Krivkový integrál a jeho aplikácie

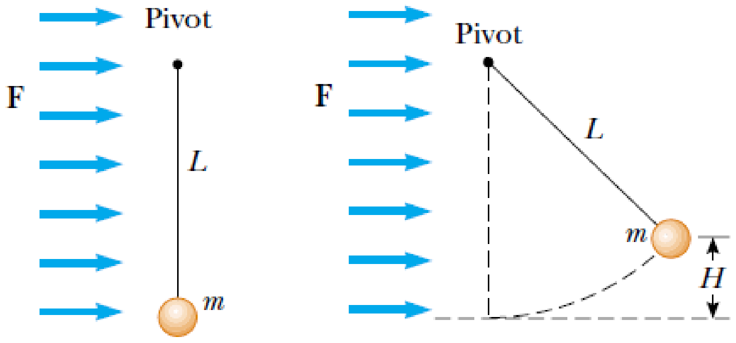
1, Častica hmotnosti m sa pohybuje po elipse, pričom :

$$x = A\cos kt$$

$$y = B\sin kt$$

Vypočítajte prácu výslednej sily počas časového intervalu

$$t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4k} \right\rangle$$



2, Ukážte, že každá sila konštantná , čo do veľkosti aj smeru je konzervatívna

3, Ukážte, že sila trenia je nekonzervatívna

4, Sila F=kt pôsobí v smere osi x na teleso s hmotnosťou m . Teleso je na začiatku v pokoji. Vypočítajte prácu sily a kinetickú energiu telesa v čase t

5, Vypočítajte prácu po ...

$$\frac{mk^2}{4}\left(A^2 - B^2\right)$$

Výpočet derivácie

- Derivácia funkcií zadaných implicitne:

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 10$$

$$\sin(xy) + \cos(xy) = tg(x+y)$$

$$xy - \ln y = xe^y$$

- Nájdite druhú deriváciu funkcie v **bode x=0**

$$e^y + xy = e$$

- Derivácia funkcie zadanej parametricky

$$x = \cos t \quad y = t + 2\sin t$$

$$x = e^t \sin t \quad y = e^t \cos t$$

$$x = t^2 - 2t \quad y = t^2 + 2t$$

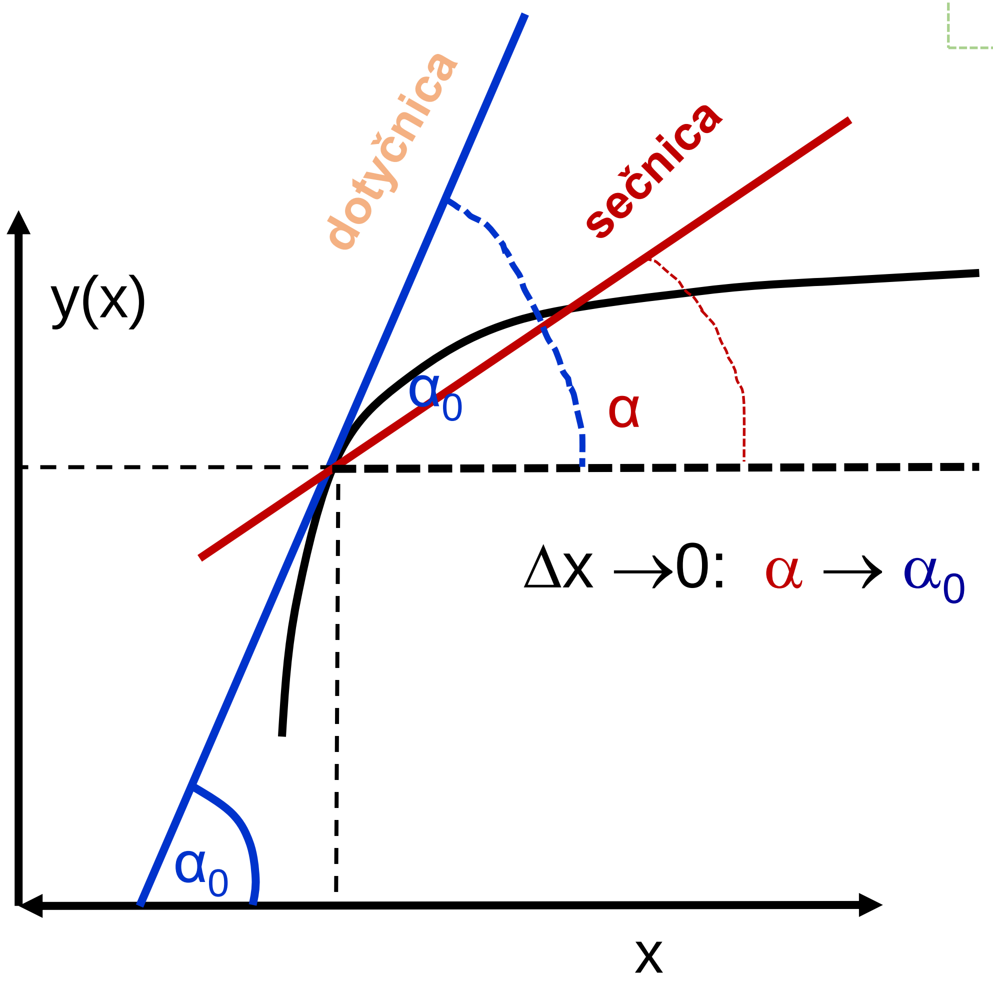
- Logaritmická derivácia

$$y = x^{tgx}$$

$$y = \cos x^{\sin x}$$

smernica dotyčnice

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$



$\Delta x \to 0$: $\alpha \to \alpha_0$

smernica dotyčnice

$$\tan \alpha_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

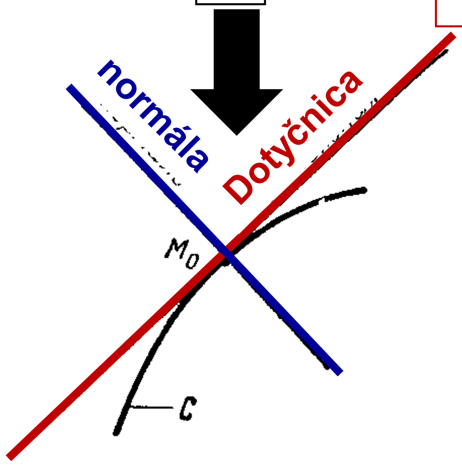
Geometrický význam derivácie – derivácia funkcie v danom bode určuje smernicu dotyčnice

Interpretácia: derivácie – Určuje okamžitú rýchlosť zmeny danej veličiny

Rovnica dotyčnice a normály ku krivke

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{(x - x_0)}$$

$\frac{\pi}{2}$



dotyčnica

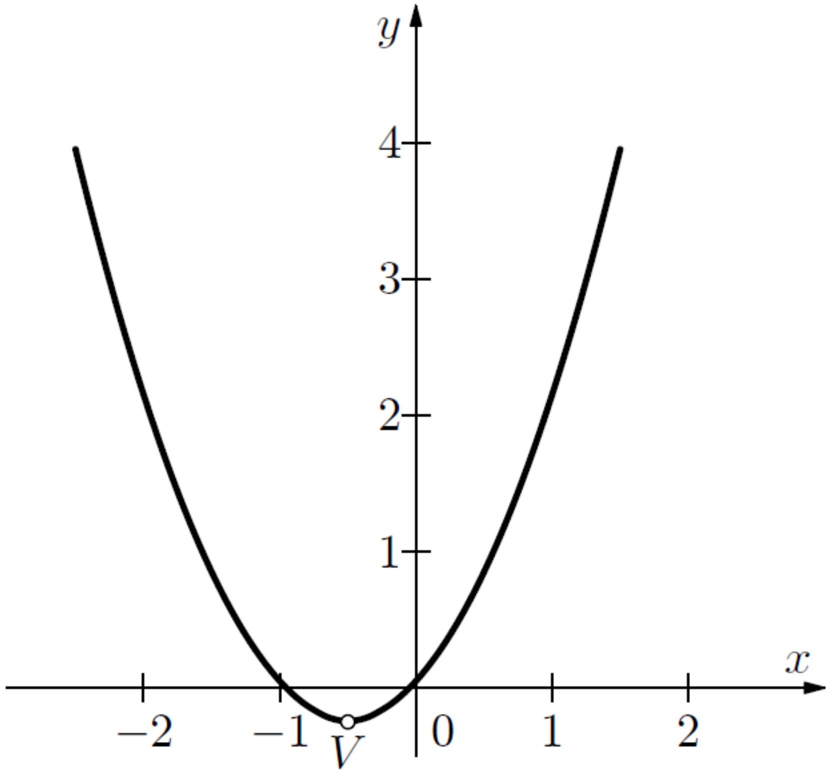
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$tg\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{tg\alpha}$$

normála

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Nájdite krivku ktorá prechádza počiatkom SS a jej smernica v každom bode je $2x + 1$.



