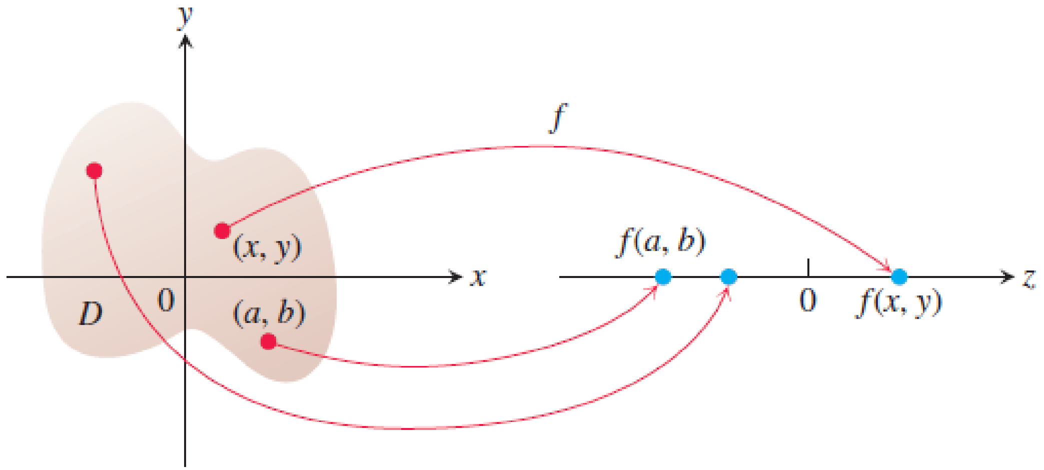
Funkcie viacerých premenných



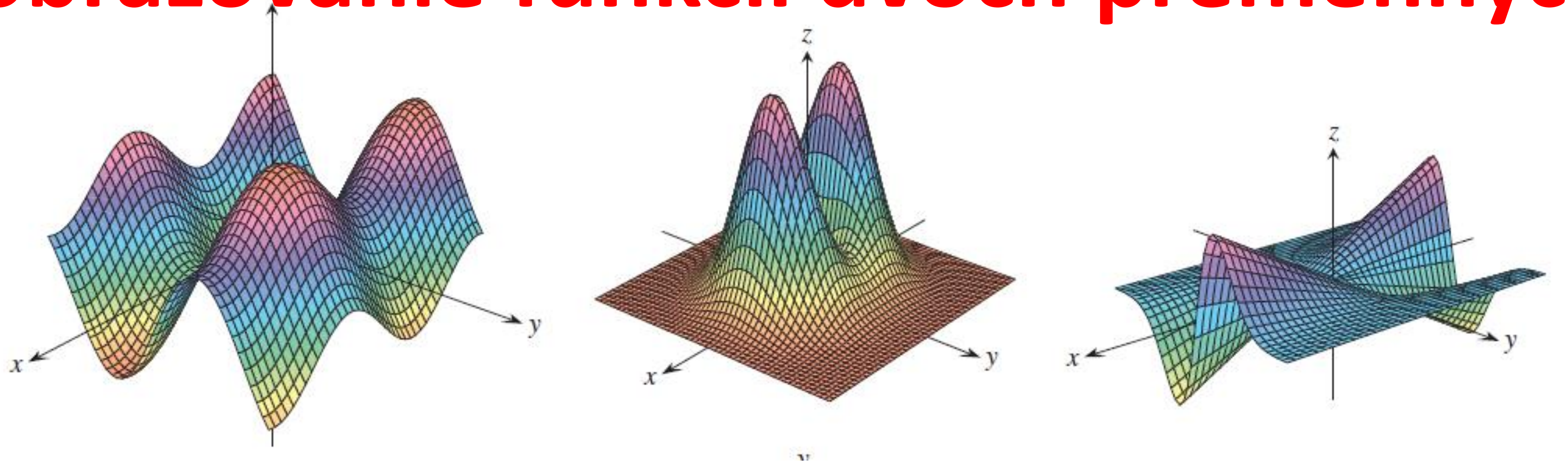
Definičný obor

Obor hodnot

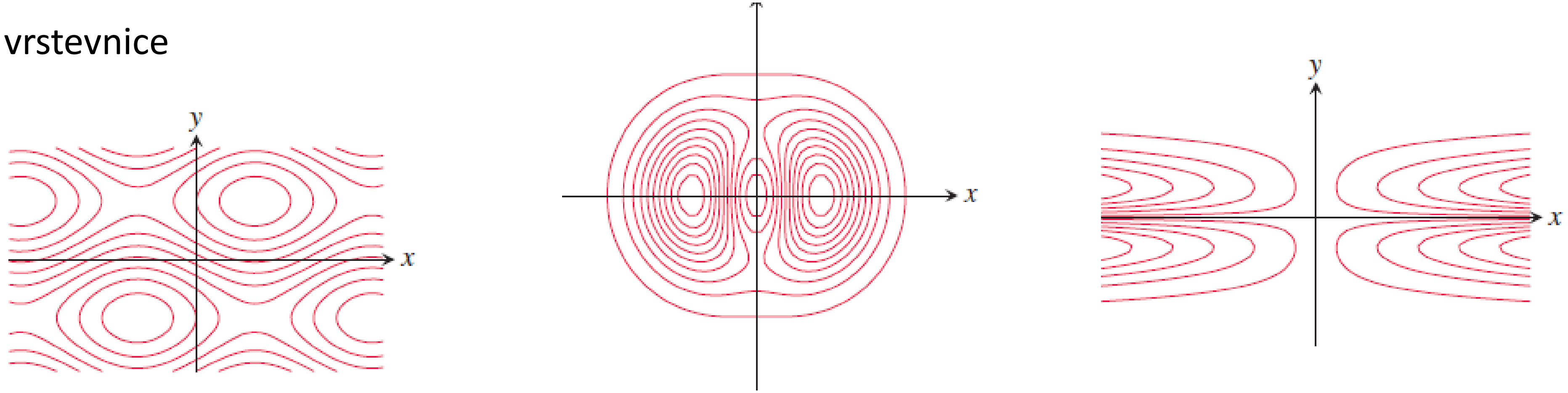
f(x,y)

Function	Domain	Range
$z = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$z = \dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$z = \sin xy$	Entire plane	$[-1, 1]$

Zobrazovanie funkcií dvoch premenných



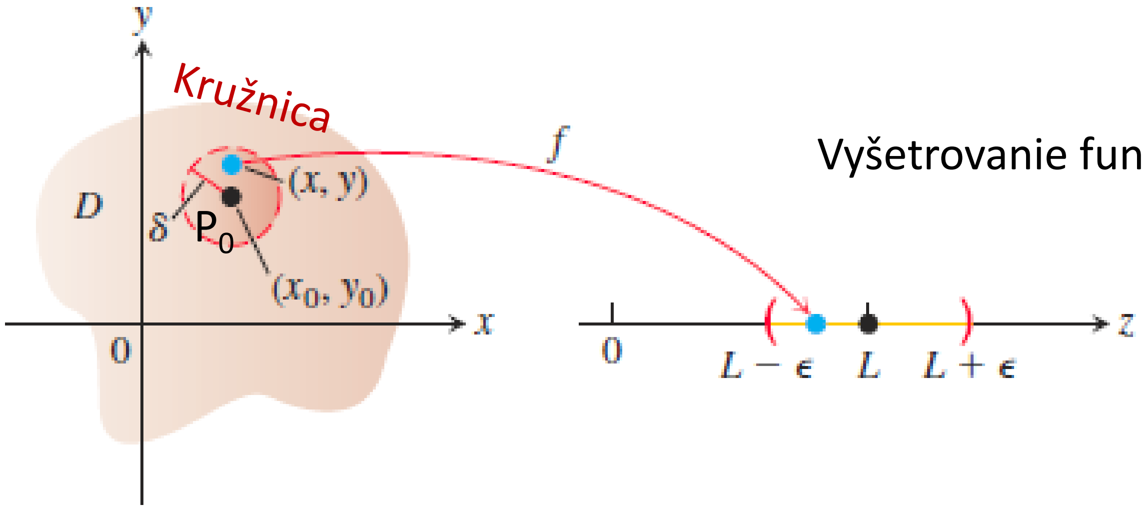
vrstevnice



Limita funkcie niekoľkých premenných

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = L$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = L$$



