ceho telesa v ľubovoľnom okamžiku t.

366. Tenká, nehomogénna tyč AB má dĺžku $L = 20$ cm. Hmota úseku AM rastie úmerne so štvorcom vzdialenosti bodu M od bodu A, pričom sa hmota

úseku $AM = 2$ cm rovná 8 g. Nájdite: a) priemernú lineárnu hustotu úseku tyče $AM = 2$ cm; b) celej tyče; c) hustotu tyče v bode M.

367. V tenkej nehomogénnej tyči AB dĺžky 30 cm je hmota (v gramoch) rozložená podľa zákona

$$m = 3l^2 + 5l$$

kde l je dĺžka časti tyče, počítaná od bodu A. Nájdite: 1. priemernú lineárnu hustotu tyče; 2. lineárnu hustotu tyče: a) v bode, vzdialenom od bodu A o $l = 5$ cm, b) v bode A, c) na konci tyče.

392. Pod akým uhlom sa pretína parabola $y = x^2$ s priamkou $3x - y - 2 = 0$?

393. Pod akými uhlami sa pretínajú paraboly $y = x^2$ a $y^2 = x$?

394. Pod akými uhlami sa pretína hyperbola $y = \frac{1}{x}$ s parabolou $y = \sqrt{x}$?

395. Napíšte rovnice dotyčnice a normály ku krivke $y = x^3$ v bode $x = 2$. Nájdite dĺžku subtangenty a subnormály.

396. Pri akej hodnote argumentu x sú dotyčnice ku krivkám $y = x^2$ a $y = x^3$ rovnobežné?

438. Bod sa pohybuje po priamke tak, že jeho vzdialenosť s od počiatočného bodu sa rovná za t sekúnd

$$s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$$

a) Udajte časy, v ktorých sa pohybujúci sa bod nachádzal v počiatočnom bode. b) V ktorom čase sa rýchlosť rovná nule?

439. Teleso s hmotou 3 kg sa pohybuje priamočiare podľa zákona

$$s = 1 + t + t^2$$

pričom je s udané v centimetroch, t v sekundách. Udajte kinetickú energiu $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ telesa v čase 5 s po začatí pohybu.

V úlohách 752—755 nájdite rovnice dotyčnice a normály k daným krivkám.

752. $y = \sin x$ v bode $M(x_0, y_0)$.

753. $y = \lg x$ v bode $M(x_0, y_0)$.

754. $y = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ v bode so súradnicou $x = 2a$.

V úlohách 737—750 nájdite derivácie funkcií daných implicitne.

737. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

738. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$

739. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

740. $y^2 \cos x = a^2 \sin 3x$

744. $y = \cos(x + y)$

745. $\cos(xy) = x$

746. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

747. $y = 1 + xe^y$

748. $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$

V úlohách 766—771 nájdite uhly, pod ktorými sa pretínajú dané krivky.

766. $x^2 + y^2 = 8$ a $y^2 = 2x$.

767. $x^2 + y^2 - 4x = 1$ a $x^2 + y^2 + 2y = 9$.

768. $x^2 - y^2 = 5$ a $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$.

769. $x^2 + y^2 = 8ax$ a $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

796. Nájdite približnú hodnotu prírastku funkcie $y = \sin x$ pri zmene x z 30° na 30°1′. Čomu sa rovná sin 30°1′?

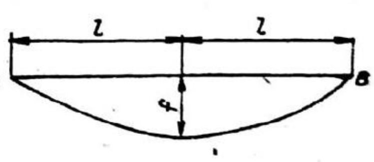
797. Nájdite približnú hodnotu prírastku funkcie $y = \operatorname{tg} x$ pri zmene x zo 45° na 45°10′.

798. Nájdite približnú hodnotu prírastku funkcie $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ pri zmene x z $\frac{\pi}{3}$ na $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{100}$.

792. Strana štvorca je 8 cm. O koľko sa zväčší jeho obsah, ak sa každá strana zväčší o a) 1 cm, b) 0,5 cm, c) 0,1 cm? Nájdite príslušné hodnoty diferenciálu obsahu a vypočítajte relatívnu chybu (v percentách) pri zámene prírastku diferenciálom.

