Predpokladajte, že hmotnosť každého stupňa rakety z konštrukčných dôvodov predstavuje 10 percent hmotnosti paliva.

Riešenie: Najskôr odvodíme pohybovú rovnicu pre raketu. Predpokladajme, že v čase t má hmotnosť $M(t)$ a rýchlosť \vec{v} . Vypudením paliva s hmotnosťou dM' a rýchlosťou \vec{u} sa zmenší hmotnosť rakety na $M - dM'$ a rýchlosť sa zmení na $\vec{v} + d\vec{v}$. (obr.V.5).



obr. V.5

Zo zákona zachovania hmotnosti a hybnosti ďalej platí:

$$\begin{aligned} dM + dM' &= 0 \\ (M - dM)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u}dM' &= M\vec{v} \end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami, zanedbaním nekonečne malého člena druhého rádu $d\vec{v}dM$ a nahradením $dM' \rightarrow -dM$:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dM}{dt} = \vec{u}' \frac{dM}{dt}$$

kde \vec{u}' je rýchlosť výtoku plynu vzhľadom na raketu. Ide o separovateľnú DR, ktorú prepíšeme do algebraického tvaru:

$$\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = -\frac{1}{u'} \int_{v_0}^v dv$$

a nájdem jej riešenie:

$$v = v_0 + u' \ln \frac{M_0}{M} \quad (5.17)$$

Nech M_1 a M_2 sú hmotnosti paliva prvého a druhého stupňa rakety. Jej počiatočná hmotnosť $m_0 = M_0 + 1, 1 (M_1 + M_2)$ sa po zhorení prvého stupňa zmenší na $m_1 = M_0 + 1, 1 M_2 + 0, 1 M_1$ a raketa získa rýchlosť (5.17) $v_1 = u' \ln \frac{m_0}{m_1}$. Druhý stupeň začne pracovať po odpojení palivového zásobníka prvého stupňa. Ďalšie zrýchľovanie rakety sa zahajuje po nadobudnutí hmotnosti $m_2 = M_0 + 1, 1 M_2$ a končí, pri hmotnosti $m_3 = M_0 + 0, 1 M_2$. Raketa získa konečnú rýchlosť (5.17) $v_2 = v_1 + u' \ln \frac{m_2}{m_3} = u' \ln \left[\frac{m_0 m_2}{m_1 m_3} \right]$. Po úpravách

$$m_0 \left(\frac{11}{m_3} - \frac{e^4}{m_2} \right) = m_0 \left(\frac{11}{M_0 + 0, 1 M_2} - \frac{\exp(4)}{M_0 + 1, 1 M_2} \right) = 10 \exp(4)$$

Počiatočná hmotnosť rakety m_0 bude minimálna, ak výraz v zátvorke bude maximálny. Z podmienok extrému vyplynie:

$$\frac{M_0 + 1, 1M_2}{M_0 + 0, 1M_2} = \exp(2) \implies M_2 = M (\exp(2) - 1) / (1, 1 - 0, 1 \exp(2)) = 8800 \text{ kg}$$

a preto $m_0 = 209400 \text{ kg}$, $M_1 = 181000 \text{ kg}$. \diamond

5.2 Lineárne diferenciálne rovnice

Diferenciálne rovnice typu:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + a_{n-2}(x)y^{n-2} + a_{n-3}(x)y^{n-3} + \dots + a_0(x)y = g(x) \quad (5.18)$$

kde $a_i(x)$ sú funkcie, nazývame lineárne diferenciálne rovnice n - tého rádu. Ak jej pravá strana je nulová $g(x) = 0$, diferenciálna rovnica je *homogénna*, v opačnom prípade je *nehomogénna*. Ak funkcie a_i sú konštanty, hovoríme o lineárnych diferenciálnych rovniciach s konštantnými koeficientami. Napriek svojej jednoduchosti sú vo fyzike veľmi časté⁷. Základné vlastnosti lineárnych diferenciálnych rovníc odvodíme z dvoch nasledovných viet a ich dôsledkov:

- *Veta 1 (Cauchyho veta):* Lineárna diferenciálna rovnica s danými počiatočnými podmienkami má jednoznačné riešenie t.j. riešenie existuje a je práve jedno.
- *Veta 2:* Nech y_1 a y_2 sú riešeniami diferenciálnej rovnice (5.18) s rôznymi pravými stranami $g_1(x)$, $g_2(x)$, potom ich lineárna kombináciou $y = c_1y_1 + c_2y_2$ je tiež riešením lineárnej DR (5.18) s pravou stranou $g(x) = c_1g_1(x) + c_2g_2(x)$.

Poznámka: Toto tvrdenie úzko súvisí s princípom superpozície, s ktorým sa stretávame v mnohých fyzikálnych disciplínach. Uvedme aspoň niekoľko známych príkladov. Ak sila F_1 vyvolá kmity s výchylkou y_1 a sila F_2 kmity s výchylkou y_2 , z experimentov vieme, že výsledná sila $F = F_1 + F_2$ vyvolá kmity s výchylkou $y = y_1 + y_2$ ⁸. Podobne, ak náboj Q_1 vytvorí elektrické pole s intenzitou \vec{E}_1 a náboj Q_2 elektrické pole s intenzitou \vec{E}_2 , z experimentov opäť vyplýva,

⁷Explicitná závislosť koeficientov a_i na čase by sa dala chápať ako závislosť danej rovnice, t.j. fyzikálneho zákona, na čase. Fyzikálny zákon by mal byť platný v každom čase (dnes, zajtra, o niekoľko rokov).

⁸Predpokladáme, že sily $\vec{F}_1 \uparrow \vec{F}_2$

že náboj $Q_1 + Q_2$ vytvorí elektrické pole s intenzitou $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. To sú však vlastnosti, ktorými sa vyznačujú iba lineárne rovnice. Ak je princíp superpozície experimentálne zaručený, musia byť príslušné javy popísané lineárnymi dif. rovnicami. Princíp superpozície v elektrodynamike vyplýva z lineárnosti Maxwellových rovníc, princíp superpozície v kvantovej mechanike z lineárnosti Schrodingerovej rovnice.

Dôsledok 1: (dôsledok pre homogénnu lineárnu DR $g(x) = 0$). Ak y_1 a y_2 sú riešeniami homogénnej diferenciálnej rovnice, potom ich lineárna kombinácia $y = c_1y_1 + c_2y_2$ je tiež riešením tejto rovnice.

Dôsledok 2: Ak y_h je riešením homogénnej rovnice a y_p je riešením tej istej dif. rovnice s pravou stranou $g(x)$, potom ich súčet $y = y_h + y_p$ je všeobecným riešením lineárnej dif. rovnice s pravou stranou.

Podľa tohto dôsledku je možná nasledovná stratégia riešenia DR: Ak nájdeme jedno riešenie danej nehomogénnej rovnice y_p potom stačí vyriešiť príslušnú homogénnu rovnicu a jej všeobecné riešenie y_h pripočítame k y_p . Cauchyho veta nám zase zabezpečuje, že už iné riešenie neexistuje.

Partikulárne riešenia y_p sa naučíme hľadať tromi metódami: variáciou konštant, metódou neurčitých koeficientov a prechodom do komplexnej roviny.

5.2.1 Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu

Všeobecný tvar takejto DR je: $a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$. Ak $a_1(x) \neq 0$ potom:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (5.19)$$

kde $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, $Q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$. Rovnicu budeme riešiť v dvoch krokoch:

i) najskôr vyriešime homogénnu rovnicu metódou separácie premenných:

$$y' + P(x)y = 0 \quad (5.20)$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int P(x) dx \quad (5.21)$$

$$y_h = A \exp\left(- \int P(x) dx\right) \quad (5.22)$$

ii) Na hľadanie partikulárneho riešenia použijeme metódu variácie konštant, s ktorou sa podrobnejšie zoznámime v ďalšej kapitole. Základná myšlienka spočíva v tom, že konštantu A v homogennom riešení (5.22) zameníme za funkciu $A(x)$, čiže:

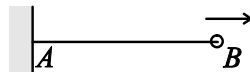
$$y = A(x) \exp\left(- \int P(x) dx\right) \quad (5.23)$$

Dosadením do (5.19) po úpravách:

$$\begin{aligned} Q(x) &= A'(x) \exp\left(-\int P(x) dx\right) \\ \int dA &= \int Q(x) \exp\left(\int P(x) dx\right) dx \\ A(x) &= \int Q(x) \exp\left(\int P(x) dx\right) dx + C \\ y &= A(x) \exp\left(-\int P(x) dx\right) = \\ &= \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx\right] e^{-\int P(x) dx} + ce^{-\int P(x) dx} \quad (5.24) \end{aligned}$$

Príklad 13 Máme $L_0 = 1m$ kvalitného gumového lana - tak kvalitného, že sa všade natáha rovnako. Jeho ľavý koniec A je pevne uchytený a pravý koniec sa začne od určitého okamihu pohybovať rýchlosťou $v_B = 10 \text{ m/s}$. V tom istom okamihu začne liezť mucha z bodu A po lane rýchlosťou $v_m = 1 \text{ m/s}$ (voči lanu). Dolezie mucha do bodu B ? Ak áno, kedy?

Riešenie:



Rýchlosť ľubovoľného miesta x lineárne stúpa z nulovej hodnoty v bode A na hodnotu v_B v mieste B :

$$v(x) = \frac{v_B}{L_0 + v_B t} x$$

Rýchlosť muchy v bode x :

$$v = \dot{x} = \frac{v_B}{L_0 + v_B t} x + v_m \quad (5.25)$$

Dostali sme nehomogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu, ktorú vyriešime v dvoch krokoch. Najskôr nájdeme homogénne riešenie. Po separácii premenných:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v_B}{L_0 + v_B t} dt \quad (5.26)$$

$$\ln|x| = \ln|L_0 + v_B t| + \ln|c| \quad (5.27)$$

$$x = c(L_0 + v_B t) \quad (5.28)$$

V ďalšej časti sa na konštantu c budeme pozerat' ako na funkciu $c(t)$:

$$x = c(t)(L_0 + v_B t) \quad (5.29)$$

$$\dot{x} = \dot{c}(L_0 + v_B t) + c(t)v_B \quad (5.30)$$

Dosadením do (5.25) a úpravami:

$$\dot{c} = \frac{v_m}{L_0 + v_B t} \quad (5.31)$$

$$c(t) = \frac{v_m}{v_B} \ln|L_0 + v_B t| + K \quad (5.32)$$

získame všeobecné riešenie:

$$x(t) = \frac{v_m}{v_B} \ln|L_0 + v_B t|(L_0 + v_B t) + K(L_0 + v_B t) \quad (5.33)$$

Konštantu K určíme z počiatočnej podmienky $x(0) = 0 \Rightarrow K = -\frac{v_m}{v_B} \ln|L_0|$. Mucha dosiahne koniec lana vtedy, keď

$$x(t) = L_0 + v_B t$$

Z čoho pre čas t vyplýva:

$$t = \frac{L_0 \left[\exp\left(\frac{v_B}{v_m}\right) - 1 \right]}{v_B} \quad \diamond$$

Príklad 14 Za aký čas sa teleso zohriate na $T_0 = 100^\circ\text{C}$ ochladí na 25°C , keď sa za 10 minút ochladilo na 60°C ? V miestnosti je udržiavaná konštantná teplota $T_m = 20^\circ\text{C}$. Predpokladajte, že rýchlosť ochladzovania je úmerná rozdielu teplôt!

Riešenie: Podľa predpokladov úlohy:

$$\dot{T} = k[T_m - T(t)] \Rightarrow \dot{T} + kT(t) = kT_m \quad (5.34)$$

Pomocou homogénneho riešenia $T_h = A \exp(-kt)$ nájdeme všeobecné

$$T = T_m + (T_0 - T_m) \exp(-kt)$$

Po dosadení zadaných hodnôt zistíme, že teleso sa ochladí za $t = 40 \text{ min}$. \diamond

5.2.2 Lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov

Homogénne lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientami

Budeme sa zaoberať rovnicami druhého rádu:

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (5.35)$$

Riešenie hľadáme v tvare

$$y = A \exp(\alpha x) \quad (5.36)$$

Dôvodov je niekoľko:

- i) podľa Cauchyho vety o jednoznačnosti, ak nájdeme akýmkoľvek regulérnym spôsobom riešenie (s danou počiatočnou podmienkou), potom už iné neexistuje. Naša stratégia je založená na tipovaní. Ak náš tip na riešenie (5.35) nevýjde, skúsime iný
- ii) derivácia exponenciálnej funkcie je opäť exponenciála, a preto každý člen rovnice ju bude obsahovať. DR sa zmenia na algebraické, ktoré už riešiť vieme.

Skutočne, po dosadení (5.36) do (5.35):

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \quad (5.37)$$

prícom

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (5.38)$$

Algebraickú rovnicu (5.37) nazývame *charakteristickou*. Tvar všeobecného riešenia závisí od povahy koreňov $\alpha_{1,2}$. Môžu nastať tri prípady, ktoré samostatne vyšetríme:

PRÍPAD 1. Oba korene charakteristickej rovnice (5.37) sú reálne, t.j. $a^2 - 4b > 0$ potom dosadením do (5.36) a využitím princípu superpozície všeobecné riešenie má tvar:

$$y = c_1 \exp\left[\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}x\right] + c_2 \exp\left[\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}x\right] \quad (5.39)$$

Príklad 15 Vyriešte $y'' - y' - 2y = 0$ s počiatočnou podmienkou: $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$

Riešenie: Charakteristická rovnica $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ má koreň $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$: $y = c_1 \exp(2x) + c_2 \exp(-x)$. Dosadením počiatočných podmienok $c_1 = 1$ a $c_2 = 2$:

$$y = \exp(2x) + 2 \exp(-x) \quad \diamond$$

PRÍPAD 2. Charakteristická rovnica (5.37) má dvojnásobný koreň $\alpha_{1,2} = -\frac{a}{2}$, to znamená: $a^2 - 4b = 0$ a riešenie (5.36) by mohlo byť:

$$y = c_1 \exp\left(-\frac{a}{2}x\right)$$

Tú však treba určiť z dvoch nezávislých počiatočných podmienok, čo vo všeobecnosti nie je možné.

Príklad 16 Vyriešte DR $y'' - 4y' + 4y = 0$ s počiatočnými podmienkami: $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

Riešenie: Charakteristická rovnica $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ má koreň $\alpha_{1,2} = 2$ a riešenie $y = c_1 \exp(2x)$. Z prvej počiatočnej podmienky dostaneme $c_1 = 2$ z druhej $c_1 = \frac{3}{2}$ čo nemožno splniť súčasne. \diamond

Neúspech v predchádzajúcom príklade bol spôsobený tým, že riešenie nie je úplné, potrebujeme nájsť jeho "druhú časť". Použijeme metódu variácie konštánt a na konštantu A začneme hľadať ako na funkciu. Dosadením (5.36) do (5.35) a postupným preskupením členov:

$$A'' + A'[2\alpha + a] + A[\alpha^2 + a\alpha + b] = 0 \quad (5.40)$$

Obe zátvorky sú nulové a $A'' = 0 \Rightarrow A = c_1 + c_2x$. Všeobecné riešenie (5.36) bude mať tvar:

$$y = c_1 \exp\left(-\frac{a}{2}x\right) + c_2x \exp\left(-\frac{a}{2}x\right) \quad (5.41)$$

Tento poznatok zovšeobecníme do nasledovnej vety:

Veta. Ak α je m -násobným koreňom rovnice (5.18), potom okrem funkcií $\exp(\alpha x)$ sú riešeniami danej rovnice aj funkcie $x \exp(\alpha x)$, $x^2 \exp(\alpha x)$, ..., $x^{m-1} \exp(\alpha x)$ a všeobecné riešenie je ich lineárnou kombináciou:

$$y = c_1 \exp(\alpha x) + c_2x \exp(\alpha x) + \dots + c_mx^{m-1} \exp(\alpha x)$$

Použitie vety ukážme v nasledovnom príklade:

Príklad 17 Nájdite všeobecné riešenie $y''' = 0$

Riešenie: Charakteristická rovnica vedie k trojnásobnému koreňu $\alpha = 0$ a podľa vety všeobecné riešenie bude mať tvar: $y = c_1 + c_2x + c_3x^2$ \diamond

PRÍPAD 3. Korene charakteristickej rovnice nie sú reálne, t.j. $a^2 - 4b < 0$. Pre charakteristický koreň dostaneme:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} = -\gamma \pm i\delta \quad (5.42)$$

a

$$y = c_1 \exp [(-\gamma + i\delta)x] + c_2 \exp [(-\gamma - i\delta)x] \quad (5.43)$$

Tento výsledok je na prvý pohľad neprehľadný a preto ho upravme. Využitím Eulerovho vzťah:

$$\begin{aligned} y &= \exp(-\gamma x) [c_1 (\cos \delta x + i \sin \delta x) + c_2 (\cos \delta x - i \sin \delta x)] = \\ &= \exp(-\gamma x) [A \cos \delta x + B \sin \delta x] \end{aligned} \quad (5.44)$$

kde $A = (c_1 + c_2)$ a $B = i(c_1 - c_2)$, ktoré sú vo všeobecnosti komplexné. Ak sú počiatočné podmienky reálne, čo je prípad všetkých fyzikálnych úloh, potom aj konštanty A, B sú reálne.⁹ Rovnicu (5.44) možno za tohto predpokladu ďalej upraviť:

$$\begin{aligned} y &= \exp(-\gamma x) \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \delta x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \delta x \right) \\ y &= D \exp(-\gamma x) (\cos \varphi \cos \delta x + \sin \varphi \sin \delta x) \end{aligned} \quad (5.45)$$

kde $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \varphi$, $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \varphi$ a $\sqrt{A^2 + B^2} = D$. Zo súčtových vzorcov¹⁰

$$y = D \exp(-\gamma x) \cos(\delta x - \varphi) \quad (5.46)$$

Mali by sme si zvyknúť na všetky tri zápisy všeobecného riešenia (5.44), (5.45), (5.46), pretože sa v praxi často vyskytujú.

Príklad 18 Vyšetrite pohyb tlmeného oscilátora bez vynucujúcej sily

Riešenie: Pohybová rovnica má tvar: $m \ddot{x} + \gamma \dot{x} + kx = 0$. Zavedením premenných $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a $\lambda = \frac{\gamma}{2m}$ nájdeme charakteristické korene:

$$\alpha_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

Budeme rozoznávať tri prípady:

⁹Nech $y(0) = \text{Re}_1$ potom $c_1 + c_2 = \text{Re}_1$. Z druhej počiatočnej podmienky $y'(0) = \text{Re}_2$ vyplýva $-\gamma(c_1 + c_2) + i\delta(c_1 - c_2) = \text{Re}_2$. Konštanty c_1 a c_2 sú komplexne združené, pretože ich súčet je rýdzo reálny a rozdiel rýdzo imaginárny.