Vyšetrovanie funkcie v okolí bodu P0

Číslo L sa nazýva limitou funkcie dvoch premených z=f(x,y) v bode P_0, ak pre ľubovoľné ε>0 existuje také okolie δ bodu P_0 (x_0,y_0) , že pre každý bod z tohto okolia je splnená nerovnosť:

$$\left| f(x, y) - L \right| < \varepsilon$$

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Výpočet limít

Dosadením

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{0 - (0)(1) + 3}{(0)^2(1) + 5(0)(1) - (1)^3} = -3$$

$$\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Úpravami, v prípade, že vyniká výraz 0/0, ∝/∝, 0 ∝

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$= 0(\sqrt{0} + \sqrt{0}) = 0$$

Limity funkcií viacerých premenných

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

Niekedy ľahký výpočet , cez ***vhodnú substitúciu***, pričom dostaneme limitu z funkcie od jednej premennej

$$P(x,y)\to P_0(0,0)$$

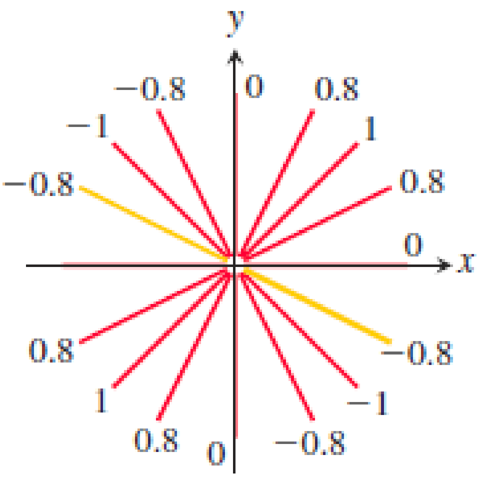
Približujeme sa k bodu P_0 nad všetky medze, t.j. ich vzdialenosť od počiatku SS zmenšujeme $\rho\to 0$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1}=2$$

Funkcia je v bode x=0, y=0 nedefinovaná, ale v bode existuje limita.

Aby limita existovala, potom Limita zo <u>všetkých smeroch</u> sa musí rovnať tej istej hodnote

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



K bodu sa približujeme po priamke y=mx, hodnoty funkcie sa menia nasledovne:

Limita neexistuje

$$f(x,y)\Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2+y^2}\Big|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}.$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{along } y=mx}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[f(x,y)\Big|_{y=mx} \right] = \frac{2m}{1+m^2}$$

Limita nie je jednoznačne určená , závisí od smernice priamky, po ktorej sa k bodu blížime $\Rightarrow$**limita neexistuje**

Špeciálna limita – parcialna derivácia

Vyšetrovanie rýchlosti zmeny funkcie v špeciálnych smeroch – pozdĺ osí

Parciálne derivácie

Čiastočný prírastok

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=f'_x(x_0,y_0,z_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=f'_y(x_0,y_0,z_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_z f}{\Delta z}=f'_z(x_0,y_0,z_0)$$

Posúvame sa v smere osi x, tak sa pohybujeme po priamke s fixovanou hodnotou y

Zafixovaním všetkých súradníc okrem tej, podľa ktorej derivujeme, pracujeme v podstate s funkciou jednej premennej

Geometrický význam: Parciálna derivácia určuje tangens uhla, dotyčnice, prechádzajúcou bodom M a priamkou ktorá predstavuje priesečník povrchu z=f(x,y) a rovinou y=y0