Derivácia – ako dotyčnica k funkcii

1. Nájdite rovnicu dotyčnice k funkcii y=4- x^2 v priesečníku s osou x, pričom x>0
2. Pod akým uhlom pretína krivka y=sinx os x
3. Pod akým uhlom sa pretínajú krivky 2y= x^2 a 2y= $8-x^2$
4. Nájdite body, v ktorých je dotyčnica ku krivke $y=x^3+x-2$ rovnobežná s priamkou y=4x-1
5. Nájdite rovnicu dotyčnice ku krivke $y=x^3+3x^2-5$, ktorá je kolmá na priamku 2x-6y+1

6. Bod sa pohybuje priamočiaro, pričom x=$\sqrt{t}$. Ukážte, že pohyb je spomalený so zrýchlením úmerným tretej mocnine rýchlosti
7. Bod sa pohybuje po priamke priamočiaro tak, že jeho rýchlosť sa mení úmerne s druhou odmocninou prejdenej dráhy. Dokážte alebo vyvráťte , ci tento pohyb je vyvolaný konštantnou silou
8. Sila pôsobiaca na hmotný bod je nepriamoúmerná rýchlosti. Určte ako sa mení jeho kinetická energia.

Závislé veličiny

Väzbová podmienka.

Aplikácie, keď dve závislé premenné sú funkciami času (parametra)

Poznáme rýchlosť jednej premennej v danom okamihu a hľadáme rýchlosť druhej

Väzbová podmienka.

Objem gule V sa zväčšuje rýchlosťou 10m^3/s. Ako rýchle sa zväčšuje povrch gule v okamihu, keď jej objem je 36 pi m^3

$$\mathrm{V(t)} = \frac{4}{3}\pi \mathrm{r}^3\mathrm{(t)}$$

Predpokladajme , že teleso sa pohybuje po krivke y=x^3, pričom v bode, kde jeho x-ová súradnica je x=4m, jeho x-ová zložka rýchlosti je 3m/s.Aká je jeho y-ová zložka rýchlosti

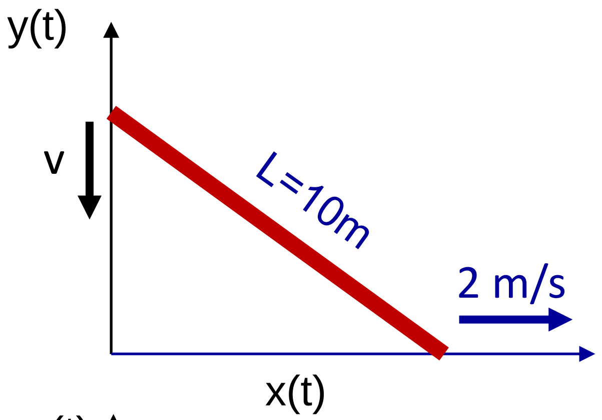
$$y(t) = x^3(t)$$

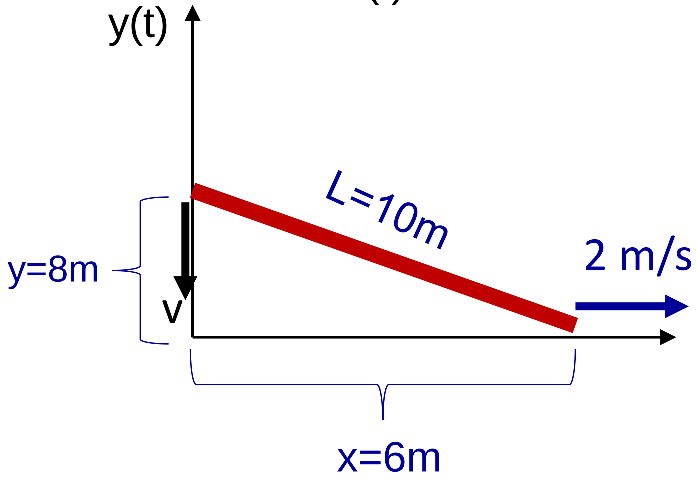
- Polomer gule sa mení s rýchlosťou v akou rýchlosťou sa mení objem a povrch gule.
- Polomer kruhu sa mení rýchlosťou v. Aká je rýchlosť zmeny dĺžky kružnice a plochy kruhu v okamihu, keď jej polomer je rovný r.