¹⁰ $\cos \varphi \cos \delta x + \sin \varphi \sin \delta x = \cos(\delta x - \varphi)$

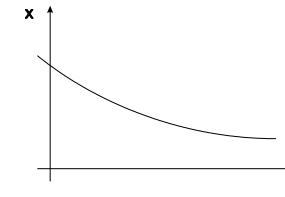
PRÍPAD 1: Oba korene charakteristickej rovnice sú reálne: $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$. Ide o silné tlmenie a pre výchylky platí:

$$x = A \exp \left[\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \right) t \right] + B \exp \left[\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \right) t \right] \quad (5.47)$$

Hodnoty konštant A, B sa určia z počiatočných podmienok. Ak predpokladáme, že obe čísla A, B sú kladné, potom rýchlosť v je záporná¹¹:

$$v = \frac{dx}{dt} = \exp(-\lambda t) \left[A\alpha_1 \exp \left(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t \right) + B\alpha_2 \exp \left(-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t \right) \right] < 0 \quad (5.48)$$

a výchylka monotónne klesá $x \rightarrow 0$ (obr. V.7).



obr. V.7

K rovnakému výsledku by sme prišli, ak by obe konštanty A, B boli záporné. Na záver predpokladajme, že konštanty A, B majú opačné znamienka. Potom podľa rovnice (5.47) teleso prechádza cez rovnovážnu polohu $x = 0$ iba v jednom čase t_0 :

$$t = t_0 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \ln \left(-\frac{B}{A} \right). \quad (5.49)$$

a zastaví sa ($v = \frac{dx}{dt} = 0$) tiež iba v jednom čase t_1 :

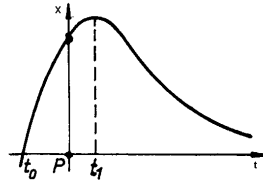
$$t = t_1 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \ln \left[-\frac{B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})}{A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})} \right] \quad (5.50)$$

Porovnaním oboch výrazov $t_1 < t_0$ je zrejmé, že rýchlosť zmení znamienko iba raz.

Záver:

→ Ak $x < 0$ v čase $t < t_0$, potom $x > 0$ v čase $t > t_0$. Výchylka stále stúpa a teleso sa zastaví v čase $t = t_1$, potom už len klesá ($x > 0$) a limitne sa blíži k rovnovážnej polohe (obr. V.8).

¹¹ $\alpha_1, \alpha_2 < 0$



obr. V_8

→ Ak $x > 0$ v časť $t < t_0$ potom $x < 0$ v čase $t > t_0$. Výhyľka klesá, v čase $t = t_1$ sa teleso zastaví a začne sa limitne blížiť do rovnovážnej polohy. Pohyb v oboch prípadoch je aperiodický

PRÍPAD 2: Charakteristická rovnica má dvojnásobný koreň: $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$ $x = c_1 \exp(\alpha_1 t) + c_2 t \exp(\alpha_1 t)$. Diskusia dáva podobné výsledky ako v predchádzajúcom prípade. Stačí si uvedomiť, že podľa L'Hospitalovho pravidla:

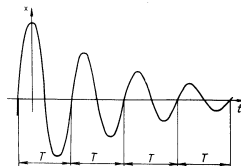
$$\lim_{t \rightarrow \infty} [t \exp(-\lambda t)] = 0$$

Pohyb je opäť aperiodický. Hovoríme, že sa jedná o kritické tlmenie.

PRÍPAD 3: Charakteristická rovnica má komplexné korene: $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$. Ide o periodický pohyb a všeobecné riešenia napíšeme vo všetkých troch tvaroch (5.44), (5.45), (5.46):

$$\begin{aligned} x &= c_1 \exp \alpha_1 t + c_2 \exp \alpha_2 t = \\ &= \exp(-\lambda t) \left[A \cos \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + B \sin \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t \right] = \\ &= D \exp(-\lambda t) \left[\cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t - \varphi \right) \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

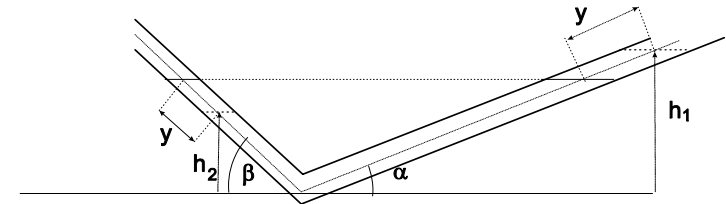
Hoci funkcia $x(t)$ je neperiodická, má zmysel hovoriť o perióde, pretože lokálne maximá a minimá sa periodicky opakujú s periódou $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Tá sa líši od periódy vlastných kmitov oscilátora $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Podobne má zmysel hovoriť o amplitúde, ak pod ňou rozumieme absolútnu hodnotu funkcie v lokálnych extrémoch. Amplitúda potom exponenciálne klesá: $D \exp(-\lambda t)$ (obr.V.9). Konštanty určíme z počiatočných podmienok



obr. V.9

◇

Príklad 19 V sklenenej trubici konštantného prierezu je kvapalina s hustotou ρ , s dĺžkou kvapalinového stĺpca l (obr.V.10) Po vychýlení stĺpca z rovnovážnej polohy o l_0 začne kmitať. Zanedbajte trecie a kapilárne sily a vypočítajte časový priebeh tejto výhyľky.



obr. V.10

Riešenie: Kmitavý pohyb spôsobuje sila, ktorá sa rovná hydrostatickej tlakovej sile

$$S(h_1 - h_2) \rho g = S \rho g (y \sin \alpha + y \sin \beta)$$

Je orientovaná proti vychýleniu kvapaliny a pohybová rovnica nadobudne tvar:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -S \rho g y (\sin \alpha + \sin \beta)$$

Keďže hmotnosť kvapaliny $m = S \rho l$:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{h}{l} (\sin \alpha + \sin \beta) y$$

čo je DR harmonických kmitov. Výslednú výhyľku zapíšeme v tvare (5.46)

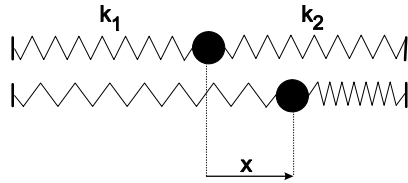
$$y = c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{h}{l} (\sin \alpha + \sin \beta)} t + \delta \right)$$

Po dosadení počiatočných podmienok $y(0) = l_0$, $\dot{y}(0) = 0$:

$$y = l_0 \cos \left(\sqrt{\frac{h}{l} (\sin \alpha + \sin \beta)} t \right) \quad \diamond$$

Príklad 20 Teleso s hmotnosťou m je pripevnené na pružinách s tuhosťami k_1 a k_2 . V čase $t = 0$ s sme ho vychýlili z rovnovážnej polohy do vzdialenosti l_0 . Nájdite jeho polohu v ľubovoľnom čase.

Riešenie:



Nech je teleso v čase t vychýlené z rovnovážnej polohy o vzdialenosť x . Pohybová rovnica bude mať tvar:

$$m\ddot{x} = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x$$

čo vedie k riešeniu $x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t + \varphi\right)$. Dosadením počiatočných podmienok $x(0) = l_0$, $\dot{x}(0) = 0$ nájdeme polohu telesa v ľubovoľnom čase:

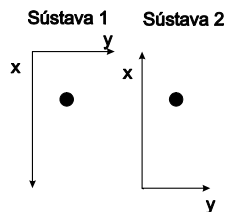
$$x = l_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \diamond$$

Znižovanie rádu diferenciálnych rovníc

Diferenciálne rovnice nižších rádoov sa mnohokrát ľahšie riešia a preto DR vyšších rádoov sa vhodnými substitúciami na ne prevádzajú.

Príklad 21 Vyšetrite rýchlosť telesa pri voľnom páde v odporujúcom prostredí.

Riešenie: Pri malých rýchlostiach je odporová sila úmerná prvej mocnine v , pri veľkých rýchlostiach jej druhej mocnine. Dôležitou časťou riešenia úloh z dynamiky je správne zostavenie pohybových rovníc. Rovnice sú závislé od voľby a orientácie osí súradnicového systému. Uvažujme o dvoch sústavách s opačnými orientáciami osí y (obr.V.11) a zostavme pohybové rovnice pre padajúce ako aj vrhnuté teleso smerom nahor



obr. V.11

$$\begin{array}{l} |\vec{F}_o| = \gamma v \quad \text{pád nadol} \quad \text{vrh nahor} \\ \text{Sústava č.1} \quad m\ddot{x} = +mg - \gamma\dot{x} \quad m\ddot{x} = +mg - \gamma\dot{x} \\ \text{Sústava č.2} \quad m\ddot{x} = -mg - \gamma\dot{x} \quad m\ddot{x} = -mg - \gamma\dot{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} |\vec{F}_o| = \gamma v^2 \quad \text{pád nadol} \quad \text{vrh nahor} \\ \text{Sústava č.1} \quad m\ddot{x} = +mg - \gamma v^2 \quad m\ddot{x} = +mg + \gamma v^2 \\ \text{Sústava č.2} \quad m\ddot{x} = -mg + \gamma v^2 \quad m\ddot{x} = -mg - \gamma v^2 \end{array}$$

Odporová sila je vždy opačne orientovaná, ako vektor rýchlosti. V druhom prípade je výraz $\gamma v^2 \geq 0$ a preto správnu orientáciu odporovej sily musíme „umelo dorábať“, podľa aktuálnej situácie. Voľný pád telesa vyšetříme v súradnicovom systéme 2:

$$m\ddot{x} = -mg + \gamma v^2 \quad (5.52)$$

Fyzikálna intuícia nám hovorí, že teleso najskôr začne prudko zvyšovať rýchlosť v , čo má za následok zväčšovanie odporovej sily. Tá sa postupne vyrovnáva s tiažovou, až nastane ich rovnováha. V tomto okamihu teleso dosiahne hraničnú rýchlosť v_k , pre ktorú platí:

$$m\ddot{x} = 0 = -mg + \gamma v_k^2 \implies \gamma = \frac{mg}{v_k^2}$$

Dosadením do (5.52), zavedením substitúcie $\ddot{x} = \dot{v}$ a postupnými úpravami:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{v_k^2}(v_k^2 - v^2) \quad (5.53)$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v_k^2 - v^2} = -\frac{g}{v_k^2} \int_0^t dt \quad (5.54)$$

$$\frac{1}{2v_k} \ln \frac{v_k + v}{v_k - v} = -\frac{g}{v_k^2} t \quad (5.55)$$

$$v = -v_k \frac{1 - \exp(-2gt/v_k)}{1 + \exp(-2gt/v_k)} \quad (5.56)$$

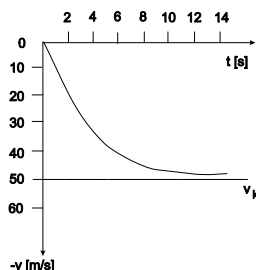
Analýzujeme pohyb v limitných prípadoch: Na začiatku je rýchlosť $v \ll v_k \implies 2gt \ll v_k$ a pri rozvoji exponenty v rovnici (5.56) sa stačí ohraničiť iba prvými dvomi členmi:

$$\exp(-2gt/v_k) \approx 1 - \frac{2gt}{v_k} \quad (5.57)$$

Spätným dosadením do (5.53) $v = -gt$. Výsledok možno interpretovať tak, že v začiatočnom štádiu teleso padá voľným pádom a odpor vzduchu nezohráva takmer žiadnu úlohu. Pri ďalšom zvyšovaní rýchlosti, úloha odporovej sily narastá a v oblasti kritickej rýchlosti $v_k \ll 2gt$ z rovnice (5.56):

$$\begin{aligned} \frac{v_k - v}{v_k} &= 1 - \frac{1 - \exp(-2gt/v_k)}{1 + \exp(-2gt/v_k)} = \\ &= \frac{2 \exp(-2gt/v_k)}{1 + \exp(-2gt/v_k)} \approx 2 \exp(-2gt/v_k) \end{aligned} \quad (5.58)$$

Zo skúseností vieme, že kritická rýchlosť parašutistu bez otvoreného padáka je $v_k \approx 50 \frac{m}{s}$. Ak ju dosadíme do (5.58) zistíme, že po uplynutí $t = 10s$ teleso získa rýchlosť, ktorá sa nepatrne líši od kritickej: $v_k - v \approx 2m/s$. Závislosť je znázornená na obr.V.12



obr. V.12

Kritická rýchlosť s otvoreným padákom je podstatne nižšia $v_k \approx 10 \frac{m}{s}$. Parašutista po otvorení padáka pociťuje prudký náraz, pretože za krátky čas jeho rýchlosť poklesne z hodnoty $50m/s$ na $10m/s$. \diamond

5.2.3 Lineárne nehomogénne DR. s konštantnými koeficientami

Lineárne nehomogénne DR budeme riešiť podľa nasledovného návodu:

i) nájdeme homogénne riešenie DR y_h

ii) nájdeme partikulárne riešenie y_p jednou z metód

- variácia konštant
- metóda neurčitých koeficientov
- prechod do komplexnej roviny

iii) všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice dostaneme sčítaním $y = y_h + y_p$

iv) neznáme konštanty určíme z počiatočných podmienok.

Homogénne riešenie y_h nájdeme podľa predchádzajúcej kapitoly. Ostáva nám zvládnuť techniku hľadania partikulárnych riešení y_p .

5.2.4 Metódy hľadania partikulárnych riešení

Metóda variácie konštant

Na hľadanie riešenia diferenciálnej rovnice 2. rádu s pravou stranou môžeme použiť Lagrangeovu metódu variácie konštant. Ukážeme si ju na diferenciálnej rovnice druhého stupňa:

$$y'' + ay' + by = g(x) \quad (5.59)$$

Všeobecné riešenie y sa konštruuje z lineárne nezávislých riešení y_1, y_2 homogénnej DR: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, pričom konštanty c_1 a c_2 zameníme na funkcie t.j.

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 \quad (5.60)$$

Po zderivovaní podľa premennej x :

$$y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2' \quad (5.61)$$

Pri ďalších úpravách budeme predpokladať, že

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \quad (5.62)$$

Dôvodov je hneď niekoľko:

i) Ak dosadíme príslušné y' a y'' do (5.59) získame iba jednu rovnicu, z ktorej nedokážeme určiť obe funkcie $c_1(x)$ a $c_2(x)$. Na ich nájdenie potrebujeme mať práve dve nezávislé rovnice.

ii) Ak by sme nezvolili predpoklad (5.62), druhá derivácia y'' bude obsahovať aj druhé derivácie c_1' , c_1'' a po ich dosadení do (5.59) by sme získali diferenciálnu rovnicu druhého rádu pre c_1 a c_2 , ktorú nevieme riešiť.

Predpoklad (5.62) zatiaľ považujeme iba za podmienený, nemáme žiadnu záruku, či ho dokážeme splniť. Ak sa nám to podarí, našli sme všeobecný recept na hľadanie riešení DR (pretože veta o jednoznačnosti nepripúšťa iné riešenie), ak budeme mať "smolu" a nepodarí sa nám to, vymyslíme inú stratégiu. Zderivujeme y' :

$$y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' \quad (5.63)$$

Po dosadení do (5.59) s predpokladom (5.62) a menších úpravách:

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 (y_1'' + a y_1' + b y_1) + c_2 (y_2'' + a y_2' + b y_2) = g(x) \quad (5.64)$$

Koeficienty pri c_1 a c_2 sa rovnajú nule, pretože y_1 a y_2 sú riešeniami rovnice bez pravej strany. Dostávame jednoduchý vzťah:

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = g(x) \quad (5.65)$$

ktorý spolu s (5.62) poskytujú sústavu lineárnych rovníc na určenie c_1 a c_2 . Keďže y_1 a y_2 sú lineárne nezávislé, determinant sústavy rovníc:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.66)$$

a riešenie existuje:

$$c_1 = \frac{W_1}{W} \quad c_2 = \frac{W_2}{W} \quad (5.67)$$

kde W, W_1, W_2 sú determinanty sústavy a W nazývame Wronskián:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}, W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}, W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad (5.68)$$

Integráciou (5.67)

$$c_1 = \int \frac{W_1}{W} dx \quad \text{a} \quad c_2 = \int \frac{W_2}{W} dx \quad (5.69)$$

Z uvedeného vyplýva, že rovnicu (5.62), ktorá bola doteraz iba podmienená, dokážeme splniť ak $W \neq 0$. Vtedy sú funkcie y_1, y_2 lineárne nezávislé a tvoria tzv. fundamentálny systém¹².

Príklad 22 Vyriešte DR $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$.

¹²Wronskián W je dôležitým kritériom lineárnej závislosti, resp. lineárnej nezávislosti riešení y_1, y_2 . Skutočne, ak $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$ potom integráciou rovnice $\frac{y_2'}{y_2} = \frac{y_1'}{y_1}$ dostaneme $y_2 = C y_1$ čo vyjadruje lineárnu závislosť oboch riešení.

Riešenie: Najskôr nájdeme homogéne riešenie: $y_1 = \cos x$ a $y_2 = \sin x$. Metódou variácie konštánt pomocou vzťahu (5.69) nájdeme všeobecné riešenie:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \quad (5.70)$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos^3 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x} \quad (5.71)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos^3 x} \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (5.72)$$

$$c_1 = \frac{W_1}{W} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x} \implies c_1 = \int -\frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = -\frac{1}{2 \cos^2 x} + A \quad (5.73)$$

$$c_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{\cos^2 x} \implies c_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + B \quad (5.74)$$

Dosadením do (5.60)

$$y = A \cos x + B \sin x - \frac{1}{2 \cos x} + \sin x \tan x \quad \diamond$$

Poznámka: Pre fundamentálny systém platí dôležitý vzťah, ktorý si odvodíme. Nech funkcie y_1 a y_2 sú homogénnymi riešeniami DR:

$$y_1'' + a(x) y_1' + b(x) y_1 = 0 \quad y_2'' + a(x) y_2' + b(x) y_2 = 0$$

Vynásobme prvú rovnicu funkciou y_2 , druhú funkciou y_1 a odčítajme ich od seba:

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + a(x) [y_1 y_2' - y_2 y_1'] = 0 \quad (5.75)$$

V rovnici (5.75) využijeme identitu:

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = \frac{d}{dx} [y_1 y_2' - y_2 y_1'] = \frac{d}{dx} W$$

a výraz upravíme¹³:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} + a(x) W &= 0 \\ W &= C_2 \exp\left(\int -a(x) dx\right) \end{aligned} \quad (5.76)$$

¹³ W je Wronskián $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = [y_1 y_2' - y_2 y_1']$

Tento vzťah oceníme v prípadoch, keď zo štruktúry rovnice dokážeme uhádnuť iba jedno partikulárne riešenie y_1 . Vtedy stačí použiť rovnicu¹⁴(5.76):

$$\begin{aligned} y_1 y' - y y_1' &= C_2 \exp\left(\int -a(x) dx\right) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) &= C_2 y_1^{-2} \exp\left(-\int a(x) dx\right) \\ \frac{y}{y_1} &= C_1 + C_2 \int y_1^{-2} \left[\exp\left(\int -a(x) dx\right)\right] dx \\ y &= C_1 y_1 + C_2 y_1 \int y_1^{-2} \left[\exp\left(-\int a(x) dx\right)\right] dx \end{aligned}$$

Z čoho pre hľadanú funkciu $y = y_2$:

$$y_2 = y_1 \left[\int y_1^{-2} \left[\exp\left(-\int a(x) dx\right) \right] dx \right] \quad (5.77)$$

Príklad 23 Nájďte fundamentálny systém pre rovnicu $y'' + ay' + by = 0$, keď $a^2 - 4b = 0$.