Totálny diferenciál

$$\boxed{f = xy^2}$$

Prírastok funkcie:

Nelineárna časť vzhľadom na prírastky Δx Δy

$$\Delta f = \boxed{y^2\Delta x + 2xy\Delta y} + \boxed{2y\Delta x\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2}$$

Lineárna časť vzhľadom na prírastky Δx Δy

VLASTNOSŤ:

Oba členy sa pri blížia k nule pri Δx→0 Δy→0 ale druhý člen rýchlejšie

Totálny diferenciál

Funkcia z=f(x,y) sa nazýva diferencovateľnou v bode P, ak jej celkový prírastok Δf, možno napísať v tvare:

Nelineárna časť sa blíži k nule rýchlejšie ako lineárna

Vyšší rád malosti ako vzdialenosť medzi bodmi $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

$$\Delta f = \boxed{A\Delta x + B\Delta y} + \boxed{\omega(\Delta x, \Delta y)} \qquad \boxed{\lim_{\rho\to 0} \frac{\omega(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0}, \quad A, B \neq f(\Delta x, \Delta y)$$

Zvyškový člen

Hlavná časť prírastku $df = A\Delta x + B\Delta y$ sa nazýva totálny diferenciál

Ak funkcia z=f(x,y) je diferencovateľná, potom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Totálny diferenciál – prostriedok na približný výpočet hodnôt funkcií

$$\boxed{f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right)+\left.f_x'\right|_{x_0,y_0} \Delta x+\left.f_y'\right|_{x_0,y_0} \Delta y}$$

Ak Δx a Δy dostatočne malé potom ω možme zanedbať

$$arctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right) \quad \rightarrow arctg\left(\frac{x}{y}-1\right) \qquad arctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right) \approx 0,75$$

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{ll} x_0=2 & \Delta x=-0,03 \\ y_0=1, & \Delta y=0,02 \end{array}} \\ \boxed{arctg1=\dfrac{\pi}{4}} \end{array}\right.$$

Kruhový výsek so stredovým uhlom φ=80^0 je potrebné zmenšiť o 15´. Určte o koľko treba zväčšiť polomer výseku, aby sa plocha nezmenila 15´=(1/4)^0

$$S=\frac{\pi r^2}{360} \varphi \qquad \Delta S=\left.\frac{\partial S}{\partial r}\right|_{r_0,\varphi_0} \Delta r+\left.\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right|_{r_0,\varphi_0} \Delta \varphi=0$$

$$\Delta r=-\frac{r_0 \Delta \varphi}{2 \varphi_0}=0.5mm$$

$$\bar{\Delta}_u = \left| f'_x(x_0, y_0, z_0) \right| \bar{\Delta}_x + \left| f'_y(x_0, y_0, z_0) \right| \bar{\Delta}_y$$

Hranice absolútnej nepresnosti

DOSLEDKY:

$z = x + y$ $\quad$ $\bar{\Delta}_u = \bar{\Delta}_x + \bar{\Delta}_y$

$z = x - y$ $\quad$ $\bar{\Delta}_u = \bar{\Delta}_x + \bar{\Delta}_y$

Sčítavanie absolútnych chýb

$$z = x * y \qquad \bar{\Delta}_{\ln z} = \frac{\bar{\Delta}_x}{x_0} + \frac{\bar{\Delta}_y}{y_0} = \bar{\delta}_x + \bar{\delta}_y$$

Sčítavanie relatívnych chýb

$$z = \frac{x}{y} \qquad \bar{\Delta}_{\ln z} = \frac{\bar{\Delta}_x}{x_0} + \frac{\bar{\Delta}_y}{y_0} = \bar{\delta}_x + \bar{\delta}_y$$