808. Ak dĺžka zavesenej nite (drôtu elektrického vedenia, reťaze) (obr. 25) je $2s$, polovičná vzdialenosť koncových bodov l a veľkosť prehnutia f, platí približne

$$s = l\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)$$



Obr. 25.

a) Vypočítajte (približne), ako sa zmení dĺžka nite, ak sa veľkosť prehnutia f zmení o df.

b) Ak sa zmení dĺžka nite o ds (napríklad zmenou teploty alebo zaťaženia), ako sa zmení pritom veľkosť prehnutia?

834. Rýchlosť rastu funkcie $\sin x$ sa zväčšila n-krát. Koľkokrát sa pritom zmenila rýchlosť rastu funkcie $\operatorname{tg} x$?

829. Strana štvorca sa zväčšuje rýchlosťou v cm/s. Nájdite rýchlosť zmeny obvodu a obsahu štvorca v okamihu, keď je jeho strana a cm.

830. Polomer kruhu sa mení rýchlosťou v. Akou rýchlosťou sa mení jeho obsah a obvod?

831. Polomer gule sa mení rýchlosťou v. Akou rýchlosťou sa mení objem a povrch gule?

... mení dvakrát pomalšie ako argument?

V úlohách 850—853 nájdite smernice dotyčnice k daným krivkám.

850. $x = 3\cos t,\quad y = 4\sin t$ v bode $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$

851. $x = t - t^4,\quad y = t^2 - t^3$ v bode $(0,0)$

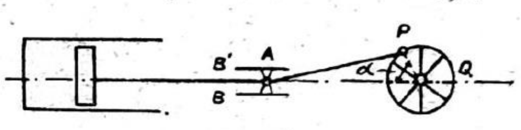
852. $x = t^3 + 1,\quad y = t^2 + t + 1$ v bode $(1,1)$

V úlohách 866—869 napíšte rovnice dotyčnice a normály k daným krivkám.

866. $x = 2e^t,\quad y = e^{-t}$ v bode $t = 0$.

867. $x = \sin t,\quad y = \cos 2t$ v bode $t = \frac{\pi}{6}$

896. Rebrík 10 m dlhý, postavený dolným koncom na zemi, opiera sa celou dĺžkou o vertikálnu stenu. Dolný koniec rebríka odstrčíme smerom od steny rýchlosťou 2 m/min. Akou rýchlosťou klesá horný koniec rebríka v okamihu, keď je dolný koniec vo vzdialenosti 6 m od steny? Aký smer má vektor rýchlosti?



Obr. 26.

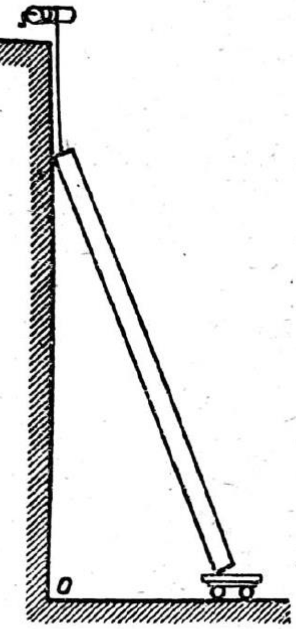
897. Vlak a balón pohnú sa naraz z toho istého miesta. Vlak sa pohybuje rovnomerne rýchlosťou 50 km/h, balón sa dvíha (tiež rovnomerne) rýchlosťou 10 km/h. Akou rýchlosťou sa navzájom vzďaľujú? Aký smer má vektor rýchlosti?

898. Muž vysoký 1,7 m sa vzďaľuje od lampy, ktorá je 3 m nad úrovňou ulice, rýchlosťou 6,34 km/h. Akou rýchlosťou sa pohybuje tieň jeho hlavy?

899. Kôň beží po kruhovej dráhe rýchlosťou 20 km/h. V mieste, z ktorého kôň začal bežať, dotýka sa kruhu priama ohrada. V strede kruhu je umiestená lampa. Akou rýchlosťou sa pohybuje tieň koňa po ohrade v okamihu, keď kôň prebehol $^1/_8$ kruhovej dráhy?