Riešenie: S touto rovnicou sme sa už stretli. Ak budeme hľadať riešene v tvare: $A \exp(ax)$, charakteristická rovnica bude mať dvojnásobný koreň a $y_1 = \exp\left(-\frac{a}{2}x\right)$. Druhé riešenie y_2 určíme zo vzťahu (5.77):

$$\begin{aligned} y_2 &= \exp\left(-\frac{a}{2}x\right) \left[\int \exp(ax) \left[\exp\left(\int -adx\right) \right] dx \right] \\ y_2 &= x \exp\left(-\frac{a}{2}x\right) \quad \diamond \end{aligned}$$

K rovnakému výsledku sme sa dopracovali pri použití metódy variácie konštánt.

Príklad 24 Nájďte partikulárne riešenie Eulerovej rovnice $x \neq 0$, keď $(p_0 - 1)^2 - 4q_0 = 0$:

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0 \quad (5.78)$$

$$y'' + p_0 \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} q_0 y = 0 \quad (5.79)$$

Riešenie: Stačí si uvedomiť, že pri derivovaní funkcie x^λ sa mocniteľ znižuje o jedničku a preto jedno partikulárne riešenie bude mať tvar:

$$y = x^\lambda$$

Po dosadení do DR dostaneme kvadratickú rovnicu:

$$\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0$$

s koreňmi:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(p_0 - 1) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4}(p_0 - 1)^2 - q_0\right]}$$

Ak $(p_0 - 1)^2 - 4q_0 = 0$ kvadratická rovnica má dvojnásobný koreň $y_1 = x^{-\frac{1}{2}(p_0-1)}$. Jeho dosadením do (5.77) určíme druhé riešenie:

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}(p_0-1)} \left[\int x^{(p_0-1)} \left[\exp\left(\int -\frac{p_0}{x} dx\right) \right] dx \right] = x^{-\frac{1}{2}(p_0-1)} \ln x \quad \diamond$$

Metóda neurčitých koeficientov

Metóda variácie konštánt je dobrá stratégia na riešenie diferenciálnych rovníc, ale vzhľadom na jej pracnosť a časovú náročnosť nepatrí medzi veľmi obľúbené. Pokiaľ to špecifický tvar pravej strany DR umožňuje, používa sa oveľa efektívnejšia metóda tzv. metóda neurčitých koeficientov, založená na princípe superpozície. Ak totiž funkcia $x_p(t)$ je konkrétnym riešením nehomogénnej LDR a $x_h(t)$ je všeobecným riešením homogénnej rovnice, potom ich súčet $x = x_p(t) + x_h(t)$ je všeobecným riešením danej nehomogénnej rovnice. Partikulárne riešenie v špeciálnych prípadoch (keď na pravej strane rovnice je konštanta, exponenciálna funkcia, trigonometrická funkcia, resp. ich kombinácie) navrhne tak, aby malo rovnaký tvar, ako pravá strana $g(t)$ až na koeficienty, ktoré určíme po jeho dosadení do DR.

Pravá strana KONŠTANTA: $g(t) = \text{const}$

Partikulárne riešenie zvolíme v tvare $x_p(t) = ct^m$, kde m je najnižšia derivácia vyskytujúca sa v rovnici. Dôvod je jednoduchý, m -tá derivácia funkcie $x_p(t)$ vytvorí konštantu, ktorá sa musí rovnať konštante $g(t)$ na pravej strane rovnice. Všetky vyššie derivácie ako m - *tého* rádu dajú nulu a nebudú prispievať k určeniu neznámeho koeficienta c .

Príklad 25 Nájďte polohu telesa $x(t)$ pri voľnom páde v odporovom prostredí s počiatočnými podmienkami $x(0) = H, \dot{x}(0) = 0$

¹⁴Zvoľme $y_2 = y$.

Riešenie: Spôsobu zostavenie pohybovej rovnice sme sa už venovali:

$$m \ddot{x} = -mg - \gamma \dot{x} \quad (5.80)$$

$$m \ddot{x} + \gamma \dot{x} = -mg \quad (5.81)$$

Najnižšia derivácia na ľavej strane je prvá a preto partikulárne riešenie $x_p = At^1$. Dosadením do (5.80) dostaneme

$$\gamma A = -mg \implies A = -\frac{mg}{\gamma} \implies x_p = -\frac{mg}{\gamma} t \quad (5.82)$$

Pripočítaním všeobecného riešenia homogénnej rovnice:

$$x(t) = x_p + x_h = -\frac{mg}{\gamma} t + c_1 + c_2 \exp\left(-\frac{\gamma}{m} t\right) \quad (5.83)$$

Po dosadení počiatočných podmienok:

$$x(t) = H + \frac{m^2}{\gamma^2} g \left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m} t\right)\right] - \frac{mg}{\gamma} t \quad (5.84)$$

Skúsme urobiť limitný prechod $\gamma \rightarrow 0$, čo by zodpovedalo voľnému pádu v neodporovom prostredí. Druhý a tretí člen rovnice vyjadríme pomocou parametra $\beta = \frac{\gamma}{m}$ a vypočítajme jeho limitu podľa L'Hospitalovho pravidla:

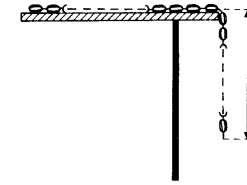
$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} g \frac{[1 - \exp(-\beta t)] - \beta t}{\beta^2} &= \lim_{\beta \rightarrow 0} g \frac{t \exp(-\beta t) - t}{2\beta} = \\ &= \frac{g}{2} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{t(\exp(-\beta t) - 1)}{\beta} = -\frac{g}{2} t^2 \end{aligned}$$

Je teda zrejmé, že

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} x(t) &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[H + \frac{m^2}{\gamma^2} g \left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m} t\right)\right] - \frac{mg}{\gamma} t \right] \\ &= H - \frac{g}{2} t^2 \end{aligned}$$

Výsledok zodpovedá voľnému pádu v bezodporovom prostredí. \diamond

Príklad 26 Ohybná retiazka dĺžky l je prevesená cez stôl (obr.V.13). Vplyvom vlastnej tiaže sa začne pohybovať. Nájdite ako sa bude meniť dĺžka previsnutej časti $x(t)$, ak v čase $t = 0$ visela zo stola dĺžka l_0 . Najskôr uvažujte pohyb bez trenia a potom s trením.



obr. V.13

Riešenie: Nech dĺžka visiacej časti je x , potom na celú retiazku s hmotnosťou m pôsobí ťižová sila $G = \frac{x}{l} mg$. Podľa Newtonovho zákona $m \ddot{x} = \frac{x}{l} mg$ čo vedie k riešeniu $x = c_1 \exp\left(\sqrt{g/l} t\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{g/l} t\right)$. Dosadením počiatočných podmienok $x(0) = l_0$, $\dot{x}(0) = 0$ pre dĺžku previsnutej časti x dostaneme:

$$x = \frac{l_0}{2} \left[\exp\left(\sqrt{g/l} t\right) + \exp\left(-\sqrt{g/l} t\right) \right] = l_0 \cosh \sqrt{g/l} t$$

V prípade trenia pohybová rovnica bude mať tvar $m \ddot{x} = \frac{x}{l} mg - \mu \frac{(l-x)}{l} mg$. Ide o LDR $\ddot{x} - x \frac{g}{l} (1 + \mu) = -\mu g$ s konštantnou pravou stranou a jej partikulárne riešenie navrhujeme v tvare $x = A \implies A = \frac{l\mu}{(1+\mu)}$. Všeobecné riešenie zostrojíme superpozíciou

$$x = x_p + x_h = \frac{l\mu}{(1+\mu)} + c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}(1+\mu)} t\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}(1+\mu)} t\right)$$

Po dosadení počiatočných podmienok

$$x = \frac{1}{2} \left(l_0 - \frac{l\mu}{1+\mu} \right) \left[\exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}(1+\mu)} t\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}(1+\mu)} t\right) \right] + \frac{l\mu}{(1+\mu)} \diamond$$

Pravá strana EXPONENCIÁLNA FUNKCIA: $g(t) = \exp(\beta t)$

Partikulárne riešenie volíme v tvare $x_p = A \exp(\beta t)$. Exponent eulerovho čísla musí byť totožný s pravou stranou $g(t)$, pretože po dosadení do DR každý člen bude obsahovať faktor $\exp(\beta t)$. Po jeho vykrátení získame rovnicu pre určenie neznámeho koeficientu A .

Príklad 27 Na štartujúce lietadlo začne pôsobiť sila motorov, ktorej veľkosť rastie exponenciálne s časom: $F_0 \exp(3t)$. Nájdite polohu lietadla $x(t)$ keď, naň pôsobí odporová sila vzduchu.

Riešenie: Pohybová rovnica pre štartujúce lietadlo má tvar:

$$m \ddot{x} = -\gamma \dot{x} + F_0 \exp(3t) \quad (5.85)$$

Dosaďme partikulárne riešenie $x_p(t) = A \exp(3t)$ do (5.85):

$$9mA + 3\gamma A = F_0 \Rightarrow A = \frac{F_0}{9m + 3\gamma}$$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{9m + 3\gamma} \exp(3t) \quad (5.86)$$

Homogénna rovnica je totožná s predchádzajúcim príkladom, čiže pre všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice platí:

$$x(t) = x_p + x_h = \frac{F_0}{9m + 3\gamma} \exp(3t) + c_1 + c_2 \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right) \quad \diamond$$

Pravá strana TRIGONOMETRICKÁ FUNKCIA: $g(t) = \sin(\beta t), \cos(\beta t)$

Partikulárne riešenie volíme v tvare superpozície sínusov a kosínusov. Dôvod je veľmi jednoduchý. Po dosadení do DR vzniknú na jej ľavej strane trigonometrické funkcie. Porovnaním koeficientov pri sínusoch a kosínusoch získame rovnice, ktoré nám umožnia nájsť neznáme koeficienty.

Príklad 28 Na teleso s hmotnosťou m , ktoré kmitá na pružine s tuhosťou k , pôsobí periodická sila $F = F_0 \cos(\omega t)$. Nájdite výchylku telesa $x(t)$ v ustálenom stave.

Riešenie: Zostavme pohybovú rovnicu:

$$m \ddot{x} + \gamma \dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (5.87)$$

Jej partikulárne riešenie navrhujeme v tvare:

$$x_p = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (5.88)$$

Vypočítajme príslušné derivácie

$$\dot{x}_p = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \quad (5.89)$$

$$\ddot{x}_p = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) \quad (5.90)$$

a dosaďme ich do (5.87):

$$\cos(\omega t) [-mA\omega^2 + \gamma B\omega + kA] + \sin(\omega t) [-mB\omega^2 - \gamma A\omega + kB] = F_0 \cos(\omega t) \quad (5.91)$$

Na oboch stranách (5.91) porovnajme koeficienty pri $\cos(\omega t)$ a $\sin(\omega t)$. Získame rovnice:

$$A(-m\omega^2 + k) + B\gamma\omega = F_0$$

$$-A\gamma\omega + B(k - m\omega^2) = 0$$

z ktorej určíme neznáme koeficienty A, B :

$$A = F_0 \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (5.92)$$

$$B = F_0 \frac{\gamma\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (5.93)$$

Spätným dosadením do (5.88), partikulárne riešenie má tvar:

$$x_p = F_0 \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \cos(\omega t) + F_0 \frac{\gamma\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \sin(\omega t)$$

Vzťah upravme do vhodnejšej formy:

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} * \left[\frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \cos(\omega t) + \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \sin(\omega t) \right]$$

Zavedením substitúcie:

$$\cos \varphi = \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad \text{a} \quad \sin \varphi = \frac{\gamma\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad (5.94)$$

potom

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} [\cos \varphi \cos(\omega t) + \sin \varphi \sin(\omega t)] =$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad (5.95)$$

príčom podľa (5.94)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\gamma\omega}{k - m\omega^2} \quad (5.96)$$

Zistili sme, že teleso v ustálenom stave $x_h \rightarrow 0$ vykonáva harmonický pohyb s frekvenciou ω a amplitúdou

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}$$

príčom výchylka je fázovo posunutá vzhľadom na vynucujúcu silu o uhol φ (5.96). K podrobnejšej diskusii sa ešte vrátíme. \diamond

Pravá strana POLYNÓM: $g(t) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$

Partikulárne riešenie volíme v tvare polynómu, neznáme koeficienty zistíme dosadením partikulárneho riešenia do DR.

Príklad 29 Vyriešte rovnicu $y'' + 4y = 2x^2 - x$

Riešenie: Partikulárne riešenie navrhujeme v tvare: $y_p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, potom $y_p'' = 2a_2$. Dosadením do danej rovnice porovnáme koeficienty na pravej a ľavej strane:

$$2a_2 + 4a_0 + 4a_1x + 4a_2x^2 = 2x^2 - x$$

Nájďme všeobecné riešenie:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \quad \diamond$$

Na prvý pohľad sa zdá, že už dokážeme riešiť všetky diferenciálne rovnice s pravými stranami (exponenciálnymi, trigonometrickými, konštantnými, polynomičnými) rozoberanými v tejto kapitole. Situácia však nie je až tak priaznivá. Uveďme ilustračný príklad:

Príklad 30 Uvažujme teleso s hmotnosťou $m = 1\text{kg}$, kmitajúce na pružine s tuhosťou $k = 1\text{Nm}^{-1}$, na ktorú pôsobí vynucujúca sila $F = \sin(\omega t)$. Nájďte jeho polohu v ľubovoľnom čase t . Odpor prostredia zanedbávame.

Riešenie: Dosadíme partikulárne riešenie $x_p(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ do pohybovej rovnice telesa:

$$\ddot{x} = -kx + \sin(\omega t) \quad (5.97)$$

Získame sústavu rovníc pre určenie neznámych koeficientov A, B

$$\begin{aligned} -A\omega^2 &= -kA + 1 \\ -B\omega^2 &= -kB \end{aligned}$$

Sústava však nemá riešenie, pretože druhá rovnica sa vo všeobecnosti nedá splniť. Teleso sa určite nejako pohybuje a preto neprichádza do úvahy interpretácia, že pôvodná DR (5.97) nemá žiadne riešenie. \diamond

Príklad 31 Nájďte riešenie $\ddot{x} + 2\dot{x} = t$ s počiatočnými podmienkami $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$

Riešenie: Navrhujeme partikulárne riešenie v štandardnom tvare $x_p = At + B$, dosadíme ho do DR:

$$2A = At + B$$

z čoho dostaneme $A = B = 0$, čo však opäť nevedie k partikulárnemu riešeniu \diamond

Naša stratégia hľadania x_p v niektorých prípadoch je neúčinná a preto sa pokúsme urobiť jej podrobnejšiu a všeobecnejšiu analýzu. Majme teda DR :

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = P(t)e^{\alpha t} \quad (5.98)$$

kde P je polynóm m -tého stupňa. Pokúsme sa hľadať partikulárne riešenie v tvare pravej strany (až na konštanty): $x_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$, kde Q je polynóm n -tého stupňa. Dosadením do (5.98): dostaneme:

$$\ddot{Q}(t)e^{\alpha t} + 2\alpha\dot{Q}(t)e^{\alpha t} + \alpha^2Q(t)e^{\alpha t} + a_1[\dot{Q}(t)e^{\alpha t} + \alpha Q(t)e^{\alpha t}] + a_2Q(t)e^{\alpha t} = P(t)e^{\alpha t}$$

resp.

$$\ddot{Q}(t) + (2\alpha + a_1)\dot{Q}(t) + (\alpha^2 + a_1\alpha + a_2)Q(t) = P(t) \quad (5.99)$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách t na oboch stranách (5.99) získame $n + 1$ rovníc pre určenie hľadaného polynómu $Q(t)$. Vo všeobecnosti môžu nastať tri prípady:

i) α nie je koreňom charakteristickej rovnice

$$k^2 + a_1k + a_2 = 0 \quad (5.100)$$

a preto $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 \neq 0$. Polynóm na ľavej strane (5.99) je rovnakého stupňa ako polynóm P t.j. $n = m$. Jeho $n + 1$ koeficientov vypočítame porovnaním koeficientov na oboch stranách rovnice (5.99)

ii) α je jednonásobným koreňom charakteristickej rovnice (5.100). Potom $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$ ale $2\alpha + a_1 \neq 0$. Derivovaný polynóm $Q(t)$ je $m - \text{tého}$ stupňa, pričom samotný polynóm $Q(t)$ je stupňa $n = m + 1$. Vzhľadom na to, že na určenie neznámych koeficientov Q máme iba $m + 1$ rovníc (potrebovali by sme $m + 2$), zobereme taký tvar polynómu Q , aby obsahoval iba $m + 1$ neznámych koeficientov. To je možné zabezpečiť tak, že $Q(t) = xQ_1(t)$, pričom Q_1 je polynóm stupňa m . Jeho koeficienty vypočítame ako v prípade i, .

iii) α je dvojnásobným koreňom charakteristickej rovnice (5.100). Potom platí $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$, $2\alpha + a_1 = 0$. Polynóm Q je stupňa $n = m + 2$, pričom počet rovníc na jeho určenie je iba n . Z rovnakých dôvodov ako v prípade 2 treba hľadať partikulárne riešenie v tvare $Q(t) = t^2 Q_2(t)$. Na základe rozboru môžeme formulovať nasledovnú vetu:

Nech $P(t)$ je polynóm n -tého stupňa, potom funkcia $y = t^r Q(t) e^{\alpha t}$ je partikulárnym riešením diferenciálnej rovnice:

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = P(t) e^{\alpha t}$$

príčom $Q(t)$ je polynóm stupňa n a r je číslo, ktoré udáva kolkonásobným koreňom charakteristickej rovnice je číslo α .

Ak by pravá strana DR. mala trigonometrický tvar, podobnou diskusiou by sme dospeli k ďalšej vete:

Ak pravá strana DR má tvar:

$$g(t) = e^{\alpha t} [P_1(t) \cos \beta t + P_2(t) \sin \beta t]$$

kde $P_1(t)$ a $P_2(t)$ sú polynómy, potom partikulárne riešenie bude mať tvar:

$$x_p(t) = t^r e^{\alpha t} [R_1(t) \cos \beta t + R_2(t) \sin \beta t]$$

kde $R_1(t)$ a $R_2(t)$ sú polynómy, ktorých stupeň sa rovná vyššiemu zo stupňov polynómu P_1 a P_2 , r je číslo, ktoré udáva kolkonásobným koreňom charakteristickej rovnice sú čísla $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$.