Závislé veličiny

Aplikácie, keď dve závislé premenné sú funkciami času (parametra)

Rebrík 10m dlhý sa opiera o stenu. Rebrík sa začne posúvať o stenu tak, že jeho spodok sa pohybuje rýchlosťou 2m/s. Ako rýchlo padá vrch v okamihu, keď spodok je 6m od steny.





$$\boxed{x^2(t) + y^2(t) = L^2}$$

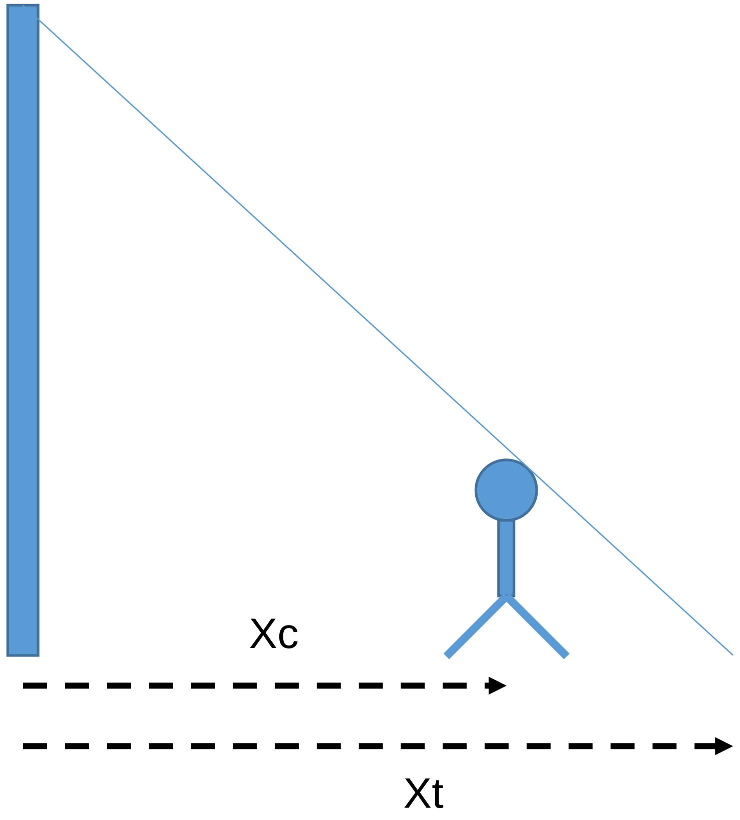
Derivovať podľa času

Rýchlosť zmeny plochy ohraničenej rebríkom, zemou a domom
Rýchlosť zmeny zorného uhla

$\boxed{\cos\alpha}$

Príklad

Muž vysoký 180cm sa pohybuje rýchlosťou 1,2m/s od stožiara vysokého 4,5m . Na povrchu stožiara svieti svetlo.
A, Ako rýchlo sa pohybuje vzdialenejší okraj tieňu ?
B, Ako rýchlo rastie dĺžka tieňa ?
C, Ukážte, že v každom okamihu sa jeho hlava vzďaluje od svetla rychlejšie ako jeho nohy



Teleso sa pohybuje po priamke tak, že jeho poloha sa mení v čase podľa vzťahu $x = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$
Určte, kedy sa teleso nachádzalo na začiatku, kedy malo nulovú rýchlosť, zrýchlenie, kedy zmenilo smer pohybu.
Určte kinetickú energiu v čase t

$$x = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$$

Teleso sa pohybuje po priamke tak, že jeho poloha sa mení v čase podľa vzťahu $x = \alpha\sqrt{t}$. Dokážte alebo vyvráťte tvrdenie, že pohyb je spomalený a zrýchlenie je úmerné tretej mocnine rýchlosti