Ohodnotenie chýb merania

Meraním sme zistili, že kyvadlo s dĺžkou l_0=50,00 cm má periódu kmitov T_0=1,4196s. Určte tiažové zrýchlenie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow g = \frac{4\pi^{2} l}{T^{2}}$$

$$\bar{\Delta}_T = 0,0001s \quad T_0 = 1,4196s$$

$$\bar{\Delta}_\pi = 0,0001 \quad \pi_0 = 3,1426$$

$$\bar{\Delta}_l = 0,01cm \quad l_0 = 50,00cm$$

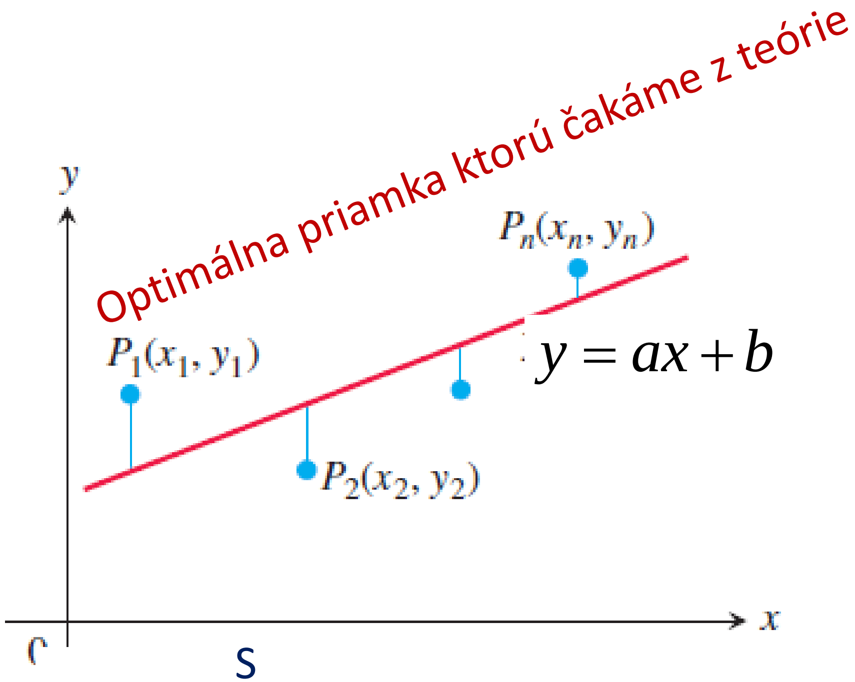
$$\bar{\delta}_g = \frac{2\bar{\Delta}_\pi}{\pi_0} + \frac{2\bar{\Delta}_T}{T_0} + \frac{\bar{\Delta}_l}{l_0} \approx 0,00040$$

$$g_0 = 979,5\frac{cm}{s^2}$$

$$\bar{\Delta}_g = g_0\bar{\delta}_g = 0,4\frac{cm}{s^2}$$

$$\boxed{g = 979,5 \pm 0,4 \ \frac{cm}{s^2}}$$

Metóda najmenších štvorcov

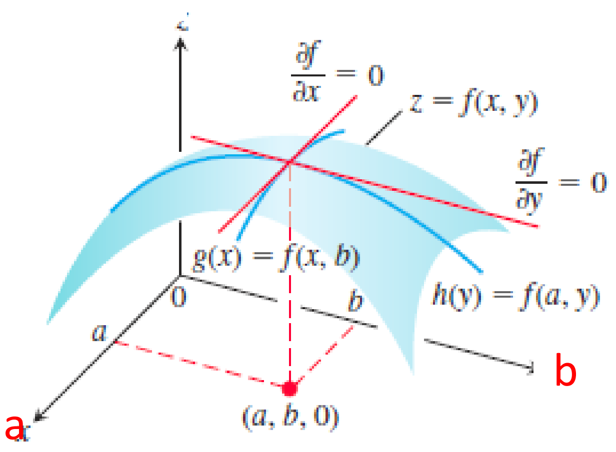


Predpokladajme, že namerané hodnoty by mali vyhovovať priamke

$$\boxed{y = ax + b}$$

Kritérium priblíženia –suma štvorcov odchýliek od teoretrickej priamky

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - ax_i - b \right]^2$$



Funkcia S môže mať minimum len v takých bodoch, kde platia rovnice:

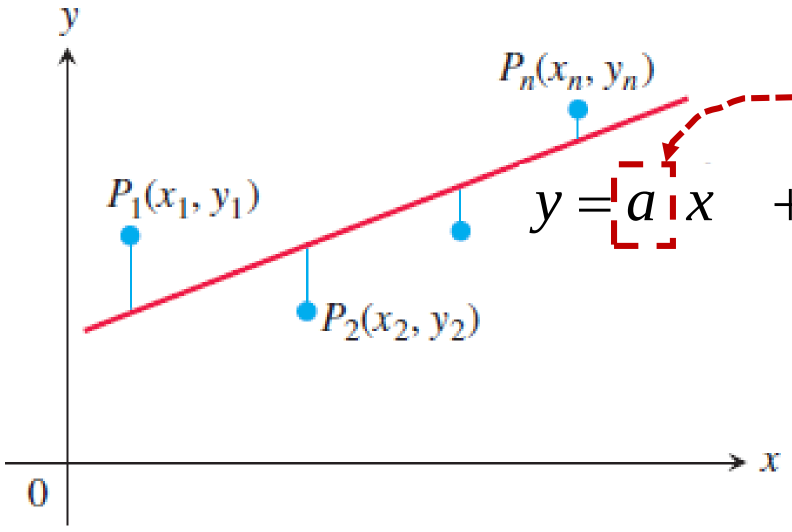
$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = 0$$

Metóda najmenších štvorcov

Rovnice pre hľadanie neznámej a, b:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} &= 0\\ \frac{\partial S(a,b)}{\partial b} &= 0\end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} x_i &= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i\\ a\sum x_i + bn &= \sum_{i=1}^{N} y_i\end{aligned}}$$



$$y = \boxed{a}\, x + \boxed{b}$$

$$\boxed{a} = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & n \end{vmatrix}} = \frac{n\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{n\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i}$$

$$\boxed{b} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i}$$

Gradient - využitie

$$grad f\,(x,y,z) = f'_x(x,y,z)\vec{i} + f'_y(x,y,z)\vec{j} + f'_z(x,y,z)\vec{k}$$

Grad f je vektor, ktorého veľkosť je $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$

Vyjadrenie diferenciálu cez gradient

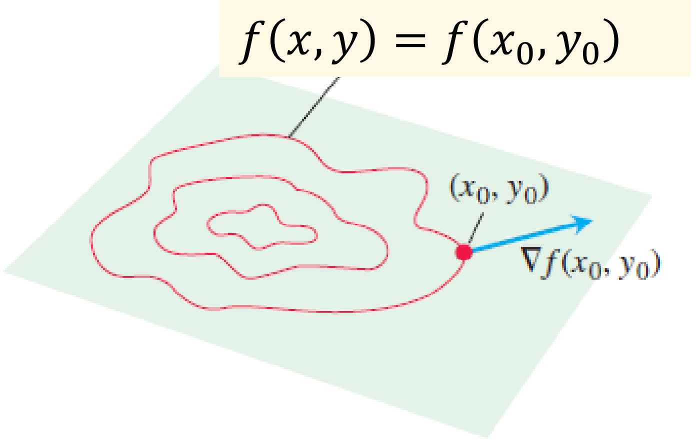
$$df \approx \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial y}dz = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{k}\right] \bullet \left[dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right] = grad f \bullet d\vec{r}$$

$$df \approx \Delta f = grad f \bullet d\vec{r} = |grad f|\,|dr| \cos \boxed{\varphi}$$

Uhol medzi vektormi $grad f, d\vec{r}$

Grad f je vektor, ktorého smer určuje najrýchlejší rast skalárnej funkcie f.
Gradient je teda charakteristikou skalárneho poľa a nezávisí od súradnicového systému, v ktorom sa vyšetruje

$$df \approx \Delta f = grad f \bullet d\vec{r} = |grad f|\,|dr| \cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad grad f \perp d\vec{r}$$