Príklad 32 Riešte DR: $y'' + 2y' = \exp(-2x)$.

Riešenie: 1.krok Charakteristická rovnica $\alpha^2 + 2\alpha = 0$ má dva korene $\alpha_1 = -2$ a $\alpha_2 = 0$ a preto $y_h = c_1 + c_2 \exp(-2x)$. V tomto prípade navrhujeme partikulárne riešenie v tvare: $y_p = x^r Q(x) e^{\alpha x} = Ax^1 \exp(-2x)$, pretože $\alpha = -2$ je jednoduchým koreňom charakteristickej rovnice.

2.krok neznámy koeficient A určíme dosadením partikulárneho riešenia do pôvodnej DR a upravíme:

$$\begin{aligned} -A \exp(-2x) \cdot 2 &= \exp(-2x) \implies A = -0,5 \\ y &= y_h + y_p = c_1 + c_2 \exp(-2x) - 0,5x \exp(-2x) \end{aligned}$$

3.krok Neznáme konštanty c_1 a c_2 určíme z počiatočných podmienok. \diamond

Príklad 33 Riešte DR: $y'' + y' = x$.

Riešenie: Charakteristická rovnica má korene $\alpha_1 = 0$ a $\alpha_2 = -1 \implies y_h = c_1 + c_2 \exp(-x)$. Keďže α_1 je koreňom charakteristickej rovnice, partikulárne riešenie hľadáme v tvare: $y_p = x^r Q(x) e^{\alpha x} = x(Ax + B)$. Dosadením do DR:

$$\begin{aligned} 2A + 2Ax + B &= x \implies A = \frac{1}{2}, B = -1 \\ y &= y_h + y_p = c_1 + c_2 \exp(-x) + x \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) \quad \diamond \end{aligned}$$

Príklad 34 Riešte DR: $y'' - 2y' + y = 3 \exp(x)$.

Riešenie: Charakteristická rovnica má dvojnásobný koreň $\alpha_{1,2} = 1 \implies y_h = c_1 \exp(x) + c_2 x \exp(x)$. Partikulárne riešenie budeme hľadať v tvare: $y_p = x^r Q(x) e^{\alpha x} = Ax^2 \exp(x)$. Dosadením do DR:

$$\begin{aligned} 2A \exp(x) &= 3 \exp(x) \implies 2A = 3 \\ y &= y_h + y_p = e^x [c_1 + c_2 x] + 3 \frac{x^2}{2} \exp(x) \quad \diamond \end{aligned}$$

Príklad 35 Riešte DR: $y'' + y = 2x \sin(x)$.

Riešenie: V tomto prípade $\alpha = 0$ $\beta = 1$ a $\pm i$ sú charakteristické korene homogénnej DR $\implies y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Skonstruujeme partikulárne riešenie v tvare: $y_p = x [(ax + b) \cos x + (a_1 x + b_1) \sin x]$. Koeficienty a, b, a_1, b_1 určíme metódou neurčitých koeficientov:

$$\begin{aligned} y_p'' &= [-ax^2 + (4a_1 - b)x + (2a + 2b_1)] \cos x + \\ &+ [-a_1 x^2 - (4a + b_1)x + (2a_1 + 2b)] \sin x \end{aligned}$$

Dosadením do DR dostaneme:

$$[2a_1 x + (a + b_1)] \cos x + [-2ax + (a_1 + b)] \sin x = 2x \sin x$$

Porovnaním oboch strán získame nasledovné rovnice: $2a_1 x = 0$, $a + b_1 = 0$, $-2a = 2$, $a_1 - b = 0$

$$a = -1 \quad b = 0 \quad a_1 = 0 \quad b_1 = 1$$

a všeobecné riešenie:

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x - x^2 \cos x \quad \diamond$$

Príklad 36 Riešte DR: $y'' - 4y' + 13y = 8e^x + 2x$

Riešenie: Charakteristická rovnica má dva korene: $\alpha_1 = 2 + 3i$, $\alpha_2 = 2 - 3i$ a všeobecné riešenie homogénnej rovnice $y_h = e^{2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$. Využijeme princíp superpozície a riešime DR najskôr s pravou stranou $g_1(x) = 8e^x$ a potom s pravou stranou $g_2(x) = 2x$. V prvom prípade navrhujeme partikulárne riešenie v tvare $y_{p1} = ae^x$ a metódou neurčitých koeficientov určíme $a = \frac{4}{5} \Rightarrow y_{p1} = \frac{4}{5}e^x$. Pre pravú stranu $g_2(x) = 2x$ má partikulárne riešenie tvar: $y_{p2} = ax + b$ a použitím metódy neurčitých koeficientov zistíme: $y_{p2} = \frac{2}{13}x + \frac{8}{169}$. Všeobecné riešenie DR:

$$y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = e^{2x} (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \frac{4}{5}e^x + \frac{2}{13}x + \frac{8}{169} \quad \diamond$$

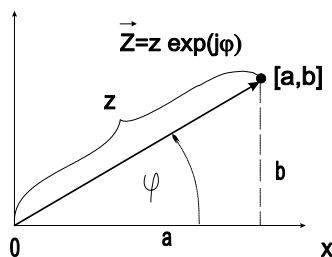
Prechod do komplexnej roviny

Pod komplexným číslom rozumieme usporiadanú dvojicu

$$\hat{Z} = [a, b] = a + ib \quad (5.101)$$

Jeho obrazom v kartézskom pravouhlom súradnicovom systéme je bod P so súradnicami (a, b) . Os x sa volá reálna os, os y imaginárna (obr.V.14). Ak spojíme bod P s počiatkom súradnicovej sústavy, dostaneme tzv. komplexný vektor. Obrazom komplexného čísla je bod, komplexného vektora orientovaná úsečka.

Okrem vyjadrenia komplexného čísla v tvare (5.101) existujú aj ďalšie formy, ktoré môžeme priamo odvodiť z obrázka V.14:



obr. V.14

Pre zložky a, b platí:

$$a = |z| \cos \varphi \quad (5.102)$$

$$b = |z| \sin \varphi \quad (5.103)$$

Pričom $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ sa nazýva *modulom*¹⁵ (absolútnou hodnotou) komplexného čísla, $\varphi = \arctg \left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} \right)$ je polárny uhol (argument, fáza). Z rovností (5.102), (5.103) a (5.101) vyplýva:

$$\hat{Z} = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (5.104)$$

Tento tvar komplexného čísla sa volá *trigonometrický*. Upravíme ho ďalej použitím Eulerovho vzťahu, ktorý sme dokázali v kapitole rady:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = \exp(i\varphi)$$

Dosadením do (5.104) získame tzv. *exponenciálny* tvar komplexného čísla:

$$\hat{Z} = |z| \exp(i\varphi) \quad (5.105)$$

ktorý je vo fyzike najpoužívanejší. Komplexné číslo Z sa skladá zo súčiny modulu $|z|$ a jednotkového faktora $\exp(i\varphi)$ ¹⁶. Faktor možno chápať ako operátor, ktorého aplikovaním na modul $|z|$ otáčame komplexný vektor s dĺžkou $|z|$ o uhol φ , vzhľadom na reálnu os. Pre naše potreby sa ďalej obmedzíme na komplexné funkcie, ktorých fáza lineárne narastá s časom¹⁷ t , $\Psi(t) = \omega t + \varphi$:

$$\hat{Z} = |z| \exp[i\Psi(t)] = |z| \exp[i(\omega t + \varphi)] \quad (5.106)$$

pričom

$$\text{Re}(\hat{Z}) = |z| \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.107)$$

$$\text{Im}(\hat{Z}) = |z| \sin(\omega t + \varphi) \quad (5.108)$$

Vektor \hat{Z} sa otáča v komplexnej rovine okolo počiatku O uhlovou rýchlosťou ω . Jeho koncový bod koná rovnomerný pohyb po kružnici. Zavedením komplexného vektora \hat{Z} v čase $t = 0$: $\hat{Z}(0) = |z| \exp[i(0 + \varphi)] = \hat{Z}_0$ rovnicu (5.106) prepíšeme do nasledovného tvaru:

$$\hat{Z} = \hat{Z}_0 \exp[i\omega t] \quad (5.109)$$

Okamžitú polohu fázora $\hat{Z}(t)$ v ľubovoľnom čase získame pootočením vektora \hat{Z}_0 o uhol ωt . Pri riešení diferenciálnych rovníc fázormi sa stretne s deriváciou komplexného vektora \hat{Z} ¹⁸:

$$\frac{d\hat{Z}}{dt} = i\omega \hat{Z}_0 \exp[i\omega t] = i\omega \hat{Z} = \omega \hat{Z} \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \quad (5.110)$$

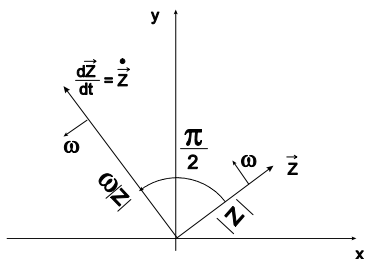
¹⁵Všimnime si, že k druhej mocnine modulu $|z|^2$ sa možno dostať vynásobením $z = [a, b]$ komplexne združeným číslom $z^* = [a, -b]$. Skutočne $zz^* = a^2 + b^2 = |z|^2$

¹⁶ $|\exp(i\varphi)| = 1$

¹⁷tzv. časové vektory

¹⁸Podľa Eulerovho vzťahu: $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i$

Faktor $\exp(i\frac{\pi}{2})$ otočí vektor \hat{Z} o uhol $\frac{\pi}{2}$ a preto vektor $\frac{d\hat{Z}}{dt}$ je kolmý na vektor \hat{Z} s absolútnou hodnotou ω krát väčšou, ako jeho pôvodná hodnota (obr.V.15)¹⁹.



obr. V.15

V matematike a vo fyzike sa pri riešení niektorých problémov v obore reálnych čísel postupuje tak, že najskôr sa vyriešia v širšom obore komplexných čísel, kde je riešenie jednoduchšie a potom sa späť "prenesú" do reálnych čísel.

Príklad 37 Vyšetrite pohyb tlmeného oscilátora pod vplyvom vynucujúcej sily: $F = F_0 \cos(\omega t)$

Tento problém sme už raz riešili pomerne zdĺhavým spôsobom.. Pohybová rovnica mala tvar:

$$m \ddot{x} + \gamma \dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (5.111)$$

Ukážeme si využitie komplexných čísel na riešenie DR analytickou a grafickou metódou.:

- **Analytická metóda.** Ak zapíšeme rovnicu (5.111) v obore komplexných čísel :

$$m \ddot{\hat{x}} + \gamma \dot{\hat{x}} + k\hat{x} = \hat{F}_0 \exp(i\omega t) \quad (5.112)$$

a nájdeme jej riešenie \hat{x} , potom jeho reálna časť $x_{re} = \text{Re}(\hat{x})$ zodpovedá riešeniu pohybovej rovnice tlmeného oscilátora s kosínusovou vynucujúcou silou $F = F_0 \cos \omega t$ (5.114), a imaginárna $x_{im} = \text{Im}(\hat{x})$ sínusovej sile (5.115) $F = F_0 \sin \omega t$. Ľahko sa o tom presvedčíme dosadením $\hat{x} = x_{re} + i x_{im}$ do (5.112):

$$m \ddot{x}_{re} + \gamma \dot{x}_{re} + kx_{re} + i(m \ddot{x}_{im} + \gamma \dot{x}_{im} + kx_{im}) = F_0 \cos \omega t + iF_0 \sin \omega t \quad (5.113)$$

¹⁹Doporučujem čitateľom, aby rovnakým spôsobom vyšetřili integrovanie, násobenie a sčítanie časových vektorov.

Na pravej a ľavej strane sú komplexné čísla, ktoré sa rovnajú práve vtedy, keď ich imaginárne a reálne zložky sú rovnaké:

$$m \ddot{x}_{re} + \gamma \dot{x}_{re} + kx_{re} = F_0 \cos \omega t \quad (5.114)$$

$$m \ddot{x}_{im} + \gamma \dot{x}_{im} + kx_{im} = F_0 \sin \omega t \quad (5.115)$$

V komplexnej rovine teda súčasne riešime obe rovnice (5.114), (5.115). Ak $F = F_0 \cos \omega t$, potom $x = \text{Re}(\hat{x})$, ak $F = F_0 \sin \omega t$ potom $x = \text{Im}(\hat{x})$.

Podme teraz hľadať partikulárne riešenie \hat{x}_p , diferenciálnej rovnice (5.112) Vzhľadom na pravú stranu ho navrhujeme v tvare časového vektora²⁰

$$\hat{x}_p = \hat{A} \exp(i\omega t) \quad (5.116)$$

Po úpravách:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{i\gamma\omega}{m}]} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\gamma\omega}{m})^2}} \exp(i\varphi) = \\ &= \frac{F_0 \exp[-i\varphi]}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\gamma\omega}{m})^2}} \end{aligned} \quad (5.117)$$

$$\hat{x}_p = \hat{A} \exp(i\omega t) = \frac{F_0 \exp[i(\omega t - \varphi)]}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\gamma\omega}{m})^2}} \quad (5.118)$$

kde $\omega_0 = \frac{k}{m}$, $\varphi = \text{arctg}\left(\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)m}\right)$ ²¹. Všeobecne riešenie pre kosínusovú vynucujúcu silu $F = F_0 \cos \omega t$, dostaneme z reálnej časti $x_p = \text{Re}(\hat{x}_p)$:

$$x = x_h + \frac{F_0 \cos(\omega t - \varphi)}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\gamma\omega}{m})^2}} \quad (5.119)$$

popřípade pre sínusovú vynucujúcu silu: $F = F_0 \sin \omega t$ z imaginárnej $x_p = \text{Im}(\hat{x}_p)$:

$$x = x_h + \frac{F_0 \sin(\omega t - \varphi)}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\gamma\omega}{m})^2}} \quad (5.120)$$

V kapitole LDR sme ukázali, že $\lim_{t \rightarrow \infty} x_h = 0$ a preto v ustálenom stave je správanie telesa plne reprezentované partikulárnou časťou.

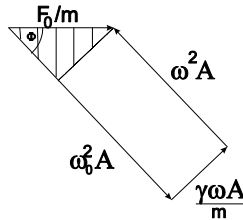
²⁰Stačí si uvedomiť, že pravá strana $g(x)$ je exponenciálna a preto aj partikulárne riešenie má exponenciálny tvar

²¹Uvedomme si, že φ je uhol medzi komplexným vektorom $\hat{z} = (\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega$ a reálnou osou.

- **Grafická metóda** (Metóda fázorových diagramov): Amplitúdu ako aj fázový posun možno nájsť metódou *fázorových diagramov*. Rovnicu (5.112) prepíšeme do tvaru:

$$\ddot{\hat{x}} + \frac{\gamma}{m} \dot{\hat{x}} + \omega_0^2 \hat{x} = \frac{F_0}{m} \exp(i\omega t) \quad (5.121)$$

a jednotlivé fázory zakreslíme.



obr. V.16

Zobrazne jednotlivé členy rovnice (5.112)²² komplexnými vektormi. Vznikne uzavretý obrazec, ktorý rotuje v rovine a zachováva si svoj tvar. Fázový posun φ sa dá určiť z pravouhlého trojuholníka vyznačeného na obrázku V.16:

$$\tan \varphi = \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)m} \quad (5.122)$$

pomocou pytagorovej vety aplikovanej na ten istý trojuholník nájdeme amplitúdu A :

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m} A\right)^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \quad (5.123)$$

$$A = \frac{F_0}{m} \sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}} \quad (5.124)$$

Výsledky získané analytickou a grafickou metódou sa pochopiteľne musia zhodovať.

Pokúsme sa tieto riešenia fyzikálne interpretovať. Budeme si všímať predovšetkým amplitúdové a fázové charakteristiky.

²² \dot{x} má amplitúdu ωA a predbieha vektor x o $\frac{\pi}{2}$, vektor \ddot{x} má amplitúdu $\omega^2 A$ a predbieha \dot{x} o $\frac{\pi}{2}$

- **Amplitúdová charakteristika:** Amplitúda kmitov (5.124) je úmerná amplitúde vynucujúcej sily a závisí od budiacej frekvencie ω . Maximálnu hodnotu dosahuje pri frekvenciách, pre ktoré $\frac{dA}{d\omega} = 0$. Tento prípad nastane, keď výraz $f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2$ bude minimálny:

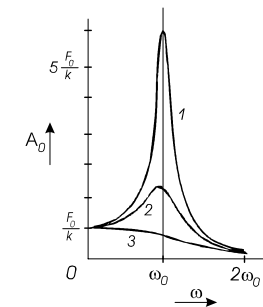
$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = 2(\omega_0^2 - \omega_{rez}^2)(-2\omega_{rez}) + 2\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 \omega_{rez} = 0 \quad (5.125)$$

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma^2}{2m^2}\right)} \quad (5.126)$$

Veľkému rozkmitanie systému periodickou vonkajšou silou s malou amplitúdou F_0 sa hovorí *rezonancia*. Nastáva pri frekvencii ω_{rez} a zodpovedá jej amplitúda:

$$A_r = \frac{F_0}{\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}} \quad (5.127)$$

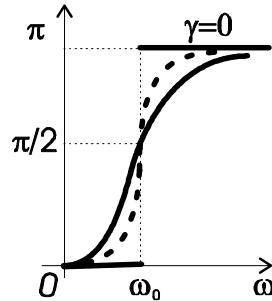
Bez prítomnosti trecích síl $\gamma \rightarrow 0$ by rezonancia nastala pri vlastnej frekvencii ω_0 a amplitúda by bola teoreticky nekonečná. Pre $\gamma \neq 0$ má amplitúda konečnú veľkosť a dosahuje sa pri $\omega < \omega_0$. Pri malých frekvenciách vynucujúcej sily ($\omega \rightarrow 0$) amplitúda kmitov nadobudne hodnotu $A = \frac{F_0}{k}$, a pri vysokých frekvenciách ($\omega \rightarrow \infty$), amplitúda klesne na nulu ($A \rightarrow 0$). V prvom prípade teleso iba natiahne pružinu, v druhom prípade dôsledkom zotrvačnosti nestačí reagovať na rýchle zmeny vynucujúcej sily a zotrvačuje v pokoji. Na obrázku V.17 je znázornená amplitúdová charakteristika $A(\omega)$ pre tri prípady: $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$.



obr. V.17

- **Fázová charakteristika.** Rozoberme vzťah (5.122) podrobnejšie. Pripomeňme si, že φ je polárny uhol komplexného vektora $\hat{z} = (\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\gamma\omega}{m}$. Ak trenie v sústave je nulové $\gamma = 0$, potom $\varphi = \begin{cases} 0 & \omega < \omega_0 \\ \frac{\pi}{2} & \omega = \omega_0 \\ \pi & \omega > \omega_0 \end{cases}$.