973. Bod sa pohybuje priamočiare, pričom $s = \frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2} + s_0$. Nájdite zrýchlenie na konci prvej sekundy (s je vyjadrené v cm, t v sec).

974. Bod sa pohybuje priamočiare, pričom $s = \sqrt{t}$. Presvedčte sa, že sa pohyb spomaľuje a že zrýchlenie a je úmerné tretej mocnine rýchlosti v.



Obr. 28.

975. Ťažký trám dĺžky 13 m spúšťajú na zem tak, že jeho dolný koniec je upevnený na vozík (obr. 28) a horný pridržiavajú lanom, namotaným na hriadeľ. Lano sa odmotáva rýchlosťou 2 m/min. S akým zrýchlením sa pohybuje vozík v okamihu, keď je od bodu O vzdialený 5 m?

976. Loď, ktorej paluba je 4 m pod úrovňou doku, priťahujú k nemu lanom, namotaným na hriadeľ, rýchlosťou 2 m/s. S akým zrýchlením sa pohybuje loď v okamihu, keď je vzdialená od doku na 8 m (v smere vodorovnom)?

977. Bod sa pohybuje priamočiare tak, že jeho rýchlosť sa mení úmerne s druhou odmocninou prejdenej dráhy. Dokážte, že sa pohyb deje pod účinkom konštantnej sily.

978. Sila účinkujúca na hmotný bod je nepriamo úmerná rýchlosti pohybu bodu. Dokážte, že kinetická energia bodu je lineárnou funkciou času.

1101. Tri body A, B, C neležia v jednej priamke; $\sphericalangle ABC = 60°$. Z bodu A vyjde auto a súčasne z bodu B vlak. Auto sa pohybuje smerom k bodu B rýchlosťou 80 km/h, vlak sa pohybuje smerom k C rýchlosťou 50 km/h. V ktorý okamih (počítajúc od začiatku pohybu) bude vzdialenosť medzi vlakom a autom najmenšia, ak vzdialenosť $AB = 200$ km?

1120. Radom pokusov získalo sa pre meranú veličinu A n rozličných hodnôt $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Za hodnotu A sa berie často taká hodnota x, že súčet štvorcov jej odchýlok od hodnôt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ má najmenšiu hodnotu. Nájdite x, ktoré vyhovuje tejto podmienke.

1121. Torpédoborec je zakotvený 9 km od najbližšieho miesta brehu. Vo vzdialenosti 15 km od tohoto miesta je stan, umiestený na brehu. Z torpédoborca treba poslať do stanu posla. V ktorom mieste brehu má pristáť posol, aby sa dostal do stanu v najkratšom čase, ak prejde peši 5 km za hodinu a na člne 4 km za hodinu?

V úlohách 604—618 nájdite deriváciu daných funkcií použijúc postup „logaritmického derivovania".

604. $y = x^{x^2}$

612. $y = \sqrt[x]{(x+1)^2}$

605. $y = x^{\frac{1}{x}}$

613. $y = (x^2+1)^{\sin x}$

Zderivujte

627. $y = \sin\frac{x}{2}\sin 2x$

628. $y = \sin x\, e^{\cos x}$

629. $y = x^5\sqrt[3]{x^6 - 8}$

630. $y = e^{-x^2}\lg x$

631. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

632. $y = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$

633. $y = e^{2x+3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$

634. $y = \frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$

635. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$

636. $y = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{cotg}\frac{x}{2}}{x}$

649. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

650. $y = \arccos\sqrt{1 - 3x}$

651. $y = \sin^2\left(\frac{1 - \lg x}{x}\right)$

652. $y = \log_3(x^2 - \sin x)$

653. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

654. $y = \lg\frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{x}$

655. $y = x\arcsin(\lg x)$

656. $y = \operatorname{tg}\frac{1 - e^x}{1 + e^x}$

657. $y = \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x}$

658. $y = 0{,}4\left(\cos\frac{2x+1}{2} - \sin 0{,}8x\right)^2$

659. $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$