Teleso sa pohybuje v rovine a jeho súradnica sa mení s časom podľa rovníc:

$$x = t^2 - 4t + 4$$
$$y = t^2 - 3t + 2$$

Nájdite rovnicu dotyčnice k trajektórie v bode [1,0].
Určte v tomto bode tangenciálne a normálové zrýchlenie

Najdeme parameter t

Príklad

- Teleso sa pohybuje v rovine xy podľa rovnice:

$$x = \alpha t$$

$$y = \alpha t\left[1 - \beta t\right] \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

•Určte trajektóriu pohybu, t.j. y(x).
•Určte veľkosť rýchlosti a zrýchlenia v ľubovoľných časoch.
•Určte čas t_0, v ktorom uhol medzi rýchlosťou a zrýchlením bude $\pi/4$.

Bod sa pohybuje v rovine XY podľa tak, že jeho x-ová a y-ova súradnica sa mení s časom nasledovne:

$$x = a\sin\omega t$$
$$y = a(1 - \cos\omega t)$$

Konštanty a,ω sú kladné.

A, Určite dráhu, ktorú hmotný bod prejde za čas τ.

B, Určte uhol medzi vektorom rýchlosti a zrýchlenia.

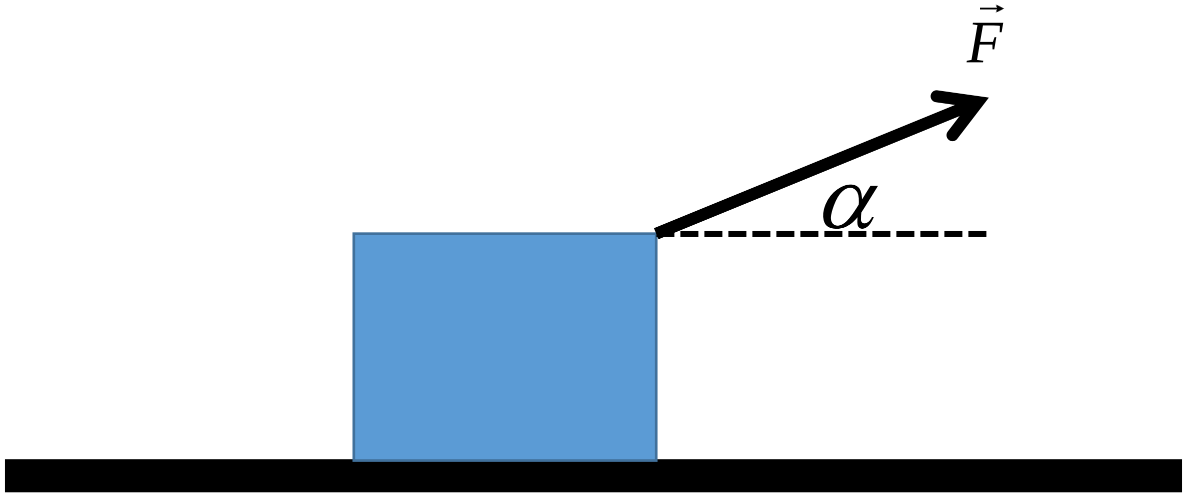
$$\boxed{s = \int |v|\, dt}$$

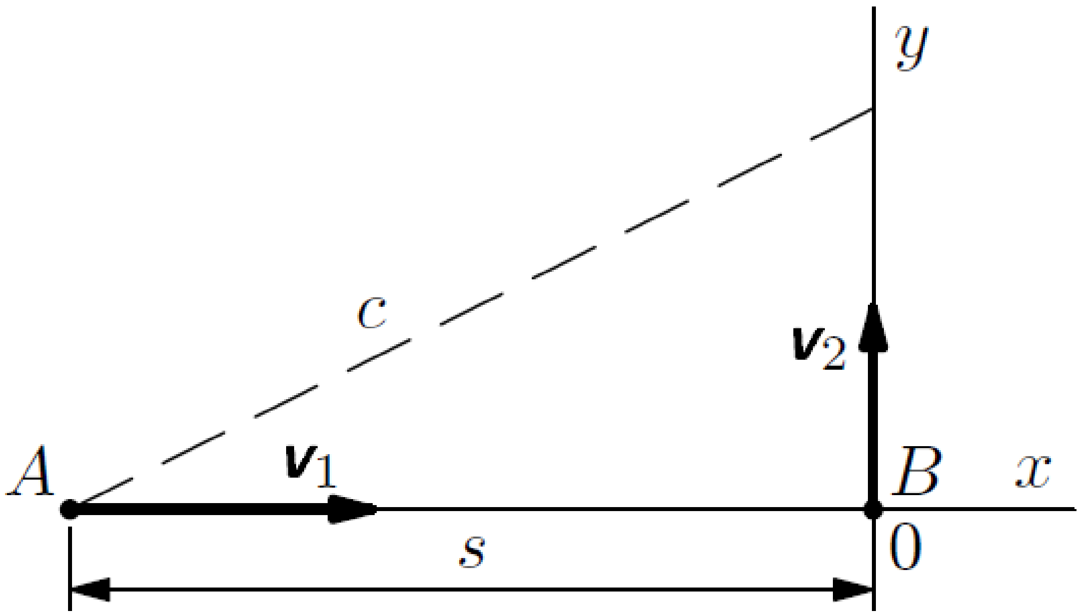
Vzdušný balón sa začína dvíhať z povrchu zeme. Rýchlosť jeho výstupu je konštantná $v_y = v_0$. Vplyvom vetra balón získava horizontálnu zložku rýchlosti: $v_x = \alpha y$. Určte trajektóriu balónu.

Tangenciálnu a normálovú zložku vektora zrýchlenia

Torpédoborec je zakotvený 9 km od najbližšieho miesta brehu. Vo vzdialenosti 15 km od tohoto miesta je stan, umiestený na brehu. Z torpédoborca treba poslať do stanu posla. V którom mieste brehu má pristať posol, aby sa dostal do stanu v najkratšom čase, ak prejde peši 5 km za hodinu a na člne 4 km za hodinu?

Teleso sa pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom po podložke, ktorej koeficient dynamického trenia je f. Určte akou najmenšou silou F treba na teleso pôsobiť, aby sa pohybovalo konštantnou rýchlosťou v≠0.





y
c
v2
A
v1
B
x
0
s