$\gamma \neq 0$, potom $\varphi = \begin{cases} 0 & \omega = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \omega = \omega_0 \\ \pi & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$ Fázorová charakteristika pri slabom trení prudko skáče v oblasti rezonančnej frekvencie, pri silnom trení je tento skok pomalý. (obr.V.18)



obr. V.18

Rozoberme si správanie sústavy v rôznych oblastiach budiacich frekvencií.

Prípad $\omega < \omega_0$

$$\varphi \approx 0 \quad (5.128)$$

$$A \approx F_0/m\omega_0^2 = F_0/k \quad (5.129)$$

$$x \approx \frac{F_0}{k} \cos \omega t \quad (5.130)$$

$$\ddot{x} \approx -\omega^2 \frac{F_0}{k} \cos \omega t \quad (5.131)$$

Teleso má malé zrýchlenie $\ddot{x} \rightarrow 0$, a budiaca sila prekonáva silu pružnosti pružiny. Keďže táto sila je vratná, budiaca sila je vo fáze s výchylkou. Vidieť to nakoniec aj z rovnice (5.130)

Prípad $\omega > \omega_0$ (vysoké frekvencie)

$$\varphi \approx \pi \quad (5.132)$$

$$A \approx F_0/m\omega^2 \quad (5.133)$$

$$x \approx -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t \quad (5.134)$$

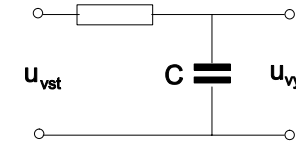
$$\ddot{x} \approx \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (5.135)$$

Sila pružnosti $F = kx \rightarrow 0$ pri vysokých frekvenciách je v porovnaní so silou $m\ddot{x}$, ktorá urýchľuje celý systém, zanedbateľná. Ak by sme pružinu odstránili, ani

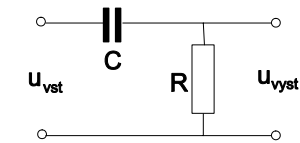
by sme si to nevšimli. Budiaca sila zastupuje celú vratnú silu a preto je logicky v protifáze voči výchylke. Pri nízkych frekvenciách je zrýchlenie sústavy malé, ale amplitúda neklesne pod $\frac{F_0}{k}$. Pri vysokých frekvenciách je výchylka malá, ale amplitúda zrýchlenia neklesne pod $\frac{F_0}{m}$. Vysokofrekvenčné chovanie možno využiť na izoláciu proti kmitaniu. Ak napríklad chceme uchrániť predmet pred vibráciami s frekvenciou ω , ktoré vznikajú na druhom konci podpornej pružiny, mali by sme vybrať takú pružinu, ktorej tuhosť $\omega > \omega_0$

Komplexná metóda má veľké využitie pri analýze striedavých obvodov:

Príklad 38 Obvody na obr.V.19 sa používajú ako jednoduché filtre vysokých (a) a nízkych (b) frekvencií. Nájdite závislosť amplitúd napätia od frekvencií tzv. prenosové charakteristiky obvodov za predpokladu, že na vstupoch pôsobí striedavé napätie s konštantnou amplitúdou a premennou frekvenciou ω . Pri akej frekvencii bude amplitúda výstupného napätia rovná $\frac{1}{\sqrt{2}}$ amplitúdy vstupného napätia (v tomto prípade klesne výstupný výkon na polovicu vstupného)?



obr. V.19a



obr. V.19b

Riešenie: Vstupné napätie v obvode (a) je dané súčtom napätí na kondenzátore a odpore $U_{vst} = \frac{Q}{C} + Ri = \frac{\int idt}{C} + Ri$, a výstupné zodovedá úbytku napätia na odpore: $U_{vys} = Ri$. Prechodom do komplexnej roviny ($i = I_0 \cos(\omega t) \rightarrow \hat{i} = \hat{I}_0 \exp(i\omega t)$) pre komplexné amplitúdy napätia:

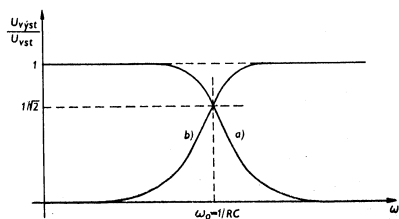
$$\hat{u}_{vys} = \hat{u}_{vst} \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$\frac{|\hat{u}_{vys}|}{|\hat{u}_{vst}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

Zopakovaním postupu pre druhý obvod:

$$\frac{|\hat{u}_{vys}|}{|\hat{u}_{vst}|} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

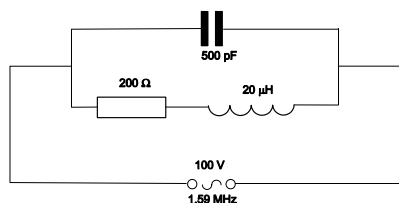
Podmienka $\frac{|\hat{u}_{vys}|}{|\hat{u}_{vst}|} = (1/\sqrt{2})$ bude splnená v oboch prípadoch pri frekvencii $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. Prenosové charakteristiky sú znázornené na obr.V.20



obr. V.20

Vidíme, že prvý obvod prepúšťa iba vysoké frekvencie a preto slúži ako nízkofrekvenčný filter. Druhý obvod sa chová opačne. \diamond

Príklad 39 Nájdiť amplitúdu prúdu v obvode (obr.V.21), v závislosti od frekvencie zdroja striedavého napätia s amplitúdou U_0 .



obr. V.21

Riešenie: Zostavme Kirchhofove rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\int i_1 dt}{C} &= u \\ Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} &= u \\ i_1 + i_2 &= i \end{aligned}$$

Dostali sme sústavu diferenciálno-integrálnych rovníc, ktorú ľahko vyriešime prechodom do komplexnej roviny $i_1 \rightarrow \hat{i}_{01}e^{i\omega t}$, $i \rightarrow \hat{i}_0e^{i\omega t}$, $i_2 \rightarrow \hat{i}_{02}e^{i\omega t}$, $u \rightarrow \hat{u}_0e^{i\omega t}$ (všimnite si, že rovnice sú algebraické):

$$\begin{aligned} -j \frac{1}{\omega C} \hat{i}_{01} &= \hat{u}_0 \\ R\hat{i}_{02} + Lj\omega \hat{i}_{02} &= \hat{u}_0 \\ \hat{i}_{01} + \hat{i}_{02} &= \hat{i}_0 \end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami:

$$\begin{aligned} \hat{i}_0 &= \hat{i}_{01} + \hat{i}_{02} = \hat{u}_0 \left[j\omega C + \frac{1}{R + Lj\omega} \right] \\ |\hat{i}_0| &= U_0 \left[\sqrt{\left(\omega C + \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega C}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} \right] \quad \diamond \end{aligned}$$

Na prvý pohľad sa nám môže zdať, že vynucujúcim silám kosínusového alebo sínusového charakteru sme venovali neprimeranú pozornosť. V skutočnosti sme ale vyšetřili všetky systémy, na ktoré pôsobia akékoľvek periodické sily. Každá periodická funkcia sa dá rozložiť do Fourierového radu a použitím princípu superpozície dokážeme nájsť riešenie DR.

Príklad 40 Na tlmený oscilátor pôsobí periodická sila $F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{pre } t \in \langle 0, \frac{T}{2} \rangle \\ -F_0 & \text{pre } t \in \langle \frac{T}{2}, T \rangle \end{cases}$.

Nájdiť výchylku tohto systému v ľubovoľnom čase $x(t)$.

Riešenie: Použijeme Fourierov rozvoj. Pohybová rovnica má tvar:

$$m \ddot{x} + \gamma \dot{x} + kx = F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) \quad (5.136)$$

Podľa princípu superpozície:

$$x(t) = \frac{4F_0}{\pi m} \left(\frac{\sin(\omega t - \varphi_1)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} + \frac{1}{3} \frac{\sin(3\omega t - \varphi_2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - (3\omega)^2)^2 + (\gamma 3\omega)^2}} + \dots \right) \quad (5.137)$$

kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\tan \varphi_i = \frac{\gamma\omega_i}{\omega_0^2 - (\omega_i)^2}$ \diamond

Superpozíciou sa dajú v princípe riešiť otázky, na akých otáčkach nesmie pracovať sústruh, akou frekvenciou sa nesmie rozkmitať most aby sa v dôsledku rezonancie nerozsypali. Stačí nájsť (teoreticky alebo experimentálne) vlastné frekvencie tohto systému a zistiť, či vo Fourierovom rozklade vonkajšej sily sú nenulové koeficienty pri sínusoch alebo kosínusoch s týmito frekvenciami. Ak koeficienty nie sú nulové, resp. nie sú veľmi malé, potom rezonancia môže spôsobiť katastrofu. V predchádzajúcom príklade sú nebezpečné nepárne násobky vlastnej frekvencie systému ω_0 .

5.3 Špeciálne typy diferenciálnych rovníc

5.3.1 Diferenciálne rovnice typu $m\ddot{x}=F(t)$

Znížme rád DR zavedením substitúcie $v = \dot{x}$ a separáciou premenných:

$$m\dot{v} = F(t) \quad (5.138)$$

$$\int_{v_0}^v mdv = \int_0^t F(t) dt \quad (5.139)$$

$$v - v_0 = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt \quad (5.140)$$

Keďže $v = \dot{x}$ rovnakým spôsobom sa dopracujeme k polohe telesa $x(t)$:

$$x - x_0 = \int_0^t \left[\frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt + v_0 \right] dt \quad (5.141)$$

Príklad 41 Teleso sa pohybuje pod pôsobením časovo sa meniacej sily $F(t) = at$. Nájdite polohu telesa v ľubovoľnom čase $x(t)$, ak $x(0) = 1$, $v(0) = 0$.

Riešenie: Zostavme pohybovú rovnicu a separujme jednotlivé premenné:

$$m\dot{v} = at \quad (5.142)$$

$$\int_{v_0=0}^v mdv = \int_0^t atdt \quad (5.143)$$

$$mv = a\frac{t^2}{2} \quad (5.144)$$

$$\int_{x_0=1}^x mdx = \int_0^t a\frac{t^2}{2} dt \quad (5.145)$$

$$x = \frac{1}{m}a\frac{t^3}{6} + 1 \quad (5.146) \diamond$$

5.3.2 Diferenciálne rovnice typu $m\ddot{x}=F(x)$

Znížme rád DR. substitúciou $v = \dot{x}$ a rovnicu upravme:

$$m\dot{v} = F(x) \quad (5.147)$$

$$mdv = F(x) dt \quad (5.148)$$

Rovnica je takmer separovaná, ale na pravej strane sa vyskytujú funkcie dvoch premenných: x a t . Na vyjadrenie dt , využijeme čisto fyzikálnu predstavu: Keďže za čas dt teleso prejde dráhu $dx = vdt$ potom po dosadení do (5.148) dostaneme:

$$mvdv = F(x) dx \quad (5.149)$$

$$\int_{v_0}^v d\left(m\frac{v^2}{2}\right) = \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (5.150)$$

$$m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (5.151)$$

Rovnica vyjadruje zákon zachovania energie. Silové pole je konzervatívne, (kapitola 7.) pretože práca, ktorú treba vykonať medzi dvomi ľubovoľnými bodmi nezávisí od trajektórie. Pointa je v tom, že každé dva body spája prave jedna trajektória. Ak označíme potenciálnu energiu U , potom podľa definície potenciálnej energie (kap.7):

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = U(x_0) - U(x)$$

z rovnice (5.151) dostaneme:

$$m\frac{v^2}{2} + U(x) = m\frac{v_0^2}{2} + U(x_0) = \text{konšt} \quad (5.152)$$

Z tejto závislosti odvodíme polohu telesa $x(t)$. Najskôr vyjadríme $v(x) = \frac{dx}{dt}$ a v rovnici (5.152) separujeme premenné :

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [U(x_0) - U(x) + \frac{1}{2}mv_0^2]}} \quad (5.153)$$

Pre porovnanie vyriešme podobný príklad s rovnakými počiatočnými podmienkami ako v predchádzajúcej úlohe. Sila však bude závisieť od polohy:

$$m \ddot{x} = ax$$

Ide o typ diferenciálnej rovnice, ktorý vedie k zákonu zachovania energie. Potenciálnu energiu určíme vzhľadom na referenčný bod $x_{ref} = 0$.

$$U(x) = - \int_{x_{ref}=0}^x F(x) dx = -a \frac{x^2}{2} \quad (5.154)$$

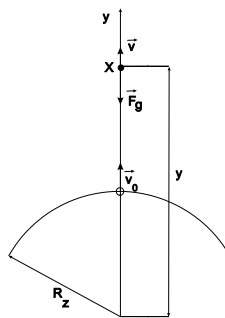
$$m \frac{v^2}{2} + U(x) = m \frac{v_0^2}{2} + U(x_0 = 0) \quad (5.155)$$

$$m \frac{v^2}{2} - a \frac{x^2}{2} = 0 \quad (5.156)$$

$$\int_0^x \frac{dx}{x} = \int_0^t \sqrt{\frac{a}{m}} dt \quad (5.157)$$

Výsledok je veľmi zaujímavý. Zdá, že riešenie neexistuje a teda nie sme schopný zabezpečiť splnenie počiatkových podmienok. Je to v rozpore s Cauchyho vetou. Problém je však v tom, že úprava z (5.156) na (5.157) nie je korektná, pretože rovnicu delíme nulou. Prípady, keď teleso prechádza bodom $x = 0$ treba vyšetřovať samostatne. V tejto polohe pôsobí nulová sila $F = ax = 0$, a keďže $v_0 = 0$, teleso v nej zotrváva²³.

Príklad 42 Teleso s hmotnosťou m bolo vrhnuté z povrchu Zeme rýchlosťou v_0 smerom nahor. Nájdite jeho rýchlosť v ľubovoľnom čase, pričom berte do úvahy nehomogénnosť gravitačného poľa.



obr. V.22

²³Úloha sa dala riešiť aj zostavením charakteristickej rovnice $m\alpha^2 = a$, ktorá má korene $\alpha = \pm \sqrt{\frac{a}{m}}$ a preto $x(t) = c_1 \exp(\sqrt{\frac{a}{m}}t) + c_2 \exp(-\sqrt{\frac{a}{m}}t)$. Zohľadnením počiatkových podmienok $x \equiv 0$

Riešenie: Na teleso s hmotnosťou m pôsobí vo vzdialenosti y od stredu Zeme gravitačná sila a podľa 2. Newtonovho zákona platí:

$$m \frac{d^2}{dt^2} y = m \frac{d}{dt} v = -\varkappa \frac{M_z m}{y^2}$$

kde M_z je hmotnosť Zeme, R_z polomer Zeme, v rýchlosť. V rovnici vystupujú tri premenné: v, t, y . Známym trikom²⁴ vyjadríme časový element pomocou rýchlosti $dt = \frac{dy}{v}$ a po odseparovaní premenných pravú a ľavú stranu zintegrujeme:

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v v dv &= \int_{R_z}^y -\varkappa \frac{M_z}{y^2} dy \\ v^2 &= 2\varkappa M_z \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R_z} \right) + v_0^2 \\ v &= \pm \sqrt{2\varkappa M_z \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{R_z} \right) + v_0^2} \end{aligned}$$

Obe znamienka majú fyzikálny význam: kladný koreň reprezentuje pohyb telesa smerom nahor, záporný voľný pád. V najvyššom bode trajektórie y_{\max} rýchlosť telesa je nulová: $v = 0$:

$$y_{\max} = \frac{2\varkappa M_z R_z}{2\varkappa M_z - v_0^2 R_z}$$

Z posledného vzťahu vyplýva, že y_{\max} bude mať konečnú veľkosť iba vtedy, ak $2\varkappa M_z \neq v_0^2 R_z$ a nekonečnú veľkosť (t.j. teleso opustí zem a už sa nevráti nazad) keď $2\varkappa M_z = v_0^2 R_z$. Pre únikovú rýchlosť platí: $v_0 = \sqrt{\frac{2\varkappa M_z}{R_z}}$. Diferenciálnu rovnicu sme mohli riešiť priamo zo ZZE, pretože išlo o typ: $m \ddot{x} = f(x)$ \diamond

Príklad 43 Vypočítajte prácu, ktorú vykoná sila pri urýchlení telesa z 0 na rýchlosť v . Uvažujte rôzne typy síl: $F = k$, $F = kt$, $F = F_0 + kx$. Závisí vykonaná práca od tvaru sily?

Riešenie: Najskôr vypočítame práce explicitne: a, Z pohybovej rovnice $m\ddot{x} = k$ a počiatkových podmienok $x = 0, v = 0$ určíme rýchlosť a polohu:

$$v = \frac{k}{m} t \quad x = \frac{1}{2} \frac{k}{m} t^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{k} v^2$$

²⁴pozornejším z Vás iste neuniklo, že riešime diferenciálnu rovnicu typu: $m \ddot{x} = f(x)$

Dosadíme do vzťahu pre prácu:

$$A = \int_0^x F dx = kx = \frac{1}{2}mv^2$$

b, Opäť vyjadríme z pohybovej rovnice rýchlosť, ktorú dosadíme do vzťahu pre prácu:

$$m\dot{v} = kt \implies v = \frac{1}{2} \frac{k}{m} t^2$$

$$A = \int_0^x ktdx = \int_0^t ktv dt = \int_0^t kt^3 \frac{1}{2} \frac{k}{m} dt = \frac{1}{2} \frac{k^2 t^4}{4m} = \frac{1}{2}mv^2$$

c, pohybová rovnica pre posledný príklad je typom diferenciálnej rovnice (5.147) ktorý vedie k ZZĚ a teda k výsledku:

$$A = \frac{1}{2}mv^2$$

Vidíme, že všetky práce sú rovnaké k čomu sme mohli dospieť okamžite. Keďže pre silu z Newtonovho zákona vyplýva $F = m\dot{v}$ a pre dráhový element $dx = vdt$ potom²⁵:

$$A = \int_0^x F dx = \int_0^v m\dot{v} v dt = \int_0^v \frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt} dt = \frac{1}{2}mv^2$$

Práca teda nezávisí od typu sily. \diamond

Využitie ZZĚ na výpočet periód

Predpokladajme, že systém kmitá s periódou T , pričom jeho potenciálna energia $E_p = \frac{1}{2}a|x|^n$. V jednorozmernom priestore je každé silové pole konzervatívne a platí v ňom ZZĚ:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = E \quad (5.158)$$

Zvoľme súradnicový systém tak, aby potenciálna energia dosiahla svoje minimum v bode $x = 0$. Teleso sa zastaví v bodoch so súradnicami x_0 a $-x_0$, ($\dot{x} = 0$) a dosiahne energiu

$$E = \frac{a}{2}x_0^n \quad (5.159)$$

²⁵ $d(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{1}{2}m\dot{v}v + \frac{1}{2}mv\dot{v} = m\dot{v}v$

Z rovnice (5.158) určíme periódu²⁶

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - E_p]}} = 2\sqrt{\frac{m}{a}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^n - |x|^n}} = 4\sqrt{\frac{m}{a}} x_0^{1-\frac{n}{2}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^n}} \quad (5.160)$$

a použijeme (5.159):

$$T \sim E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \quad (5.161)$$

Vo všeobecnosti možno povedať, že kmity sú neizochrónne a ich perióda závisí od celkovej energie E . Výnimku tvoria kmity s kvadratickou formou potenciálnej energie t.j. keď $n = 2$.