Grad f je kolmý na ekviskalárne plochy

Smerová derivácia funkcie F

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_\lambda F}{\Delta l}$$

Rýchlosť zmeny funkcie F v smere určenom vektorom $\vec{\lambda}$

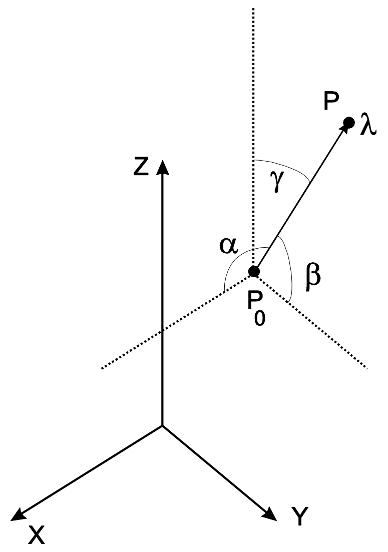
Hľadajme deriváciu v smere tohto jednotkového vektora $\vec{\lambda}$

$$\vec{\lambda} = \cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k}$$

Funkcia v novom bode

$$\Delta_\lambda F = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x,y,z)$$

$$\Delta F = F'_x(x,y,z)\Delta x + F'_y(x,y,z)\Delta y + F'_z(x,y,z)\Delta z + \omega$$



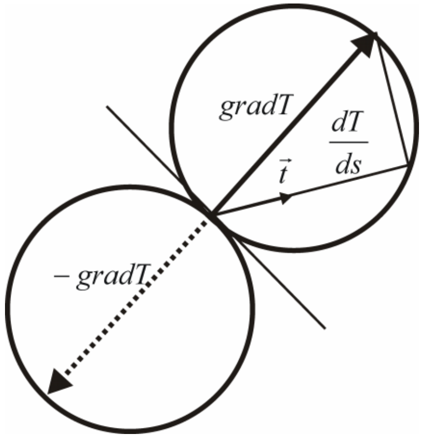
Pohybujeme sa po priamke

$$\Delta x = \Delta l \cos\alpha$$

$$\Delta y = \Delta l \cos\beta$$

$$\Delta z = \Delta l \cos\gamma$$

Gradient



$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial l} = gradF \bullet \vec{\lambda}}$$

Projekcia gradientu skalárne funkcie F do smeru jednotkového vektora $\vec{\lambda} = cos\alpha\vec{i} + cos\beta\vec{j} + cos\gamma\vec{k}$
sa rovná derivácie tejto funkcie v smere $jednotkového\ vektora\ \vec{\lambda}$

Nabla operátor

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$grad f = \vec{\nabla} f$$

$$div \vec{A} = \vec{\nabla} \bullet \vec{A}$$

$$rot \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Fyzikálne zadanie: majme silové polia s nasledovnými potenciálmi. Nájdite sily, ktoré v nich pôsobia

$$f(x,y,z) = x^3 z + zxy$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$grad\, r$$

$$grad\, r^3$$

$$grad\, f(r)$$

$$grad\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$grad(uv)$$

$$grad(\vec{c} \bullet \vec{r})$$

$$grad\left(\frac{\vec{c} \bullet \vec{r}}{r^2}\right)$$

$$\boxed{grad f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$grad f(r) = \frac{df}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{\nabla}(f_1 + f_2) = \vec{\nabla} f_1 + \vec{\nabla} f_2$$

$$\vec{\nabla}(f_1 f_2) = f_1 \vec{\nabla} f_2 + f_2 \vec{\nabla} f_1$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{1}{f_2^2}\left(f_2 \vec{\nabla} f_1 - f_1 \vec{\nabla} f_2\right)$$

$$\boxed{div\vec{A} = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

$$div\left(\vec{r}\right)$$

$$div\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$div\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$div\left(\frac{\vec{c}}{r}\right)$$

$$div\left(x+y\right)\vec{r}$$

$$\boxed{rot\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] - \vec{j}\left[\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]}$$