V čase t=0 sa častica s hmotnosťou m začala pohybovať pod vplyvom sily $F = F_0 sin\omega t$. Určite dráhu ktorú častica prešla za čas t.

Teleso sa začne pohybovať po naklonenej rovine, ktorá zviera s horizontálnym smerom uhol α. Koeficient dynamického trenia sa mení v závislosti od jeho polohy podľa vzťahu: $f=\beta x$, kde β je konštanta. Určte dráhu, ktorú teleso prejde do zastavenia. Nájdite maximálnu dosiahnutú rýchlosť.

Zrýchlenie HB pohybujúceho sa v smere osi x závisí od polohy podľa funkcie $a=Ax-B$. Počiatočná podmienka je $v_0=10$m/s v bode $x=0$. Nájdite rýchlosť telesa

Polohový vektor častice sa meniť časom podľa rovnice: $\vec{r} = \vec{A}t(1 - \alpha t)$.
Určte rýchlosť a zrýchlenie častice v závislosti od času.
Určte čas za ktorý sa častica vráti do počiatku súradnicovej sústavy a dráhu, ktorú prejde.

$\vec{A}$

Integrovanie trigonometrických funkcií

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

Testovanie párnosti a nepárnosti funkcie R vzhľadom na premennú u, resp. v

$$R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x) \qquad u = \sin x$$

Funkcia nepárna vzhľadom na funkciu cosx

$$R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x) \qquad u = \cos x$$

Funkcia nepárna vzhľadom na funkciu sinx

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \qquad u = tgx$$

Pomocné vzťahy:

$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{tg^2 x + 1}$ $\quad \cos^2 x = \frac{1}{tg^2 x + 1}$ $\quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

zhrnutie

- Derivácie
- Integrály – racionálne funkcie , substitúcie, per partes, odmocninové substitúcie
- Mechanika – rýchlosť, zrýchlenie , uhol medzi vektormi , extrémy, závisle veličiny
- Dotyčnice
- Krivkový integrál
- Pohybové rovnice : Sily F=f(x), F=f(t)
- Linearizácia
- Diferenciálne rovnice - superpozície