- **Izochrónne kmity.** Zamerajme sa na tento špeciálny prípad a urobme podrobnejšiu analýzu: Z praktických dôvodov, ktoré pochopíme neskôr, prepíšme potenciálnu energiu ako funkciu zovšeobecných súradníc q, \dot{q} . Pod súradnicami si môžete predstaviť uhol φ , polohu telesa x a pod.

$$\frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\beta q^2 = E \quad (5.162)$$

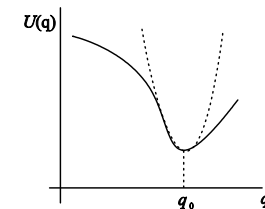
Keďže platí ZZĚ, $E = \text{konšt}$, po zderivovaní:

$$\ddot{q} = -\frac{\beta}{\alpha}q \quad (5.163)$$

Ide o rovnicu harmonického oscilátora, s výchylkou $q = q_0 \cos(\omega t + \delta)$ a uhlovou frekvenciou:

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (5.164)$$

Izochrónne kmity sú v prírode veľmi časté. Každý systém v rozumnom okolí rovnovážnej polohy ich vykonáva. Nech napríklad potenciálna energia má tvar znázornený na obrázku V.23:



obr. V.23

²⁶pomôžeme si substitúciou $\xi = \frac{x}{x_0}$, $d\xi = \frac{dx}{x_0}$

Rozviňme ju do Taylorovho radu v okolí rovnovážnej polohy q_0 , v ktorom má svoje minimum $\frac{dU}{dq} \Big|_{q=q_0} = 0$:

$$U(q) = U(q_0) + \frac{dU}{dq} \Big|_{q=q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dq^2} \Big|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \dots \quad (5.165)$$

Označme konštantu $\frac{d^2U}{dq^2} \Big|_{q=q_0} = k$ a vypočítajme silu pôsobiaca na takýto systém

$$F = -\frac{dU}{dq} = -k(q - q_0) \quad (5.166)$$

Získané poznatky, môžeme zhrnúť do nasledovného praktického záveru (5.163): Ak zistíme, že celková energia systému sa dá vyjadriť v tvare kvadratickej formy

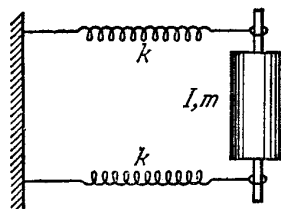
$$\frac{1}{2}\alpha \dot{q}^2 + \frac{1}{2}\beta q^2 = E \quad (5.167)$$

potom systém vykonáva harmonický pohyb s periódou

$$\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (5.168)$$

Stačí nájsť koeficienty β, α a vzájomne ich medzi sebou podeliť.

Príklad 44 Valček s polomerom R je spojený s pružinami s tuhosťami k podľa (obr. V.24). Určte jeho periódou



obr. V.24

Riešenie: Celková energia valčeka E pozostáva z potenciálnej energie a kinetickej, ktorá má dve zložky: translačnú a rotačnú:

$$E = 2\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (5.169)$$

kde J je moment zotrvačnosti, x je výchylka z rovnovážnej polohy, v_T je rýchlosť ťažiska. Ak φ reprezentuje uhol otočenia valčeka vzhľadom na rovnovážnu polohu potom:

$$x = R\varphi \quad (5.170)$$

$$v_T = \dot{x} = R\dot{\varphi} \quad (5.171)$$

Z rovnice (5.169) môžeme vytvoriť kvadratické formy, ktoré závisia buď od polohy E_x alebo od uhla E_φ :

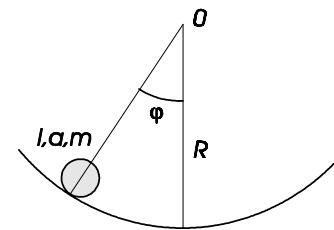
$$E_x = \frac{1}{2}[2k]x^2 + \frac{1}{2}\left[m + \frac{I}{R^2}\right]\dot{x}^2 \quad (5.172)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{2}[2kR^2]\varphi^2 + \frac{1}{2}[mR^2 + I]\dot{\varphi}^2 \quad (5.173)$$

Celková energia je kvadratickou formou a podľa (5.168) na určenie ω stačí podeliť výrazy v hranatých zátvorkách:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m + \frac{I}{R^2}}} \quad (5.174)$$

Príklad 45 Gulička polomeru r sa pohybuje (bez prešmykovania) po vnútornej strane misky polomeru R . Vypočítajte periódou malých kmitov.



obr. V.25

Riešenie: Za zovšeobecnenú súradnicu zvolíme uhol φ . Kinetická energia pozostáva z kinetickej energie ťažiska a z rotačnej energie:

$$T = \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

kde pre rýchlosť ťažiska guľičky: $v_T = (R - r)\dot{\varphi}$ a jej uhlovú rýchlosť: $\omega = \frac{v}{r} = \frac{R-r}{r}\dot{\varphi}$, teda:

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)(R - r)^2\dot{\varphi}^2$$

Pre potenciálnu energiu dostávame²⁷:

$$U = mg(R - r)(1 - \cos \varphi) \approx \frac{mg}{2}(R - r)\varphi^2$$

Celková energia má tvar kvadratickej formy:

$$E = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{r^2} \right) (R - r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{mg}{2} (R - r)\varphi^2$$

a podľa (5.168) je perióda kmitov:

$$T = 2\pi \sqrt{\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) \frac{R - r}{g}}$$

Dosadením momentu zotrvačnosti pre guľu:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7}{5} \frac{R - r}{g}}$$

◇

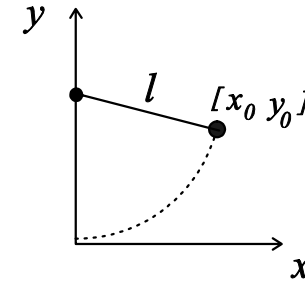
Aj v prípadoch, kedy sa nedá celková energia vyjadriť v tvare kvadratickej formy, je možné zo ZZE určiť periódu kmitov. Keďže:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + U(x) &= \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) \\ v &= \frac{dx}{dt} = \left[\frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) - U(x) \right] \frac{2}{m} \\ t &= \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\left[\frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) - U(x) \right] \frac{2}{m}}} \end{aligned}$$

potom pre periódu:

$$\frac{T}{4} = \int_{x_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{\left[U(x_0) - U(x) \right] \frac{2}{m}}} \quad (5.175)$$

Príklad 46 Teleso zavesené na niti púšťame z bodu $[x_0, y(x_0)]$. Zistite, za aký čas t sa dostane teleso do najnižšej polohy, v závislosti od x_0 .

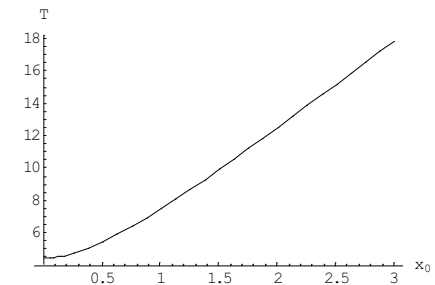


obr. V.26

Riešenie: Tento čas je rovný štvrti-perióde a podľa rovnice (5.175) platí²⁸:

$$t = \int_{x_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{\left[U(x_0) - U(x) \right] \frac{2}{m}}} = \int_{x_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{\left[mg(l - \sqrt{l^2 - x_0^2}) - mg(l - \sqrt{l^2 - x^2}) \right] \frac{2}{m}}}$$

Integrál sa nedá riešiť analyticky, ale numericky a výsledok je znázornený na obr.V.27:



obr. V.27

Všimnite si, že pri malých výchylkách je čas rovnaký a kmity sú izochrónne. ◇

²⁷Vzhľadom na malé výchylky φ rozvieme $\cos \varphi$ do druhého rádu: $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots$

²⁸Potenciálnu energiu vyjadrujeme v sústave znázornenej na obr. Pre y-ovú súradnicu preto platí $y = l - \sqrt{l^2 - x^2}$

5.4 Ako riešiť DR, ktoré sa nedajú riešiť explicitne ?

V predchádzajúcich kapitolách sme si v stručnosti uviedli základné metódy riešenia DR. V praxi sa nám však bežne stáva, že uvedené metódy zlyhávajú a nevedú k cieľu. V takýchto prípadoch možno použiť nasledovné tri stratégie riešenia:

- i) kvalitatívna metóda
- ii) rozvoj do radu a , podľa nezávislej premennej b , podľa parametra (tzv. poruchová metóda).
- iii) numerická metóda

5.4.1 Kvalitatívna metóda

Cieľom metódy je získať kvalitatívnu informáciu o riešení DR.

Príklad 47 Nájdiť vlastnosti funkcie y ktorá je riešením nasledovnej DR:

$$2\frac{d^2x}{dx^2} + 8x + x^3 = 0 \quad (5.176)$$

Riešenie: Takýto typ rovnice (5.176) môže popisovať napríklad pohyb hmotného bodu s hmotnosťou $m = 2kg$, na ktorý pôsobí "tvrdnica" pružina silou $F = -kx - \gamma x^3$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma x^3 = -(k + \gamma x^2)x \quad (5.177)$$

Jej tuhosť totiž narastá s výchylkou $K = k + \gamma x^2$. Na základe fyzikálnej intuície sa pokúsme formulovať hypotézy o pohybe telesa a teda o riešení pôvodnej rovnice (5.176).

HYPOTÉZA 1: Teleso bude vykonávať periodický pohyb. Predpokladáme, že v nejakom čase t prechádza bodom x_0 , rýchlosťou v_0 . Podľa rovnice (5.177) mu sila udeľuje zrýchlenie $a_0 = -\frac{k}{m}x_0 - \frac{\gamma}{m}x_0^3$, ktoré je orientované do rovnovážnej polohy, čo má za následok jeho spomaľovanie. Ak by sa teleso naďalej pohybovalo so záporným zrýchlením a_0 , zastalo by po uplynutí doby $\tau = \frac{v_0}{a_0}$. V našom prípade je teleso spomaľované oveľa intenzívnejšie ($|a| \geq |a_0|$) a preto sa zastaví skôr. V okamihu keď dosiahne nulovú rýchlosť bude na neho pôsobiť sila $F = -kx - \gamma x^3$, ktorá ho začne ťahať do rovnovážnej polohy. Po prekročení $x = 0$, sila bude mať opäť brzdiaci účinok a po určitom čase teleso zastaví.

Z uvedeného vyplýva, že pohyb je periodický i keď nie harmonický. Keďže naša pružina na rozdiel od LHO "tvrdne", dokážeme predpovedať, že perióda :

$$T < 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} = 4\pi [s]$$

Hypotézu o periodicite deja sme mohli dokázať aj z energetickej bilancie. Pole $F(x) = -kx - \gamma x^3$ je konzervatívne, neexistuje tu žiaden útlm a musí platiť ZZE. Energia systému sa nestráca len prerozdeľuje na kinetickú a potenciálnu. Pre výchylku teda platí

$$x(t) = x(t+T) \quad (5.178)$$

HYPOTÉZA 2: Tá časť cyklu, v ktorej sa teleso približuje k svojej krajnej polohe, vyzerá rovnako ako tá časť cyklu, v ktorej sa od tejto polohy vzdľahuje:

$$x(t_0 - t) = x(t_0 + t) \quad (5.179)$$

kde t_0 je niektorá z hodnot t , pre ktoré má teleso maximálnu výchylku a jeho rýchlosť je nulová:

$$\dot{x}(t_0) = 0 \quad (5.180)$$

HYPOTÉZA 3 Pôsobiacia sila $|F|$ je symetrická vzhľadom na bod $x = 0$ a preto pohyb smerom doľava, bude zrkadlovým obrazom pohybu doprava. Oba tieto pohyby trvajú presne pol periódy.

$$x\left(t + \frac{1}{2}T\right) = -x(t) \quad (5.181) \diamond$$

5.4.2 Riešenie DR rozvojom do radov

a, podľa nezávislej premennej

Riešenie DR rozvineme do radu podľa nezávislej premennej t , ktorá v pohybových rovniciach reprezentuje čas:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad (5.182)$$

Funkciu (5.182) dosadíme do DR a určíme z nej neznáme koeficienty c_n .

Príklad 48 Vyriešte DR:

$$m \ddot{x} = -kx \quad (5.183)$$

Riešenie: Predpokladajme, že túto DR nevieme riešiť explicitne a navrhneme jej riešenie v tvare nekonečného radu (5.182). Dosadením do (5.183) spolu s odpovedajúcimi deriváciami :

$$\dot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n t^{n-1} \quad (5.184)$$

$$\ddot{x} = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) t^{n-2} \quad (5.185)$$

a menších úpravách :

$$\sum_{n=0}^{\infty} m c_{n+2} (n+2)(n+1) t^n = - \sum_{n=0}^{\infty} k c_n t^n \quad (5.186)$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách parametra t , získame rekurentný vzťah pre koeficienty c_n :

$$c_{n+2} = -\frac{k}{m} \frac{1}{(n+2)(n+1)} c_n \quad (5.187)$$

Koeficienty c_0 a c_1 nie sú týmito rovnicami určené jednoznačne a predstavujú ľubovoľné konštanty všeobecného riešenia DR. Ich hodnoty získame z počiatočných podmienok. Podľa (5.187) vyjadríme aspoň prvé členy c_n :

$$n = 0 \quad c_2 = -\frac{k}{m} \frac{1}{2 \cdot 1} c_0 \quad (5.188)$$

$$n = 1 \quad c_3 = -\frac{k}{m} \frac{1}{3 \cdot 2} c_1 \quad (5.189)$$

$$n = 2 \quad c_4 = \left(-\frac{k}{m}\right) \left(-\frac{k}{m}\right) \frac{1}{4!} c_0 \quad (5.190)$$

$$n = 3 \quad c_5 = \left(-\frac{k}{m}\right) \left(-\frac{k}{m}\right) \frac{1}{5!} c_1 \quad (5.191)$$

a dosadíme ich do (5.182)

$$\begin{aligned} x &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \dots = \\ &= c_0 \left(1 - \frac{\left(\sqrt{k/mt}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\sqrt{k/mt}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\sqrt{k/mt}\right)^6}{6!} + \dots \right) + \\ &+ c_1 \sqrt{m/k} \left(\sqrt{k/mt} - \frac{\left(\sqrt{k/mt}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\sqrt{k/mt}\right)^5}{5!} + \dots \right) \end{aligned}$$

V zátvorkách vystupujú rozvoje trigonometrických funkcií: $\sin x$ a $\cos x$:

$$x = c_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + c_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

K takémuto výsledku sme sa samozrejme mohli dopracovať priamou metódou \diamond

b, rozvoj podľa parametra-poruchová metóda

Základná myšlienka poruchovej metódy spočíva v tom, že všeobecné riešenie DR sa dá vyjadriť ak funkcia tzv. poruchového parametra λ , podľa ktorého je možné rozvinúť toto riešenie do Taylorovho radu:

$$x(t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \lambda^n \quad (5.192)$$

Ide o podobný rozvoj, ako v prípade (5.182), len podľa inej premennej. Pre istotu pripomínáme, že x_n sú konštanty vzhľadom na poruchový parameter λ , závislé na čase t . V prípade vektorového tvaru pohybovej rovnice (5.192):

$$\vec{r}(t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{r}_n \lambda^n \quad (5.193)$$

Príklad 49 Jablko padá na zem. Určte jeho polohu v ľubovoľnom čase t . Úlohu riešte poruchovou metódou do druhého rádu.

Riešenie: Pohybová rovnica má tvar:

$$\vec{F} \equiv m\vec{g} + 2m\vec{v} \times \vec{\omega} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (5.194)$$

Člen

$$\vec{F}' = 2m\vec{v} \times \vec{\omega} \quad (5.195)$$

predstavuje poruchu. Ak \vec{r} je riešenie všeobecného problému a \vec{r}_0 je riešenie rovnice bez poruchového členu, potom zväčšovaním poruchy od 0 k \vec{F}' bude \vec{r}_0 spojito prechádzať k \vec{r} . Vyjadríme funkciu $\vec{r}(t)$ ako funkciu parametra λ , a rozložme ju do radu. Ak $\lambda = 0$, porucha je vypnutá, ak $\lambda = 1$ porucha je úplne zapnutá:

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda\vec{r}_1 + \lambda^2\vec{r}_2 + \dots \quad (5.196)$$

Namiesto pôvodnej rovnice budeme riešiť rovnicu:

$$\vec{F}_0 + \lambda\vec{F}' = m \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_0 + \lambda\vec{r}_1 + \lambda^2\vec{r}_2 + \dots) \quad (5.197)$$

porovnáme členy pri rovnakých mocninách λ .

Po dosadení (5.196) a (5.197) do (5.194):

$$\begin{aligned} m\vec{g} + 2\lambda m \frac{d}{dt}(\vec{r}_0 + \lambda\vec{r}_1 + \lambda^2\vec{r}_2 + \dots) \times \vec{\omega} &= m \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_0 + \lambda\vec{r}_1 + \lambda^2\vec{r}_2 + \dots) \\ m\vec{g} + 2m(\lambda\vec{v}_0 + \lambda^2\vec{v}_1 + \lambda^3\vec{v}_2 + \dots) \times \vec{\omega} &= m \frac{d}{dt}(\vec{v}_0 + \lambda\vec{v}_1 + \lambda^2\vec{v}_2 + \dots) \end{aligned} \quad (5.198)$$

Neporuchový člen (*nulté* priblíženie) je

$$\vec{v}_0 = \vec{g}t \quad (5.199)$$

Spätným dosadením do rovnice (5.198), získame *prvé* priblíženie:

$$\vec{v}_0 + \lambda\vec{v}_1 = \vec{g}t + (\vec{g} \times \vec{\omega}) t^2 \quad (5.200)$$

a po integrácii:

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \frac{1}{3}(\vec{g} \times \vec{\omega}) t^3 \quad (5.201)$$

Podobne pre *druhé* priblíženie:

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \vec{g}t + (\vec{g} \times \vec{\omega}) t^2 + \frac{2}{3}[(\vec{g} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega}] t^3 \\ \vec{r}_2 &= \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \frac{1}{3}(\vec{g} \times \vec{\omega}) t^3 + \frac{1}{6}[(\vec{g} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega}] t^4 \end{aligned} \quad \diamond \quad (5.202)$$

5.4.3 Numerická metóda

Predpokladajme, že na teleso pôsobí sila $F(x, v, t)$ a pohybová rovnica má tvar: $ma = F(x, v, t)$. V krátkych časových okamihoch Δt , sa pôsobiaca sila $F(x, v, t)$ príliš nezmení a možno ju považovať za konštantu. Sila udeľuje telesu zrýchlenie $a = F/m$, takže pre novú rýchlosť:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow v(t + \Delta t) = v(t) + a(t) * \Delta t \quad (5.203)$$

Analogicky pre polohu x :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \Rightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) * \Delta t \quad (5.204)$$

Celý proces cyklicky opakujeme. Na základe týchto vzťahov postupne dostávame rekurentné vzťahy pre celý pohyb:

$$\begin{aligned} v(n\Delta t) &= v((n-1)\Delta t) + \Delta t \cdot \frac{F(x((n-1)\Delta t), (n-1)\Delta t)}{m} \\ x(n\Delta t) &= x((n-1)\Delta t) + \Delta t \cdot v(x((n-1)\Delta t), (n-1)\Delta t) \end{aligned}$$

Čím menší je interval Δt , tým presnejší výsledok získame. Metóda sa dá vy-
lepšiť, tak že zrýchlenie telesa v infinitzimálnom elemente Δt berieme v strede
intervalu Δx , alebo ako strednú hodnotu začiatočného a konečného zrýchlenia.
Podrobnejšie sa s numerickými metódami zoznámite vo vyšších ročníkoch.

Príklad 50 Zostavte jednoduchú diferenčnú schému pre kyvadlo s veľkými výchylkami.

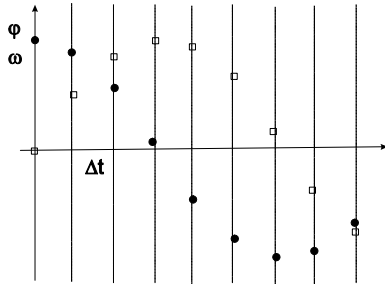
Riešenie: Pohybová rovnica popisujúca pohyb kyvadla:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (5.205)$$

Pri veľkých výchylkách nie je možné aproximovať $\sin \varphi \sim \varphi$ a preto uvedení
rovnice budeme riešiť numericky. Časové derivácie v rovniciach nahradíme ko-
nečnými prírastkami:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta t} &= \omega_n & \Rightarrow \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \omega_n \Delta t \\ \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta t} &= -\frac{g}{l} \sin \varphi_n & \Rightarrow \omega_{n+1} &= \omega_n - \frac{g}{l} \sin \varphi_n \Delta t \end{aligned}$$

Získali sme rekurentný vzťah na výpočet φ a ω v neskorších časových okamihoch.
Riešenie je takýmto spôsobom diskretizované s časovým krokom Δt . Štartovacie
hodnoty φ_0 a ω_0 sú dané počiatočnými podmienkami. (obr.V.28)



obr. V.28

Rovnica sa dá riešiť aj analyticky, ale veľmi zdĺhavo. Ide však o poučný príklad, na ktorom budeme demonštrovať využitie mnohých matematických postupov a metód, ktoré sme sa dosiaľ naučili. Diferenciálna rovnica (5.205) je typom diferenciálnej rovnice $m \ddot{x} = F(x)$ ²⁹ a po zohľadnení počiatočných podmienok $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$:

$$\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

čo zodpovedá zákonu zachovania energie. Po separácii premenných:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \sqrt{2\frac{g}{l}} dt$$

V ľavej časti rovnice zavedme novú premennú α :

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - 2k^2 \sin^2 \alpha$$

kde

$$k = \sin \frac{\varphi_0}{2}$$

Potom

$$\sin \varphi d\varphi = -4k^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha$$

a

$$d\varphi = \frac{4k^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = \frac{4k^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha}{\sqrt{(1 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)}} = \frac{2k \cos \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$$

Okrem toho

$$\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} = k\sqrt{2} \cos \alpha$$

²⁹stačí zameniť $\varphi \rightarrow x$ a $\ddot{\varphi} \rightarrow \ddot{x}$

keďže pri $\varphi = \varphi_0$ je $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dosadením do pôvodnej rovnice:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = n dt$$

príčom pre periódu T dostaneme

$$n \frac{T}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad (5.206)$$

Integrál (5.206) sa nedá riešiť analyticky a preto ho vypočítame rozvojom do Taylorovho radu:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \alpha + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4 \sin^4 \alpha + \dots$$

Zároveň

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \alpha d\alpha = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{\pi}{2}$$

Potom

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right]$$

Po spätných dosadeniach dostávame výsledný vzorec pre kmity matematického kyvadla:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right]$$

Vidíme, že pre malé uhly sú kmity izochrónne s periódou

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

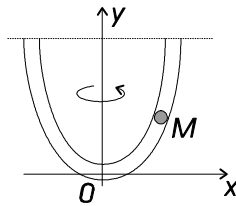
Zároveň vidíme aj ohraničenosť platnosti tohto vzťahu. Chyba pri jeho používaní do $\varphi_0 \leq 20^\circ$ neprevyšuje 1%. Ak by sme zarátali aj druhý člen, tak s tou istou chybou ho môžeme používať do odklonu 50° . \diamond

5.5 Aplikácie diferenciálnych rovníc.

5.5.1 Využitie DR na hľadanie tvarov kriviek.

Diferenciálne rovnice sa využívajú na hľadanie kriviek, ktoré musia spĺňať isté požiadavky.

Príklad 51 Gulôčka hmotnosti m je pripevnená na hladký drôтик, ktorý leží v jednej rovine a otáča sa okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou ω . Nájdite jeho tvar, ak viete, že gulôčka sa v ľubovoľnej polohe nachádza v rovnováhe.



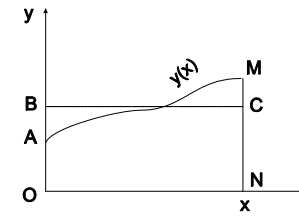
obr. V.29

Riešenie: Predpokladajme, že krivka je určená rovnicou $y(x)$. Pohyb vyšetrujeme v neinerciálnej vzťažnej sústave, v ktorej na gulôčku pôsobia tri sily: Tiažová $\vec{G} = (0, -mg)$, odstredivá $\vec{F}_0 = (m\omega^2 x, 0)$ a tlaková \vec{N} . Vzhľadom na to, že gulôčka je v rovnováhe v ktorejkoľvek polohe, výslednica tiažovej a odstredivej sily $\vec{G} + \vec{F}_0$ musí byť kolmá na podložku, aby sa práve vykompenzovala s tlakovou silou \vec{N} . Inak povedané, súčet ich tangenciálnych zložiek je nulový $(\vec{G} + \vec{F}_0)_\tau = \vec{0}$. Tangenciálny vektor na krivku má súradnice $\vec{\tau} = (dx, dy)$:

$$(\vec{G} + \vec{F}_0)_\tau = (\vec{G} + \vec{F}_0) \cdot \vec{\tau} = (m\omega^2 x, -mg) \cdot (dx, dy) = m\omega^2 x dx - mg dy = 0$$

Riešením diferenciálnej rovnice s počiatočnou podmienkou $y(0) = 0$ zistíme, že gulôčka, sa musí pohybovať na drôťku v tvare paraboly $y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$. \diamond

Príklad 52 Nájdite krivky pre ktoré platí, že výška obdĺžnika η , ktorý má rovnakú plochu, ako je plocha ohraničená krivkou $y(x)$, je k -krát väčšia ako je $MN = y(x)$ (obr.V.30).



obr. V.30

Riešenie: Využitím vlastností určitých integrálov, matematická formulácia zadania je nasledovná:

$$\int y dx = xky$$

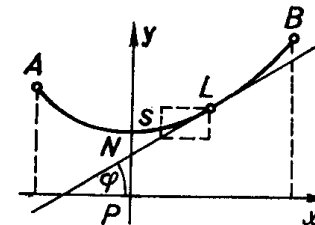
Zderivovaním získame separovateľnú diferenciálnu rovnicu:

$$\begin{aligned} y &= ky + xky' \\ xky' &= y(1-k) \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{1-k}{k} \frac{dx}{x} \\ \ln|y| &= \frac{1-k}{k} \ln|x| + \ln|c| \quad k \in (0, \infty), c \in \text{Re} \\ y &= cx^{\frac{1-k}{k}} = cx^{\frac{1}{k}-1} \end{aligned}$$

Hľadaná krivka môže mať rôzne tvary. Napríklad, ak $k = 1$, krivka je priamka $y = c$, ak $k \rightarrow \infty$, krivka je hyperbola $y = x^{-1}$, ak $k = \frac{1}{3}$ krivka je parabola $y = x^2$ a pod. \diamond

Príklad 53 Nájdite tvar dokonale ohybného nerozťažiteľného homogénneho lana, zaveseného na oboch koncoch A,B, ak na neho pôsobí iba gravitačné pole.

Riešenie: Predpokladajme, že lano má tvar funkcie $y = f(x)$. Za os y zvolíme vertikálnu priamku, ktorá prechádza najnižším bodom N (obr.V.31).



obr. V.31

Vyberme na lane ľubovoľný bod L . Medzi bodmi L, N pôsobia na lano tri sily: sila horizontálneho napätia \vec{H} v bode N , ťahová sila \vec{T} v bode L , ktorá má smer dotyčnice a tiažová sila \vec{Q} uvažovanej časti lana, pôsobiaca v ťažisku. Keďže dĺžková hustota je ρ a dĺžka oblúku LN je s , potom $Q = \rho s$. Rozložme silu \vec{T} na horizontálnu a vertikálnu zložku a využijeme podmienku rovnováhy:

$$\begin{aligned} T \sin \varphi &= \rho s \\ T \cos \varphi &= H \end{aligned}$$

kde uhol φ je uhol, ktorý zvierajú dotyčnica v bode L s osou x . Zavedením konštantného parametra $k = \frac{\rho}{H}$, a vzájomným predelením oboch rovníc dostaneme³⁰:

$$y' = ks \quad (5.207)$$

Keďže podľa Pytagorovej vety $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$ potom po zderivovaní (5.207)

$$y'' = ks' = k\sqrt{1 + y'^2}$$

Znížme rád DR substitúciou $y' = z$:

$$\frac{z'}{\sqrt{1 + z^2}} = k$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice má tvar:

$$\ln(z + \sqrt{1 + z^2}) = kx + c_1$$

Nech v bode N je $x = 0, y' = z = 0$ z čoho $c_1 = 0$:

$$z + \sqrt{1 + z^2} = \exp(kx)$$

a po úpravách:

$$\begin{aligned} z &= y' = \frac{1}{2} (\exp(kx) - \exp(-kx)) \\ y &= \frac{1}{2k} (\exp(kx) + \exp(-kx)) + c_2 \end{aligned}$$

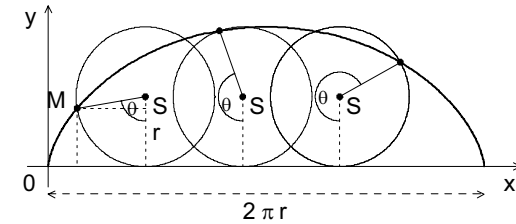
Pre lepšiu prehľadnosť rovnice zvolíme dĺžku $PN = \frac{1}{k} = y(0) \implies c_2 = 0$:

$$y = \frac{1}{2k} (\exp(kx) + \exp(-kx))$$

Krivka sa nazýva reťazovka. \diamond

5.5.2 Úlohy o cykloidách

Medzi významné krivky, s ktorými sa môžeme stretnúť vo fyzike, v matematike a technike patrí cykloida. Je reprezentovaná trajektóriou hmotného bodu M , ležiaceho na kružnici, ktorý sa kotúľa po priamke (obr. V.32.)

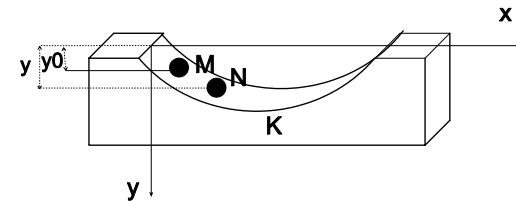


obr. V.32

Z obrázku V.32 je zrejmé, že parametrické vyjadrenie cykloidy platí:

$$x = r(\theta - \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta) \quad (5.208)$$

Príklad 54 Gulôčka sa pohybuje bez trenia v žliabku, ktorý má tvar cykloidy (obr. V.33). Ukážte, že čas, za ktorý prejde z krajnej polohy M do rovnovážnej polohy K , nezávisí od polohy bodu M , z ktorého bola spúšťaná.



obr. V.33

Riešenie: Nech počiatočná poloha guľôčky má súradnice $M[x_0, y_0]$ a zodpovedá jej parameter θ_0 . Zo zákona zachovania energie a rovnice (5.208) vyplýva, že teleso bude mať v bode N rýchlosť:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2g\Delta y} = \sqrt{2g[r(1 - \cos \theta) - r(1 - \cos \theta_0)]} = \\ \frac{ds}{dt} &= \sqrt{2gr(\cos \theta_0 - \cos \theta)} \end{aligned} \quad (5.209)$$

Pre dĺžku oblúka cykloidy možno odvodiť vzťah:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r \sin \frac{\theta}{2} d\theta$$

³⁰tangent uhla φ je rovný derivácii funkcie y v bode L

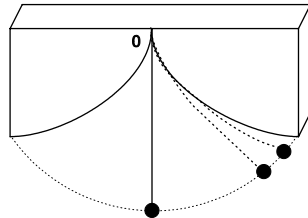
Dosadením do (5.209) a následným preintegrováním vypočítame čas, za ktorý sa guľôčka dostane z bodu M do bodu K :

$$\int_0^t dt = \int_0^\pi \frac{2r \sin \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{2gr(\cos \theta_0 - \cos \theta)}}$$

$$t = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^\pi \frac{d \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \quad (5.210)$$

V tejto kapitole sme ukázali, že perióda matematického kyvadla závisí od amplitúdy. Ak však takéto kyvadlo ohraničíme šablónou v tvare cykloídy (obr.V.34), potom perióda kmitov nebude závisieť od amplitúdy. Ich perióda podľa rovnice (5.210) bude:

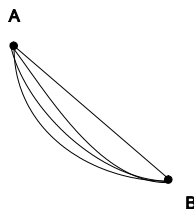
$$T = 4\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$



obr. V.34

Na záver poznamenajme, že cykloida je jedinou krivkou, po ktorej sa môže pohybovať hmotný bod, aby jeho kmity boli izochrónne. \diamond

Príklad 55 Vo vertikálnej rovine sú dané dva body A a B (obr.V.35). Nájdite tvar krivky, po ktorej sa musí pohybovať hmotný bod, aby sa pod vplyvom tiažovej sily dostal z bodu A do bodu B za najkratší čas. Takejto krivke sa hovorí brachystochrona (brachistos=najkratší, chronos=čas).

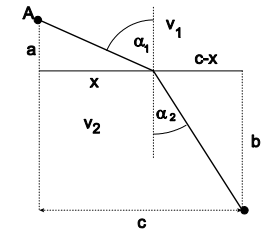


obr. V.35

Riešenie: Úlohu budeme riešiť pomocou analógií z optiky. Ak svetelný lúč prechádza z bodu A do bodu B cez dve optické prostredia, potom na ich rozhraní sa láme podľa Snellovho zákona:

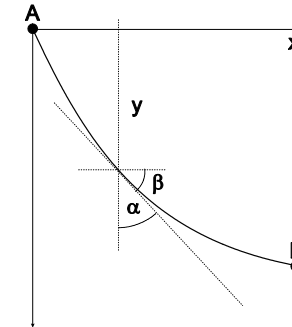
$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \text{resp.} \quad \frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2} = \text{konšt} \quad (5.211)$$

Vzťah bol mnohokrát experimentálne overený a dá sa odvodiť z Fermatovho princípu³¹.



obr. V.36

Vrátíme sa však k pôvodnej úlohe. Zvoľme si súradnicový systém podľa obrázka V.37.



obr. V.37

Trajektóriu hmotného bodu prirovnáme k svetelnému lúču, ktorý sa snaží dostať do bodu B za najkratší čas. Musí sa preto správať podľa Snellovho zákona (5.211). Podľa ZZE rýchlosť, ktorú má teleso v ľubovoľnom bode, nezávisí od tvaru trajektórie, po ktorej sa pohybuje, ale iba zmeny potenciálnej energie:

$$v = \sqrt{2gy} \quad (5.212)$$

³¹Fermatov princíp hovorí, že svetelný zväzok sa šíri v prostredí v najkratšom čase. Z obrázku pre tento čas platí: $T = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$. Extrém $\frac{dT}{dx} = 0$ zodpovedá rovnici: $\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$

Z geometrického tvaru krivky ďalej vyplýva:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \quad (5.213)$$

Dosadením (5.212), (5.213) do (5.211):

$$y \left[1 + (y')^2 \right] = C \quad (5.214)$$

Táto krivka sa nazýva brachystochrona. Ukážeme, že to môže byť iba cykloida. Upravme (5.214):

$$dx = \left(\frac{y}{C-y} \right)^{1/2} dy \quad (5.215)$$

a zaveďme substitúciou:

$$\left(\frac{y}{C-y} \right)^{1/2} = \tan \varphi \quad (5.216)$$

potom:

$$y = C \sin^2 \varphi \quad dy = 2C \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \quad (5.217)$$

$$dx = \tan \varphi dy = 2C \sin^2 \varphi d\varphi = C(1 - \cos 2\varphi) d\varphi \quad (5.218)$$

Preintegrovaním posledného výrazu a dosadením počiatočných podmienok $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ získame rovnicu cykloidy:

$$x = \frac{C}{2} (2\varphi - \sin 2\varphi), \quad y = C \sin^2 \varphi = \frac{C}{2} (1 - \cos 2\varphi) \quad (5.219)$$

Cykloida je teda nielen izochrónna ale aj brachystochrónna. V tom je jej čarô

5.5.3 Model šírenia reklamy

Žijeme v dobe technických výtvarníkov, ktoré však treba prostredníctvom reklamného priemyslu dostať do povedomia potenciálnych záujemcov. Pokúsime sa preto vytvoriť matematický model šírenia informácií o produkte, ktorý chceme predať. Predpokladajme, že v čase t je z celkového množstva N potenciálnych záujemcov informovaných o produkte x osôb. V čase $t = 0$ sme prostredníctvom médií uverejnili reklamný šot o našej ponuke, ktorá sa ďalej bude šíriť ústnym podaním medzi záujemcami. S veľkou pravdepodobnosťou sa dá očakávať, že

rýchlosť nárastu informovaných záujemcov bude úmerná súčinu počtu informovaných a počtu ešte neinformovaných zákazníkov:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N-x) \quad (5.220)$$

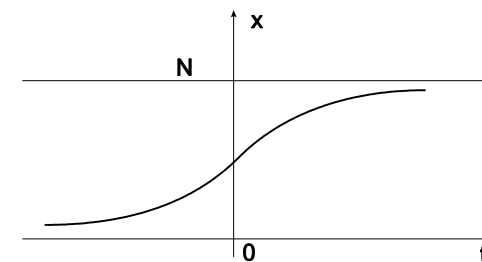
Počiatočne podmienky zvolíme nasledovne $x(0) = \frac{N}{k}$, kde k je kladná konštanta. Zintegrováním (5.220) a postupnými úpravami³²:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \ln \frac{x}{N-x} &= kt + C \\ \frac{x}{N-x} &= Ae^{Nkt} \\ x &= N \frac{Ae^{Nkt}}{Ae^{Nkt} + 1} = \frac{N}{1 + P \exp^{-Nkt}} \end{aligned} \quad (5.221)$$

Po dosadení počiatočných hodnôt:

$$x = \frac{N}{1 + (\gamma - 1) \exp^{-Nkt}}$$

Na obr.V.38 je znázornený tvar krivky pre $\gamma = 2$



obr. V.38

5.5.4 Model šírenia epidémie

Predpokladajme, že v populácii, ktorá pozostáva z N ľudí, vznikne nákazlivá choroba. Osoby podľa náchylnosti ku chorobe, rozdelíme do troch skupín: na infikovaných I , na zdravých s imunitou R a na zdravých bez imunity S , pričom v ľubovoľnom čase musí byť splnená podmienka:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (5.222)$$

Ak počet infikovaných osôb presiahne hodnotu I^* je vyhlásená epidémia a nakažené osoby sa začnú izolovať od zdravých. Budeme predpokladať, že počas

³²pri úpravách nahradzujeme konštanty inými konštantami

karantény rýchlosť šírenia nákazy medzi zdravými osobami je úmerný ich počtu. Za normálnych okolností $I < I^*$ počet zdravých osôb ostáva konštantný³³:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & \text{ak } I(t) > I^* \\ 0 & \text{ak } I(t) \leq I^* \end{cases} \quad (5.223)$$

Podobne pre ostatné skupiny osôb:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & \text{ak } I(t) > I^* \\ -\beta I & \text{ak } I(t) \leq I^* \end{cases} \quad (5.224)$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I \quad (5.225)$$

Aby sme mohli popísať šírenie choroby, musíme poznať počiatkové podmienky. Pre jednoduchosť uvažujme, že ide o nový druh nákazy a preto v čase $t = 0$ sa v populácii nevyskytovala žiadna osoba s vytvorenou imunitou $R(t) = 0$ a počet infikovaných osôb dosiahol hodnotu $I(0)$. Nech zároveň koeficienty uzdravenia a ochorenia sú rovnaké $\alpha = \beta$. Pri riešení musíme uvažovať dva prípady:

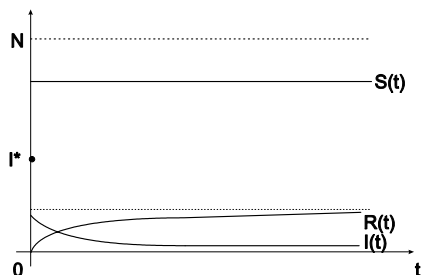
- **NORMÁLNY STAV** $I(t) \leq I^*$: Počet zdravých osôb sa nemení a je rovnaký ako na začiatku.

$$S(t) = S(0) = N - I(0) \quad (5.226)$$

Riešením rovníc dostaneme:

$$\begin{aligned} I(t) &= I(0)e^{-\alpha t} \\ R(t) &= I(0)[1 - e^{-\alpha t}] \end{aligned}$$

Na obr.V.39 sú znázornené tieto priebehy.



obr. V.39

³³To znamená že počet ochorených osôb je rovnaký ako počet uzdravených. V žiadnom prípade to teda neznamená, že nikto sa nenakazí.

- **EPIDÉMIA** $I(t) > I^*$: V tomto prípade treba sledovať počet infikovaných osôb, pretože epidémia trvá dovtedy, pokiaľ počet infikovaných osôb neklesne na hodnotu I^* . Dĺžku trvania epidémie označme písmenom T . Riešením rovnice (??) pre počet zdravých osôb vyplýva:

$$S(t) = S(0)e^{-\alpha t} \quad (5.227)$$

Dosadením do (5.224):

$$\frac{dI}{dt} + \alpha I = \alpha S(0)e^{-\alpha t} \quad (5.228)$$

a použitím metódy neurčitých koeficientov (alebo variácie konštánt) s počiatkovou podmienkou $I(t) = I(0)$ počet infikovaných osôb sa mení s časom:

$$I(t) = [I(0) + \alpha S(0)t] e^{-\alpha t} \quad (5.229)$$

Pri modelovaní šírenia epidémie je pre zdravotnícku verejnosť dôležité odhadnúť dĺžku trvania epidémie T , ako aj čas jej kumulácie t_{\max} . Pokúsme sa preto nájsť uvedené parametre, analýzou dosiahnutých rovníc.

- **Dĺžka trvania epidémie** T je daná dobou, počas ktorej počet infikovaných osôb nedosiahne "bezpečnú" úroveň I^* :

$$I(T) = I^* = [I(0) + \alpha S(0)T] e^{-\alpha T} \quad (5.230)$$

Mimo epidémie je počet zdravých osôb konštantný (??) a dôsledkom spojitosti funkcie $S(t)$ musí platiť:

$$S(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S(\infty) = S(0)e^{-\alpha T} \quad (5.231)$$

odkiaľ pre hľadaný čas T :

$$T = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{S(0)}{S(\infty)} \quad (5.232)$$

Ak chceme určiť dobu karantény z rovnice (5.232), potrebujeme poznať počet zdravých osôb po zlikvidovaní epidémie $S(\infty)$. Táto informácia v čase epidémie samozrejme nie je známa, a preto ju musíme vypočítať. Dosadíme preto (5.232) do rovnice (5.230), ktorú upravíme:

$$I^* = \left[I(0) + S(0) \ln \frac{S(0)}{S(\infty)} \right] \frac{S(\infty)}{S(0)} \quad (5.233)$$

$$\frac{I^*}{S(\infty)} + \ln S(\infty) = \frac{I(0)}{S(0)} + \ln S(0) \quad (5.234)$$

Všetky členy na pravej strane rovnice (5.230) sú známe a možno z nej vypočítať hľadanú hodnotu $S(\infty)$ potrebnú na odhad doby karantény T (5.232).

- Čas kumulácie epidémie t_{\max} . Hľadáme čas, kedy epidémia kumuluje. Počet nainfikovaných osôb dosiahne svoje maximum v čase t_{\max} , vtedy keď:

$$\frac{dI}{dt} = [\alpha S(0) - \alpha I(0) - \alpha^2 S(0)t_{\max}] \exp(-\alpha t_{\max}) = 0 \quad (5.235)$$

$$t_{\max} = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \frac{I(0)}{S(0)} \right] \quad (5.236)$$

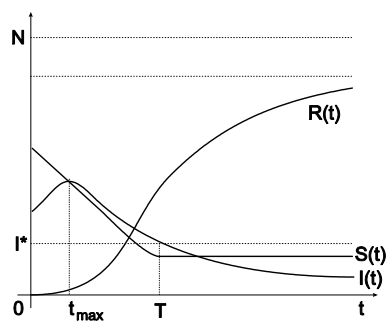
Ak dosadíme tento čas do rovnice (5.229), potom

$$I_{\max} = S(0) \exp \left[- \left(1 - \frac{I(0)}{S(0)} \right) \right] = S(t_{\max}) \quad (5.237)$$

Zistili sme, že v čase kumulácie epidémie je počet infikovaných osôb rovnaký ako počet zdravých. Po zastavení epidémie:

$$I(t) = I^* e^{-\alpha(t-T)} \quad (5.238)$$

Na (obr.V.40) je schématicky znázornený časový vývoj jednotlivých skupín osôb : $I(t)$, $R(t)$, $S(t)$.



obr. V.40

5.5.5 Chemické reakcie.

Rýchlosť chemickej reakcie pri konštantnej teplote je úmerná súčine koncentrácií látok, ktoré do nej vstupujú. Majme dve chemické látky A a B s objemami 10 a 20 litrov, z ktorých chemickou reakciou vzniká produkt C . Aby sa vytvorili 3 objemové jednotky tejto látky, do reakcie musia vstúpiť dve objemové jednotky A a jedna objemová jednotka B . Nájdite množstvo látky C v ľubovoľnom čase, ak viete, že za 20 minút vzniklo 6 litrov chemickej látky C .

Nech v čase t je v nádobe x litrov látky C . Koncentrácia jednotlivých produktov bude:

$$c_A = \left(10 - \frac{2x}{3} \right) \quad c_B = \left(20 - \frac{x}{3} \right) \quad (5.239)$$

a podľa hore uvedeného zákona chemických reakcií:

$$\frac{dx}{dt} = K c_a c_b = K \left(10 - \frac{2x}{3} \right) \left(20 - \frac{x}{3} \right) = c(15-x)(60-x) \quad (5.240)$$

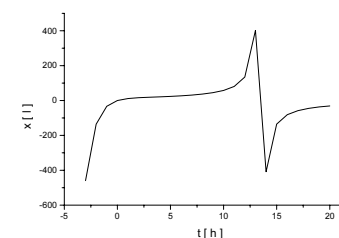
kde k , K sú konštanty. Použitím metódy separácie premených s počiatočnou podmienkou $x(0) = 0$:

$$\frac{60-x}{15-x} = 4e^{45kt} \quad (5.241)$$

Neznámu konštantu k určíme zo zadania $x\left(\frac{20}{60}h\right) = 6$:

$$x = 15 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{3t}} \quad (5.242)$$

Z praktických dôvodov je nám jasné, že maximálny výtťažok reakcie, ktorý reprezentujeme produktom C , musí byť ohraňovaný, pretože objemy látok $A(10l)$ a $B(20l)$ sú tiež konečné. Formálnou analýzou rovnice (5.242) však prideme k záveru, že v čase t_{extrem} , pre ktorý platí $\left(\frac{2}{3}\right)^{3t_{\text{extrem}}} = 4$, objem $x \rightarrow \infty$. Našťastie tento fakt neodporuje našim predstavám, pretože $t_{\text{extrem}} < 0$, ale chemická reakcia prebieha v čase $t \geq 0$. Zároveň nemajú zmysel tie riešenia, pre ktoré $x < 0$.



obr. V.41

5.5.6 Model dravec a obeť.

V ďalšej časti sa pokúsme nájsť jednoduchý model na popis počtu dravcov (líšok) a ich obetí (zajacov) v populácii. Počet líšok v prírode narastá dovtedy,

pokiaľ budú mať dostatok potravy-zajacov. V určitom čase však nastane situácia, keď sa líšky premnožia a dôsledkom nedostatku zajacov ich počet začne klesať. Zhoršenie životných podmienok pre líšky, zlepšenie životných podmienok pre zajace, ktorých počet začne narastať. Nárast počtu zajacov zase vedie k obnove potravy pre líšky, ktorým sa znovu začne dariť. Celý cyklus sa zopakuje. Predpokladajme že počet líšok v populácii je L a zajacov Z , potom:

$$\frac{dZ}{dt} = -Z(L - L_0)\alpha \quad (5.243)$$

$$\frac{dL}{dt} = \beta(Z - Z_0)L \quad (5.244)$$

kde Z_0 a L_0 sú rovnovážne počty líšok a zajacov, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Sústavu rovníc rozreťazíme a zlinearizujeme nasledujúcou substitúciou:

$$L = L_0 + l \quad (5.245)$$

$$Z = Z_0 + z \quad (5.246)$$

Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že fluktuácie v počte zajacov l a v počte líšok z sú malé, v porovnaní s rovnovážnymi stavmi: $l \ll L_0$, $z \ll Z_0$:

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha Z_0 l \quad (5.247)$$

$$\frac{dl}{dt} = \beta L_0 z \quad (5.248)$$

Zderivovaním (5.247) a využitím (5.248):

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\alpha Z_0 \beta L_0 z \quad (5.249)$$

Počet líšok a zajacov v populácii osciluje s frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\alpha Z_0 \beta L_0} \quad (5.250)$$

5.6 Cvičenia

5.1.* Uvažujme tri rovnaké náboje Q , umiestnené na priamke, vzdialené postupne od seba a . Krajné náboje sú upevnené, prostredný náboj je voľný. Vypočítajte jeho frekvenciu malých kmitov.

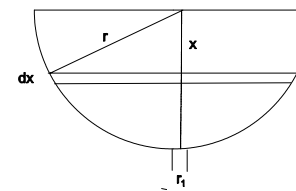
$$\text{Riešenie: } \omega = \frac{Q}{\sqrt{\pi \epsilon_0 a^3 m}}$$

5.2.* Polohový vektor bodu A sa s časom mení podľa vzťahu $\vec{r} = \alpha t \vec{i} + \beta t^2 \vec{j}$. Napíšte, po akej krivke sa pohybuje.

$$\text{Riešenie: } y = \frac{\beta}{\alpha^2} x^2$$

5.3.* Za aký čas vytečie voda z nádoby tvaru polgule o priemere $d = 2m$ kruhovými prierezom s priemerom $r_1 = 0,2m$ na dne nádoby. Nádoba bola celá naplnená vodou.

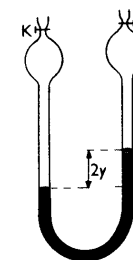
$$\text{Riešenie: } dt = \frac{(r+x)\sqrt{(r-x)}}{\sqrt{2gr_1^2}} dx$$



obr. V.42

5.4.* Rýchlosť tečenia vody v rieke narastá kvadraticky z nuly na krajoch po rýchlosť u v strede rieky. Naprieč rieky sa pohybuje loď, vzhľadom na smer tečenia vody kolmo rýchlosťou v . Nájdite trajektóriu lode.

5.5.* V trubici znázornenej na obrázku V.43 je stĺpec ortuti s hmotnosťou m a dĺžkou l . Určte periódu vlastných kmitov ortuťového stĺpca pri otvorených kohútikoch K



obr. V.43

$$\text{5.6.} \quad tgy \, dx - x \ln x \, dy = 0 \quad y(e) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Riešenie: } y = \arcsin(\ln x), \quad x \in (e^{-1}, e)$$

$$\text{5.7.} \quad \frac{dy}{dx} - y \sin x = \sin x \cdot \cos x$$

$$\text{Riešenie: } y = K \exp(-\cos x) - \cos x + 1$$

5.8.* Určte výchylku od zvislého smeru voľne padajúceho telesa z výšky h nad Zemou vplyvom Coriolisovej sily. Gravitačné pole považujte za homogénne.

$$\text{Riešenie: } \frac{d^2 x}{dt^2} = 2\omega g t \cos \varphi \implies x = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi$$

5.9. Nájdiť krivku, ktorá s x a y -ovou súradnicou ohraničuje plochu, úmernú dĺžke oblúka.

$$\text{Riešenie: } \int_0^x y dx = \int_0^x \sqrt{1+y^2}, y = \frac{a}{2} [\exp(\frac{x+a}{a}) + \exp(-\frac{x+a}{a})]$$

5.10. Použitím nekonečného radu nájdite približné riešenie rovnice $y' = \exp x - y^2$

$$\text{Riešenie: } y = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{5x^4}{4!} + \dots$$

5.11*. Nájdiť polohu telesa, ak jeho zrýchlenie je nepriamoúmerné času t .

$$\text{Riešenie: } x = k(t \ln t - t) + c_1 t + c_2$$

5.12. $y''^2 = 4(y' - 1)$

$$\text{Riešenie: } y = \frac{(x+A)^3}{3} + x + 8$$

5.13. $y - 2y' + 2y = 4 \exp x \sin x$

$$\text{Riešenie: } y = a \exp x \cos x + B \exp x \sin x - Bx \exp x \cos x$$

5.14. $y' = \frac{x}{y}$

$$\text{Riešenie: } y = \pm \sqrt{c + x^2}$$

5.15. $y' = y^2 + 1$

$$\text{Riešenie: } y = \tan(x + c)$$

5.16. $x^3 y' - 2y = 0$

$$\text{Riešenie: } y = c_1 \exp \frac{-1}{x^2}$$

5.17. $x^2(y^3 + 5) dx + (x^3 + 5)y^2 dy = 0, y(0) = 1$

$$\text{Riešenie: } (x^3 + 5)(y^3 + 5) = 30$$

5.18. $y'' + n^2 y = \cos(mx)$

$$\text{Riešenie: } y = A \cos nx + B \sin nx + \frac{\cos mx}{n^2 - m^2}$$

5.19. $y'' + y = \sin x$

$$\text{Riešenie: } y = A \cos x + B \sin x - \frac{x}{2} \cos x$$

5.20. $y'' + 2y' = x$

$$\text{Riešenie: } y = c_1 + c_2 \exp(-2x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2$$

5.21. $y'' - 2y' + y = (x+1) \exp(2x)$

$$\text{Riešenie: } y = (c_1 x + c_2) \exp x + (x+1) \exp 2x$$

5.22. $y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x$

$$\text{Riešenie: } y = \exp(-x) (c_1 \cos 2x + c_2 \sin x) + \frac{1}{5} (2 \cos x + \sin x)$$

5.23. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$

$$\text{Riešenie: } y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2 \cos x}$$

5.24. $y'' + 4y = x \sin x$

$$\text{Riešenie: } y = (A - \frac{1}{8}x^2) \cos 2x + (B + \frac{1}{16}x) \sin 2x$$

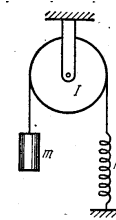
5.25. $y'' - y = x \exp(-x)$

$$\text{Riešenie: } y = c_1 \exp x + (c_2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2) \exp(-x)$$

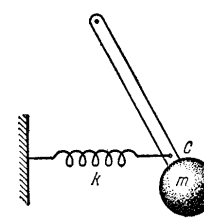
5.26*. Nájdiť frekvenciu malých kmitov častice v poli $U(x) = V \cos(\alpha x) - Fx$.

$$\text{Riešenie: } \omega^2 = \frac{V\alpha^2}{m} \sqrt{1 - (\frac{F}{V\alpha})^2}, \text{ minimum } U(x) \text{ existuje pre } F < V\alpha$$

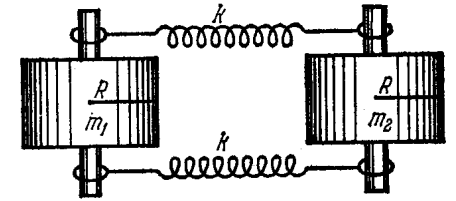
5.27*. Vypočítajte periódu malých kmitov nasledovných sústav



obr. V.44a



obr. V.44b



obr. V.44c

$$\text{Riešenie: } 2\pi \sqrt{\frac{I/R^2 + M}{K}}, 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga + ka^2}}, 2\pi \sqrt{\frac{3m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

5.28. Vypočítajte periódu kmitov pologule s polomerom R .

$$\text{Riešenie: } U = mgx_T(1 - \cos \varphi), T = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{5} - \frac{3}{4} \cos \varphi \right) mR^2 \dot{\varphi}^2, \text{ teda } \omega = \sqrt{\frac{5g}{6R}}$$